

3.4 Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3 \cdot \eta\mu x$.

α) Να βρείτε την περίοδο T της f .

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο $[0, 2\pi]$.

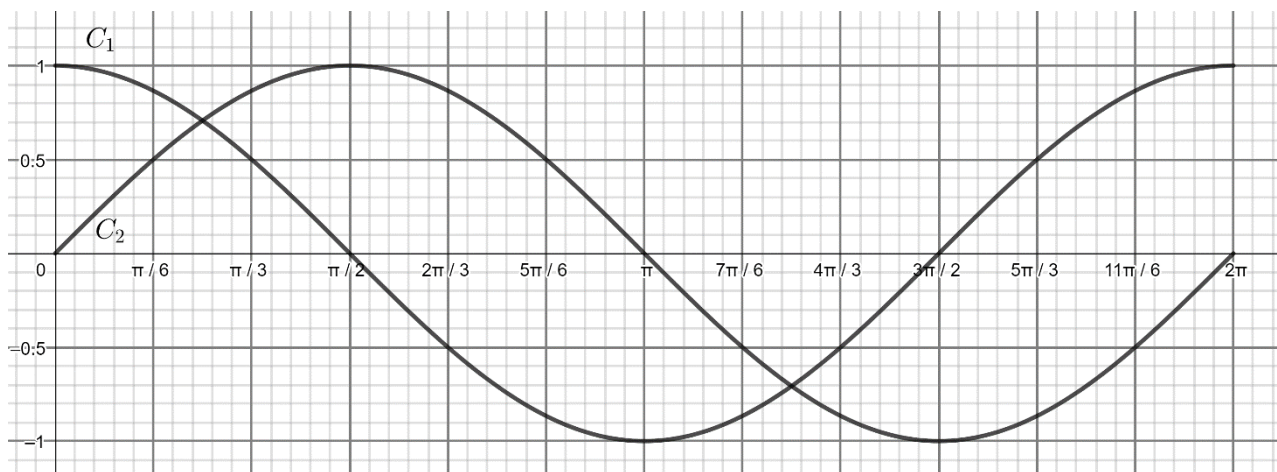
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \eta\mu x$.

α) Να βρείτε την περίοδο T της f .

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο $[0, 2\pi]$.

4. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει τις γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 δυο συναρτήσεων στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

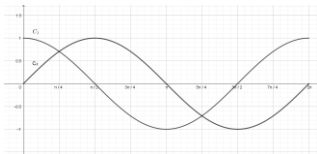


α)) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \eta\mu x$, ποια από τις C_1 , C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και ποια της $g(x) = \eta\mu x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3.4 Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

β) Με την βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις τιμές $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

5. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

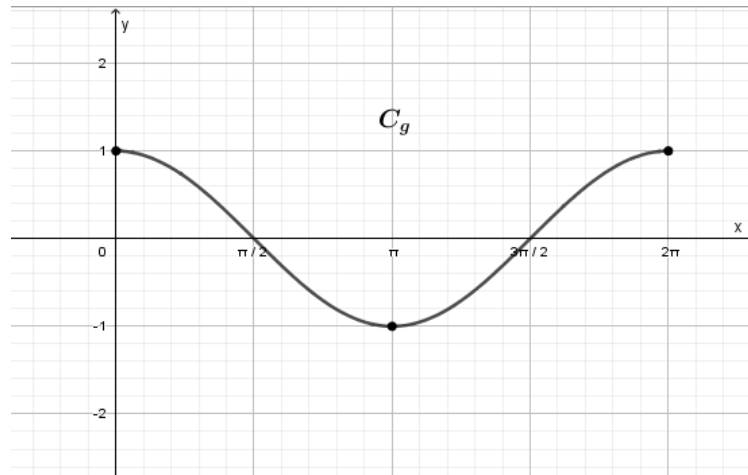


α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \eta\mu x$, ποια από τις C_1 , C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και ποια της $g(x) = \eta\mu x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Με την βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής των C_1 , C_2 στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1$, $x \in [0, 2\pi]$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$.

