

## 02. ... Γ Θ Ε Μ Α

21102

9.1, 9.2, 9.4

Για να βρει το ύψος ενός δέντρου,

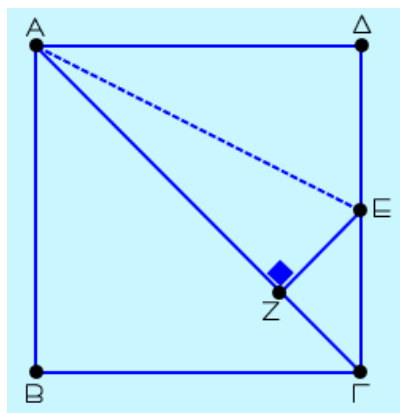
Δίνεται τετράγωνο  $ΑΒΓΔ$  πλευράς  $a$  και έστω  $Ε$  το μέσο της  $ΔΓ$ .

α. Να αποδείξετε ότι:

i.  $ΑΓ = a\sqrt{2}$

ii.  $ΑΕ = a\frac{\sqrt{5}}{2}$

β. Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος  $ΑΕ$  στην  $ΑΓ$ .

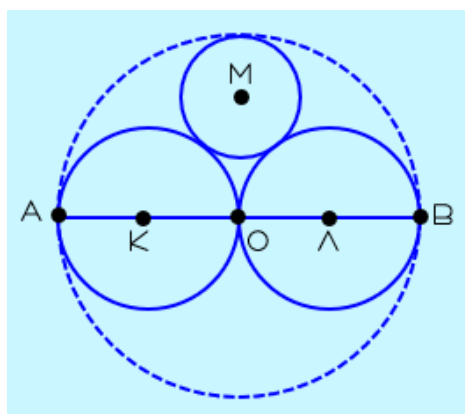


## 03. ... Δ Θ Ε Μ Α

14500

9.2

Δύο ίσοι κύκλοι  $(K, R)$  και  $(\Lambda, R)$  εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο  $O$ . Ένας τρίτος κύκλος  $(M, \rho)$  εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων  $K$  και  $\Lambda$ . Με κέντρο το σημείο  $O$  και ακτίνα  $2R$  γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α. Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη Α είναι οι διάκεντροι  $KM$ ,  $\Lambda M$  και  $OM$  των κύκλων με κέντρα  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $M$  και  $O$  και στη στήλη Β τα μήκη των διακεντρών αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα αντίστοιχα της στήλης Β, γράφοντας στην κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίες.

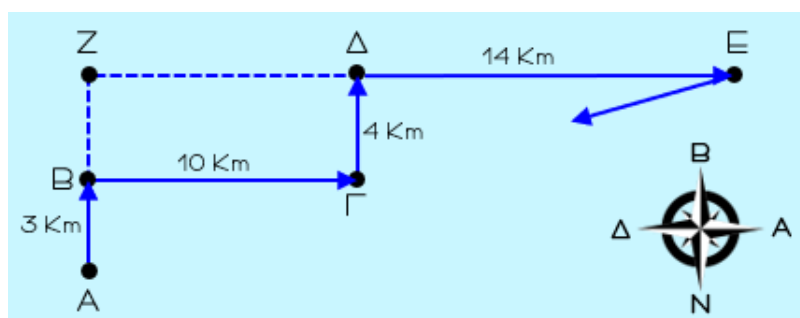
| Στήλη Α        | Στήλη Β         |
|----------------|-----------------|
| Διάκεντρος     | Μήκος           |
| 1. $K\Lambda$  | i. $R$          |
| 2. $\Lambda M$ | ii. $2R$        |
| 3. $OM$        | iii. $R + \rho$ |
|                | iv. $2R - \rho$ |

- β. i. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $M\Lambda K$  είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα  $MO$  είναι το ύψος προς τη βάση του.
- ii. Να βρείτε την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου κέντρου  $M$  ως συνάρτηση του  $R$ , όπου  $R$  η ακτίνα των κύκλων κέντρων  $K$  και  $\Lambda$ .

