

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Το έργο μιας **σταθερής δύναμης** που δρα πάνω σε ένα αντικείμενο είναι:

$$W = Fx \cos\theta$$

όπου F είναι το μέτρο της δύναμης, x το μέτρο της μετατόπισης και θ η γωνία μεταξύ δύναμης και μετατόπισης. Μονάδα έργου είναι το 1 Joule.

- Το έργο είναι θετικό αν η συνιστώσα της δύναμης πάνω στη μετατόπιση είναι στην ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπιση, αρνητικό αν η συνιστώσα της δύναμης πάνω στη μετατόπιση είναι αντίθετης κατεύθυνσης με τη μετατόπιση και μηδέν αν η δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση.

- Όταν σε ένα σώμα ασκούνται πολλές δυνάμεις για να υπολογίσουμε το συνολικό έργο υπάρχουν δύο ισοδύναμοι τρόποι. Μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο κάθε δύναμης και να τα προσθέσουμε (αλγεβρικά) ή να βρούμε το έργο της συνισταμένης.

Αν η δύναμη δεν είναι σταθερή το έργο μπορεί να υπολογιστεί από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης δύναμης - μετατόπισης.

Η **κινητική ενέργεια** σημειακού αντικειμένου μάζας m και ταχύτητας μέτρου u ορίζεται:

$$K = \frac{1}{2} mu^2$$

Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας (ΘΜΚΕ): Το ολικό έργο των δυνάμεων που ασκήθηκαν σε ένα κιβώτιο είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\text{ολ}}$$

Το έργο του **βάρους** σε ένα κιβώτιο μάζας m είναι:

$$W = mg (h_1 - h_2)$$

όπου h_1 το αρχικό και h_2 το τελικό ύψος του σώματος μετρημένα από κάποιο οριζόντιο επίπεδο στο οποίο ορίζουμε αυθαίρετα.

Δυναμική ενέργεια U (βαρυτική) είναι η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σε ένα αντικείμενο εξαιτίας της θέσης του κοντά στην επιφάνεια της Γης. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια για ένα αντικείμενο μάζας m δίνεται από τη σχέση:

$$U = mgh$$

όπου h το ύψος του αντικειμένου σχετικά με κάποιο οριζόντιο επίπεδο αναφοράς που αυθαίρετα ορίζουμε να έχει δυναμική ενέργεια μηδέν.

Μηχανική ενέργεια E ονομάζουμε το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας.

Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας: Σε κάθε κλειστό σύστημα, στο οποίο εμφανίζονται μόνο συντηρητικές εσωτερικές δυνάμεις, η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή.

Η μηχανική ενέργεια ενός αντικειμένου μπορεί να μειωθεί από τις τριβές αυξάνοντας τη θερμοκρασία κάποιων σωμάτων.

Ισχύ μιας μηχανής λέμε το πηλίκο του έργου που εκτελεί σε κάποιο χρόνο προς το χρόνο αυτό.

$$P = \frac{W}{t}$$

Ο ορισμός αυτός ισχύει εφόσον η ενέργεια μεταβιβάζεται με σταθερό ρυθμό. Για τη στιγμιαία ισχύ που μεταβιβάζει δύναμη F σε αντικείμενο ταχύτητας u που έχει ίδια κατεύθυνση με τη δύναμη ισχύει η σχέση $P = Fu$ που προκύπτει από την προηγούμενη αν θέσουμε $W = Fx$ και $u = x/t$.

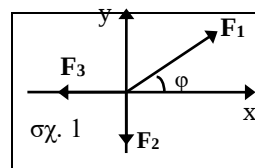
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: α) Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας $\Delta U/\Delta t$ ενός σώματος

βρίσκεται αν διαιρέσουμε με το χρόνο την προηγούμενη σχέση $\Delta U_{αλ} = - W_B$ και είναι αντίθετος με την ισχύ του βάρους P_B π.χ. Για μικρή πέτρα που κατεβαίνει κατακόρυφα με ταχύτητα u ισχύει $\Delta U/\Delta t = - Bu$.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας $\Delta K/\Delta t$ είναι ίσος με την ισχύ της συνισταμένης δύναμης ή με το άθροισμα που προκύπτει αν προσθέσουμε αλγεβρικά την ισχύ που παρέχει ή καταναλώνει κάθε δύναμη.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

10.1 Βρείτε το έργο των δυνάμεων του σχήματος 1 αν $F_1 = 10\text{N}$, $F_2 = 3\text{N}$, $F_3 = 4\text{N}$ και η κίνηση γίνεται προς την κατεύθυνση του άξονα των x για μετατόπιση $x = 2\text{m}$. Δίνεται $\sin\phi = 0,8$.



Λύση: $W_{F1} = F_1 \times \sin\phi = 16\text{Joule}$. $W_{F2} = F_2 \times \sin 90^\circ = 0\text{Joule}$.
 $W_{F3} = F_3 \times \sin 180^\circ = -8\text{Joule}$.

10.2 Όπως είναι γνωστό από το νόμο του Hook το μέτρο της δύναμης που επιμηκύνει ή συσπείρωνει ένα ελατήριο κατά x είναι $F = k \cdot x$ όπου k η σταθερά του ελατηρίου.

