

1. ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Πεδία ορισμού βασικών συναρτήσεων

Εκθετικής $a^x, e^x : \mathbb{R}$

Λογαριθμικής $\ln x : \mathbb{R}_+^*$

$\eta\mu(x), \sigma\upsilon\nu(x) : \mathbb{R}, \varepsilon\varphi x : \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, \sigma\varphi x : \mathbb{R} - \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.

1. Πολωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, n \in \mathbb{N}$$

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

Παράδειγμα 1: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ $D_f = \mathbb{R}$

2. Ρητή συνάρτηση (πηλίκο πολωνύμων).

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

Παράδειγμα 2: $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

3. Άρρητες.

$$f(x) = \sqrt{P(x)} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}.$$

Παράδειγμα 3: $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Παράδειγμα 4: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

4. $f(x) = \ln g(x) \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : g(x) > 0\}$

Παράδειγμα 5: $f(x) = \ln(x-3)$.

6. $f(x) = \eta\mu g(x), f(x) = \sigma\upsilon\nu g(x) \quad D_f = D_g$

Παράδειγμα 6: $f(x) = \eta\mu(x-6)$.

7. $f(x) = \varepsilon\varphi(g(x)) \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : \sigma\upsilon\nu g(x) \neq 0\}$

Παράδειγμα 7: $f(x) = \sigma\varphi(x-2)$.

8. $f(x) = (g(x))^{h(x)}, \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : g(x) > 0\}$

Παράδειγμα 8: $f(x) = (x+1)^x$

9. Σύνθετη Περίπτωση

1. Γράφουμε τους περιορισμούς που προκύπτουν από τον τύπο.

2. Εμφανίζουμε τη γραφική λύση κάθε ανίσωσης σε κοινό άξονα.

3. Κάνουμε συναλήθευση (τομή) και γράφουμε σαν πεδίο ορισμού το κοινό διάστημα λύσεων.

Παράδειγμα 9: $g(x) = \frac{\ln(3x-x^2)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

Λυμένα Παραδείγματα

1-1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο:

$$\text{i) } f(x) = \frac{x+3}{x^2-4x+3} \quad \text{ii) } f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt[3]{1+x}$$

Λύση

i) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν $x^2 - 4x + 3 \neq 0$. Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 4$ και ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$. Επομένως $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x=1 \text{ ή } x=3)$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

ii) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν και μόνο όταν $(1-x \geq 0 \text{ και } 1+x \geq 0)$ ή $(x \leq 1 \text{ και } x \geq -1)$, δηλαδή $-1 \leq x \leq 1$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = [-1, 1]$.

1-2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{9-x^2} - \sqrt{4x+x^2}$.

Λύση

Πρέπει $9-x^2 \geq 0$ και $4x+x^2 \geq 0$. Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου των $9-x^2$ και $4x+x^2$.

Άρα $0 \leq x \leq 3$. Συνεπώς $D_f = [0, 3]$. Το παραπάνω προκύπτει συναληθεύοντας κατά τα γνωστά τις ανισότητες.

x	$-\infty$	-4	-3	0	3	$+\infty$
$9-x^2$	-	-	+	+	-	-
$4x+x^2$	+	-	-	+	+	+

1-3. Να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζονται οι συναρτήσεις:

i). $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)$ ii). $f(x) = \sqrt{\frac{1-\ln x}{x-2}}$.

Λύση

i) Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει $\left\{ \begin{array}{l} \frac{e^x}{e^x-1} > 0 \Leftrightarrow e^x(e^x-1) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \\ \text{και} \\ e^x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x > 0$.

Δηλαδή το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (0, +\infty)$.

ii) Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει $\frac{1-\ln x}{x-2} \geq 0$ και $x > 0$ και $x-2 \neq 0$.

Είναι $\frac{1-\ln x}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow (1-\ln x)(x-2) \geq 0$ το πρόσημο της οποίας φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Άρα το

πεδίο ορισμού της f είναι $A = (2, e]$.

x	0	2	e	$+\infty$
$1-\ln x$	+	+	-	-
$x-2$	-	+	+	+
Γινόμενο	-	+	-	-

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1-4. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων;

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x+2} \quad f(x) = \frac{\eta\mu x}{x^2-1} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{9+x^2} \quad f(x) = \frac{e^x}{x-1} + \frac{x^2+3}{x^2-x-12}$$

1-5. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$f(x) = \sqrt{2-x} \quad f(x) = \sqrt{1-\sqrt{9-x}} \quad f(x) = \sqrt{-3x^2+5x-2} \quad f(x) = \sqrt{1-\sqrt{4-x}} \quad f(x) = \sqrt[3]{x-1} \quad f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt{2-x}$$