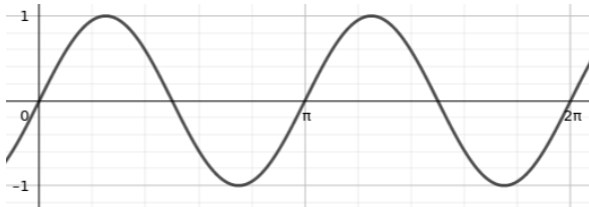
3.4 Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις



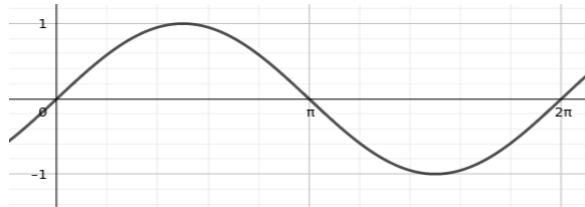
α) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f καθώς επίσης και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

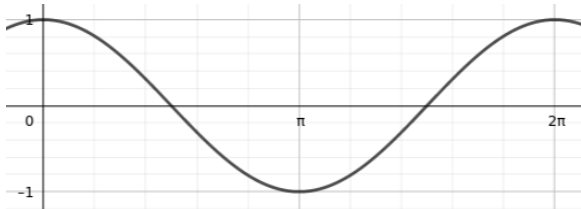
7. Στα παρακάτω 4 σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $h(x) = \eta\mu 2x$, $\varphi(x) = \sigma\upsilon\nu(2x)$, όχι με αυτήν τη σειρά αναγιναι.



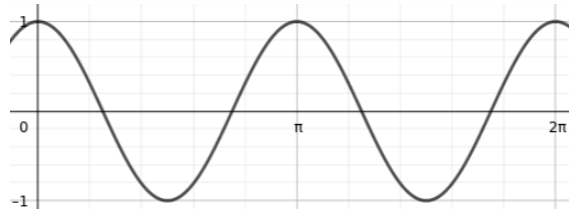
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι περίοδοι των παραπάνω συναρτήσεων είναι: $T_f = T_g = 2\pi$, $T_h = T_\varphi = \pi$.

β) Να βρείτε ποιο από τα τέσσερα σχήματα αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της $h(x) = \eta\mu(2x)$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

3.4 Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$					

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x)$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.

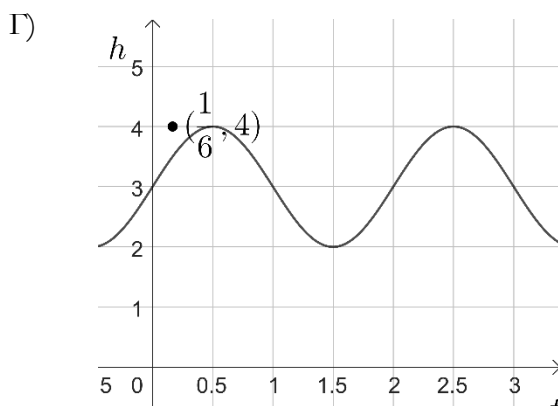
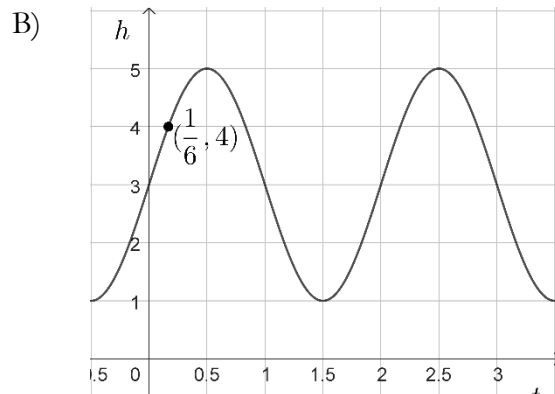
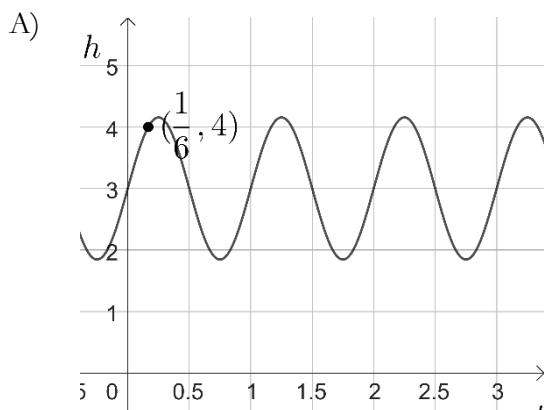
3.4 Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

9. Μια μπάλα που κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι ανεβοκατεβαίνει και η απόστασή της h σε μέτρα από το πάτωμα τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση $h(t) = \alpha + 2\eta\mu(\pi t)$, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

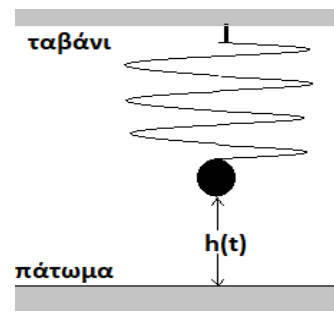
Αν τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{6}$ η μπάλα απέχει από το πάτωμα 4 μέτρα, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = 2$.