α) Υπολογίστε το έργο της δύναμης του ελατηρίου για αυτή τη μεταβολή του μήκους. Είναι παραγόμενο ή καταναλισκόμενο;

β) * Αν είναι γνωστό πειραματικά ότι η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική ποια δυναμική ενέργεια θεωρείται αποθηκευμένη στο ελατήριο αν είναι τεντωμένο ή συσπειρωμένο κατά x ; Θεωρήστε μηδενική τη δυναμική ενέργεια όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος ($x = 0$).

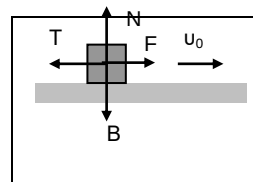
Λύση: α) Η δύναμη του ελατηρίου έχει μεταβλητό μέτρο. Άρα το έργο της δίνεται από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης $F = f(x)$. Από το σχήμα:

$$|W| = \frac{1}{2} x F \xrightarrow{F=kx} |W| = \frac{1}{2} kx^2.$$

Αφού η δύναμη του ελατηρίου είναι αντίθετη στη μετατόπιση (επιμήκυνση ή συσπείρωση) το έργο της είναι αρνητικό δηλ. $W = -\frac{1}{2} kx^2$.

$$\beta) \text{ Ισχύει } \Delta U_{0 \rightarrow x} = -W_{0 \rightarrow x} \Rightarrow U - 0 = -(-\frac{1}{2} kx^2) \Rightarrow U = \frac{1}{2} kx^2.$$

10.4 Κιβώτιο μάζας $m = 2\text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $u_0 = 2\text{ m/s}$ και σε αυτό ασκείται δύναμη που έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας και αλγεβρική τιμή που δίνεται από τη σχέση $F = 16 - 2x$. Αν ο συντελεστής τριβής κιβωτίου - επιπέδου είναι $\mu = 0,1$ βρείτε:



α) Τα έργα όλων των δυνάμεων για μετατόπιση του κιβωτίου κατά $x = 4\text{ m}$.

β) Την ταχύτητα του κιβωτίου στο τέλος της παραπάνω μετατόπισης και τη μέση ισχύ $\bar{P}$ που δόθηκε στο κιβώτιο κατά τη διάρκεια της παραπάνω μετατόπισης αν ο χρόνος διάρκειας της μετατόπισης είναι $t = 4\text{ s}$.

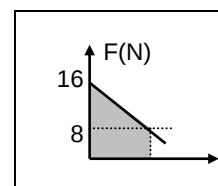
δ) Την ισχύ όλων των δυνάμεων και της συνισταμένης δύναμης ΣF , το ρυθμό μετατροπής ενέργειας σε θερμική $\Delta Q/\Delta t$ και το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κιβωτίου $\Delta K/\Delta t$ τη στιγμή εκκίνησης. Τι παρατηρείτε;

Λύση: α) Στο κιβώτιο ασκούνται η δύναμη F , το βάρος του B , η κάθετη αντίδραση N και η τριβή T . Το κιβώτιο δεν κινείται στον κατακόρυφο άξονα y . Άρα:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B = 0 \Rightarrow N = B = mg. \quad T = \mu N \Rightarrow T = \mu mg = 2\text{ N}$$

Τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται στο κιβώτιο είναι:

$W_T = -T x = -8\text{J}$, $W_B = W_N = 0$ (κάθετες στη μετατόπιση $\sin\phi = 0$) Επειδή το μέτρο της F μεταβάλλεται το έργο της F δίνεται από το εμβαδόν του τραπεζίου του σχήματος $W_F = \frac{1}{2} (16 + 8) \cdot 4 = 48\text{J}$.



β) Το ολικό έργο είναι $W_{ολ} = W_F + W_T + W_B + W_N = 40 \text{ J}$.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ από την αρχική θέση μέχρι τη θέση $x = 4 \text{ m}$.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{ολ} \Rightarrow \frac{1}{2} m u^2 - \frac{1}{2} m u_0^2 = W_{ολ} \Rightarrow u = \sqrt{44} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \bar{P} = \frac{W_{ολ}}{t} = 10 \text{ W}$$

γ) Ισχύει $P_F = F \cdot u_0 = 32 \text{ W}$, $P_T = -T \cdot u_0 = -8 \text{ W}$, $P_B = P_N = 0$, $P_{\Sigma F} = \Sigma F \cdot u_0 = (F - T) u_0 = 24 \text{ W}$

$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = |P_T| = 8 \text{ W}$, $\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F \cdot u_0 = 24 \frac{\text{J}}{\text{s}}$. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισούται με τη συνολική ισχύ των δυνάμεων που δρουν στο κιβώτιο.

10.5 * Μικρό σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ αφήνεται να πέσει από ύψος $h = 4 \text{ m}$. Να σχεδιάσουν στους ίδιους άξονες ενέργεια - ύψος, η κινητική ενέργεια K , η δυναμική ενέργεια U και η ολική ενέργεια E κατά την πτώση του.

Λύση: Έστω x το ύψος από το έδαφος που βρίσκεται. Η δυναμική ενέργεια του σώματος θα δίνεται από τη σχέση $U = mg(h-x) = mgh - mgx = 80 - 20x$. Αφού η μηχανική ενέργεια $E = mgh = 80 \text{ J}$ διατηρείται η κινητική ενέργεια του σώματος θα είναι $K = E - U = mgx = 20x$.