1-6. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$f(x) = \ln(1-e^x) \quad f(x) = \ln(x^3-1) \quad f(x) = \log(1-e^x) \quad f(x) = \log_{2x}(4-|x|)$$

1-7. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων: $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{2-x}$ $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$f(x) = \sqrt{x-5} + \frac{x}{x-7} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x-2} + \frac{e^x}{x^2-4x+3} \quad f(x) = \frac{\sqrt{3-|2-x|}}{\ln x} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x-2}} \quad f(x) = \frac{\sqrt{5-|x|}}{\ln x} \quad f(x) = \ln \frac{x^2-4x+3}{x-2}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{4-|x|}} \quad f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{|x-1|-1} \quad f(x) = \eta\mu \sqrt{2-|x|} \quad f(x) = \frac{x^4+2}{2\eta\mu x-1} \quad g(x) = \frac{2x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$$

1-8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + x - 1$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

β. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$.

γ. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $g(x) = \sqrt{-f(x)}$.

2 ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

1. Πεδίο ορισμού για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου.

α. Αναγράφω τους περιορισμούς (συνήθως παραμετρική ανίσωση).

β. Λύνω την ανίσωση. Οι λύσεις καθορίζονται από τις τιμές του λ.

Παράδειγμα1: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με $f(x) = \sqrt{\alpha x^2 - 4x + 4}$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

2-1. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του λ το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{x-1}{\lambda x^2 - 2x + 1}$.

Λύση

Για $\lambda = 0$ είναι $f(x) = \frac{x-1}{-2x+1}$ με $A_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Για $\lambda \neq 0$ βρίσκουμε τις ρίζες του παρονομαστή. Είναι $\Delta = 4 - 4\lambda = 4(1-\lambda)$.

• Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$ δεν υπάρχουν ρίζες στο $\mathbb{R}$ και είναι $A_f = \mathbb{R}$.

• Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ η μοναδική ρίζα είναι η 1 οπότε $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

• Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$ οι ρίζες είναι $\frac{(1 \pm \sqrt{1-\lambda})}{\lambda}$, οπότε το πεδίο ορισμού είναι

$$\text{το } A_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{1-\lambda}}{\lambda} \right\}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

2-2. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του λ το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - \lambda x + 1}$.

2. Προσδιορισμός παραμέτρου ώστε $D_f = \mathbb{R}$.

α. Αναγράφω τους περιορισμούς.

β. Γράφω συνθήκες ώστε οι περιορισμοί να ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Οι συνθήκες καθορίζουν τις τιμές των παραμέτρων. (Προσοχή: θα χρειαστούν ιδιότητες τριωνύμου).

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θετικό όταν $\alpha > 0, \Delta < 0$.

Αρνητικό όταν $\alpha < 0, \Delta < 0$.

Θετικό ή μηδέν (μη αρνητικό) όταν $\alpha > 0, \Delta \leq 0$.

Αρνητικό ή μηδέν (μη θετικό) όταν $\alpha < 0, \Delta \leq 0$.

Παράδειγμα 2: Να προσδιοριστούν οι τιμές της παραμέτρου λ ώστε η συνάρτηση

$f(x) = \sqrt{(\lambda-1)x^2 + (\lambda-4)x + \lambda-1}$ να έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

2-3. Να προσδιοριστούν οι τιμές της παραμέτρου λ ώστε να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση

$f(x) = \ln(\lambda x^2 + (\lambda-3)x + 1)$.

Λύση

Για $\lambda = 0$ είναι $f(x) = \ln(-3x+1)$ και το πεδίο ορισμού είναι $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \subset \mathbb{R}$. Για να είναι $A_f = \mathbb{R}$ θα πρέπει

$\lambda x^2 + (\lambda-3)x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτό γίνεται όταν

$\lambda > 0$ και $\Delta < 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)^2 - 4\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 9 < 0 \Leftrightarrow 1 < \lambda < 9$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού είναι $A_f = \mathbb{R}$ όταν $1 < \lambda < 9$.

2-4. Να προσδιοριστούν οι τιμές της παραμέτρου λ ώστε να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση

$f(x) = (4 - \lambda + 2\lambda x - \lambda x^2)^x$.