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση h ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



γ) Με βάση τη γραφική παράσταση που επιλέξατε στο ερώτημα β), ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη απόσταση της μπάλας από το έδαφος; Πόση είναι η συνολική απόσταση που διανύει η μπάλα κατά τη διάρκεια μιας ταλάντωσης;



10. Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί στο διάστημα $\left[0, \frac{4\pi}{3}\right]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$ όπου $\rho > 0, \omega > 0, x \in \mathbb{R}$.

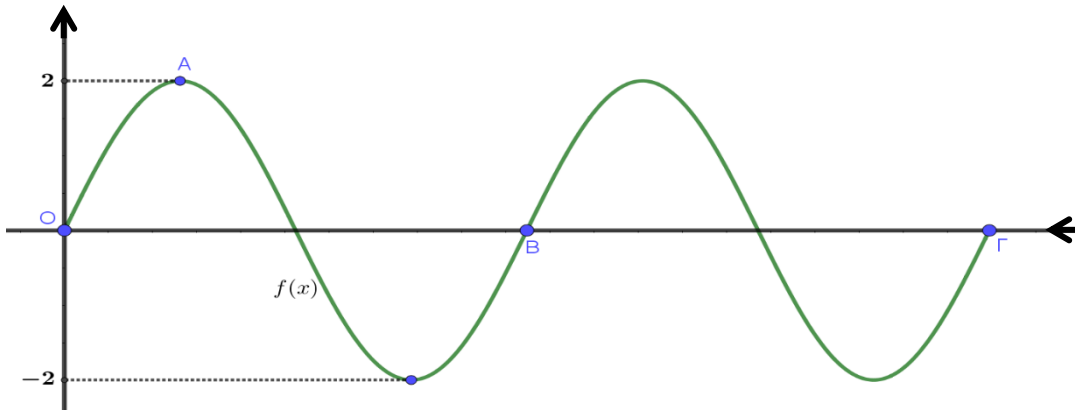
3.4 Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Γνωρίζουμε ότι τα σημεία A, B, Γ έχουν τις εξής συντεταγμένες: $A\left(\frac{\pi}{6}, 2\right), B\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), \Gamma\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$.

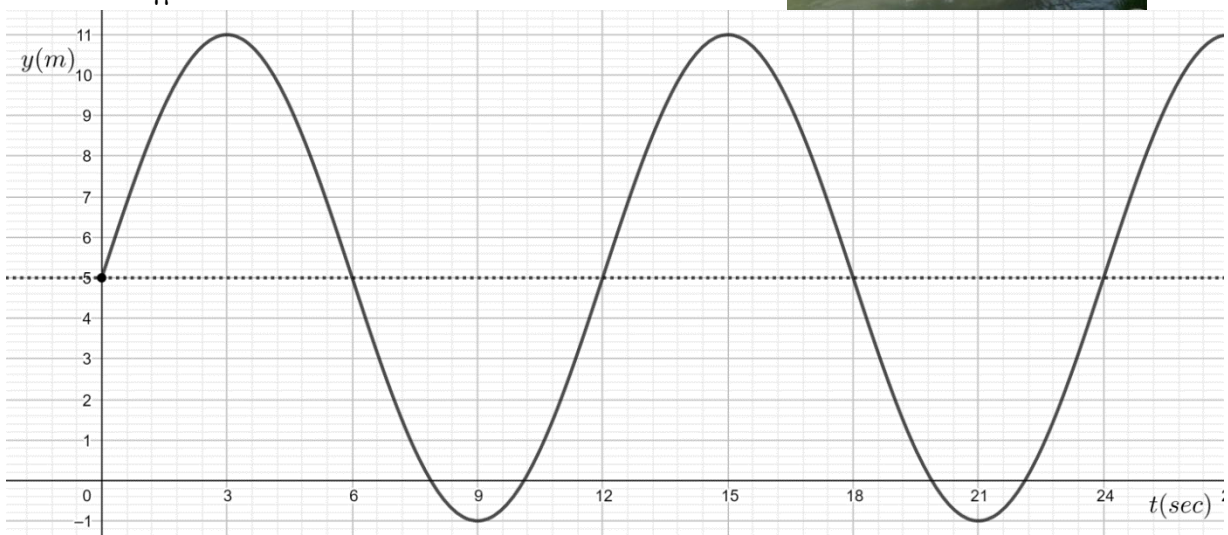
α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot \eta\mu(3x)$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{12}\right), f\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

γ) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}\right]$.