14533

7.7, 9.2

Δύο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



- α. i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε;  
ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.
- β. Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

16133

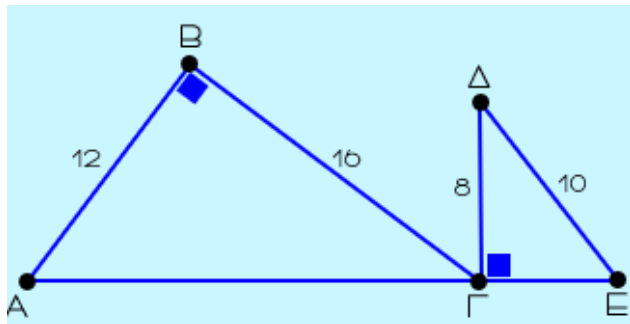
7.7, 8.2, 9.2

Στο παρακάτω σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  και  $\Delta E$  έχουν μήκη αντίστοιχα 12, 16, 8 και 10, οι γωνίες  $\hat{A}B\Gamma$  και  $\hat{\Delta}\Gamma E$  είναι ορθές και τα σημεία  $A, \Gamma$  και  $E$  ανήκουν στην ίδια ευθεία.

- α. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $AE$ .  
 β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $E\Gamma\Delta$  είναι όμοια.  
 γ. Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών  $AB$  και  $E\Delta$  είναι το  $Z$  και  $ZH$  είναι το ύψος του τριγώνου  $ZAE$  από την κορυφή του  $Z$ .

Να αποδείξετε ότι:

- i.  $EH = 13$ ,  
 ii.  $ZH = \frac{52}{3}$ .

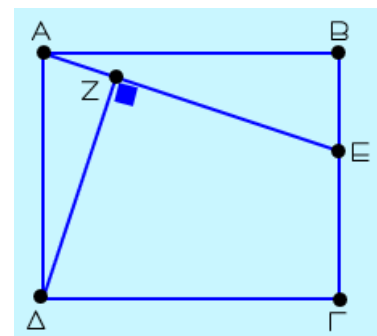


17348

7.4, 8.2, 9.2

Στο παρακάτω σχήμα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο με  $AB=6$  και το  $E$  σημείο της πλευράς  $B\Gamma$ , ώστε  $BE=2$ . Έστω  $\Delta Z$  το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο  $\Delta$  προς την  $AE$ .

- α. Να αποδείξετε ότι  $AE = 2\sqrt{10}$ .  
 β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABE$  και  $\Delta ZA$  είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους.  
 γ. Αν  $\Delta Z = ZE$ , να υπολογίσετε το μήκος του  $A\Delta$ .



21149

9.2

Σε κύκλο κέντρου  $O$  και ακτίνας  $R$  θεωρούμε διάμετρο  $AB$  και σημείο

$\Gamma$  του κύκλου τέτοιο ώστε  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

Αν  $B\Gamma = 2$ , τότε:

α. Να υπολογίσετε:

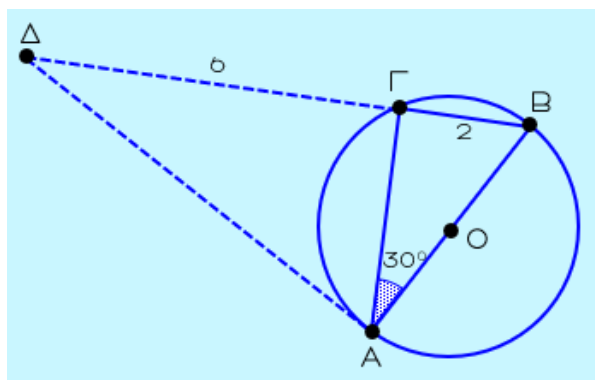
i. Την ακτίνα  $R$ .

ii. Το μήκος της πλευράς  $A\Gamma$ .

β. Θεωρούμε σημείο  $\Delta$  στην προέκταση της  $B\Gamma$  τέτοιο ώστε  $\Gamma\Delta = \theta$ .

Να εξετάσετε αν το τμήμα  $\Delta A$  εφάπτεται του κύκλου στο σημείο  $A$ .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



21185

9.2, 9.4

Τρία ευθύγραμμα τμήματα  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο.

β. Αν τα ευθύγραμμα τμήματα  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση  $\lambda\%$ , να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο.

γ. Να εξετάσετε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές  $10\alpha$ ,  $8\beta$  και  $\theta\gamma$ .

22400

8.1, 8.2, 9.2, 9.4

Τα  $\Delta$  και  $E$  είναι σημεία των πλευρών  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα, ενός τριγώνου  $AB\Gamma$ . Δίνεται ότι  $AB=9$ ,  $AG=12$ ,  $AD=4$  και  $AE=3$ .

α. Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $B\Gamma=15$ , [Σχήμα 1]. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

ii.  $DE=5$ .

β. Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $B\Gamma=10$ , [Σχήμα 2].

Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  δεν είναι ορθογώνιο.

ii.  $DE = \frac{10}{3}$ .