11. Η απόσταση y , σε μέτρα, της άκρης του φτερού ενός νερόμυλου από την επιφάνεια του νερού, δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t , σε δευτερόλεπτα, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων.



α) Με βάση το σχήμα να βρείτε:

3.4 Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

i. Την περίοδο T της συνάρτησης.

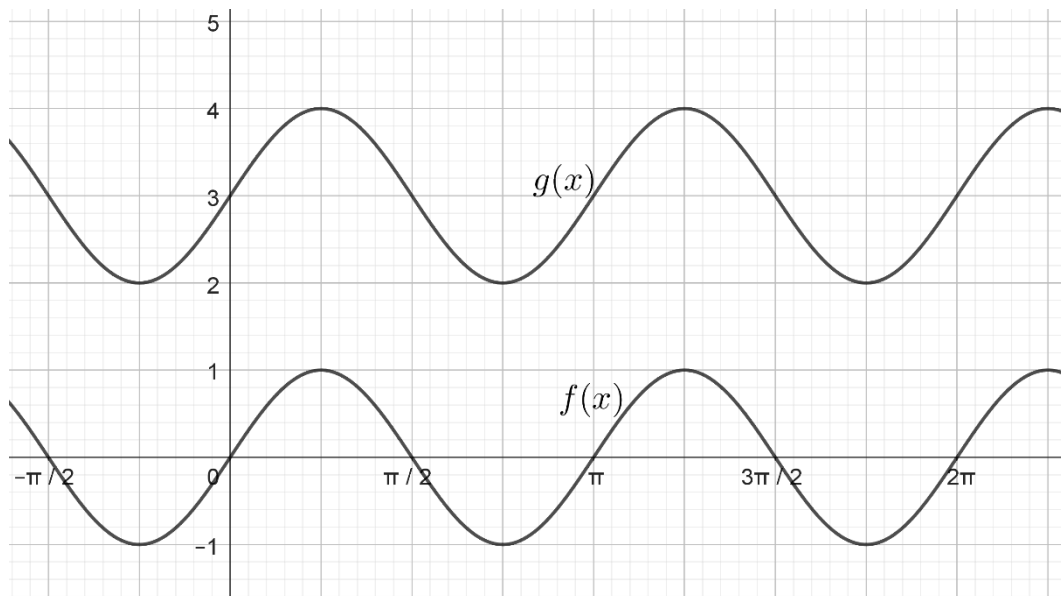
ii. Ποια χρονική στιγμή $t \in [0, 12]$ η άκρη του φτερού έχει την μεγαλύτερη απόσταση από την επιφάνεια του νερού και ποια είναι η απόσταση αυτή.

iii. Ποια χρονική $t \in [0, 12]$ η άκρη του φτερού βρίσκεται 1 μέτρο κάτω από την επιφάνεια του νερού.

β) Να βρείτε τη διάμετρο του νερόμυλου.

γ) Αν η συνάρτηση είναι της μορφής $y = \rho \eta \mu(\omega t) + 5$, $\rho, \omega > 0$, να βρείτε τους αριθμούς ω και ρ .

12. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \eta \mu(\omega x)$ και της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = \eta \mu(\omega x) + c$ με $\omega, c \in \mathbb{R}$.



α) Να βρείτε:

i. την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή, καθώς και την περίοδο T της συνάρτησης f ,

ii. την τιμή της παραμέτρου ω .

β) Αν $\omega = 2$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f , τότε:

i. να προσδιορίσετε το είδος της μετατόπισης με την οποία προκύπτει η γραφική παράσταση της g από τη γραφική παράσταση της f ,

ii. να βρείτε την τιμή της παραμέτρου c και τον τύπο της συνάρτησης g .

3.4 Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

13. Το βάθος y , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών) και δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση:

$$y = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4, \text{ με } 0 \leq t \leq 24.$$

α)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η περίοδος της συνάρτησης είναι $T=12$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

t	0	3	6	9	12
y					

iii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4, \text{ με } 0 \leq t \leq 24.$

β)

i. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t=12$;

ii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιού χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;