Λύση

Για $\lambda = 0$ είναι $f(x) = 4^x$ και έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$, (εκθετική). Για να είναι $A_f = \mathbb{R}$ θα πρέπει $-\lambda x^2 + 2\lambda x + 4 - \lambda > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτό γίνεται όταν $\lambda < 0$ και $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda(4 - \lambda) < 0 \Leftrightarrow \lambda < 0$. Συνεπώς για $\lambda < 0$ και $\lambda = 0$, δηλαδή $\lambda \leq 0$ είναι $A_f = \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

2-5. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln(\lambda x^2 + x + \lambda)$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

2-6. Να προσδιορίσετε τη μικρότερη θετική και ακέραια τιμή του λ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(\lambda-2)x^2 + (\lambda-1)(x+1)}} \text{ να έχει πεδίο ορισμού το } \mathbb{R}.$$

☺ ☺ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ☺ ☺

Πρέπει να διασαφηνίσουμε ότι κάθε ισότητα δυο μεταβλητών, όπως για παράδειγμα οι $x + y^2 = 7$ ή $x^3 + x - y = 0$ δεν ορίζει απαραίτητα συνάρτηση. Όμως από τον ορισμό αντιλαμβανόμαστε ότι:

Μια ισότητα που συνδέει δυο μεταβλητές x, y ορίζει συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή x , αν αυτή η ισότητα εξασφαλίζει για κάθε $x \in A$ μοναδική λύση ως προς y στο $\mathbb{R}$.

Δυο παραδείγματα

1) Η ανεξάρτητη μεταβλητή x και η εξαρτημένη μεταβλητή y μιας αντιστοιχίας $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνδέονται με την σχέση $ye^x - x^2 + y = 5$. Είναι η παραπάνω αντιστοιχία συνάρτηση;

Λύση

Από την ισότητα που δόθηκε $ye^x - x^2 + y = 5$ λύνουμε ως προς y και λαμβάνουμε:

$$ye^x - x^2 + y = 5 \Leftrightarrow ye^x + y = 5 + x^2 \Leftrightarrow y(e^x + 1) = 5 + x^2 \Leftrightarrow y = \frac{5 + x^2}{e^x + 1}$$

Επειδή σε κάθε x του πεδίου ορισμού $A = \mathbb{R}$ αντιστοιχεί μοναδικό y στο $\mathbb{R}$, ορίζεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{5 + x^2}{e^x + 1}$

2) Η ανεξάρτητη μεταβλητή x και η εξαρτημένη μεταβλητή y μιας αντιστοιχίας $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

συνδέονται με την σχέση $x^2 + y^2 = 9$. Είναι η παραπάνω αντιστοιχία συνάρτηση;

Λύση

Από την ισότητα που δόθηκε $x^2 + y^2 = 9$ λύνουμε ως προς y και λαμβάνουμε:

$$x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow y^2 = 9 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{9 - x^2}, x \in [-1, 1]$$

Η αντιστοιχία που δόθηκε με την ισότητα $x^2 + y^2 = 9$, δεν ορίζει συνάρτηση, αφού υπάρχουν τιμές του $x \in A = [-1, 1]$ στις οποίες αντιστοιχούν δυο y . Για παράδειγμα στην τιμή $x = 0$ αντιστοιχούν οι τιμές $y = \pm 3$.

Ισοδύναμος ορισμός συνάρτησης χρήσιμος σε ασκήσεις

Μια αντιστοιχία $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$ να συγκρίνετε τις τιμές: $f(x_1^3 + 4), f(x_2^3 + 4)$

Λύση

Έστω δυο τυχαία $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Εφόσον $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1^3 + 4 = x_2^3 + 4$ που ανήκουν στο $A = \mathbb{R}$.

Από τον παραπάνω ορισμό ισχύει: $x_1^3 + 4 = x_2^3 + 4 \Rightarrow f(x_1^3 + 4) = f(x_2^3 + 4)$.

3 ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ $f(A)$ / ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΩΣΤΕ ΝΑ ΕΙΝΑΙ $f(A)=[\alpha, \beta]$ ή $\mathbb{R}$

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

Με λίγα λόγια απαιτώ η εξίσωση $y = f(x)$ να έχει λύση ως προς x .

Από την απαίτηση προκύπτει ανίσωση με άγνωστο το y και λύνοντάς την βρίσκω το πεδίο τιμών.

Παράδειγμα 1: Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2\lambda x + k}{x^2 + x + 1}$ να έχει σύνολο τιμών το $[-2, 2]$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

3-1. Να βρεθεί το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Λύση

$$\text{Είναι } A = \mathbb{R}. \text{ Έστω } y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \text{ Άρα } \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ y > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} \\ y > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{2x} - 2e^x y + 1 = 0 \\ y > 0 \end{array} \right\}.$$

Θέτουμε $e^x = t$, οπότε $\left\{ \begin{array}{l} t^2 - 2yt + 1 = 0 \\ y > 0 \end{array} \right\}$ (2). Η διακρίνουσα της σχέσης (2) είναι $\Delta = 4y^2 - 4$. Πρέπει

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \geq 1 \Leftrightarrow y \leq -1 \text{ ή } y \geq 1 \text{ και επειδή } y > 0, \text{ προκύπτει ότι } y \geq 1, \text{ άρα } f(A) = [1, +\infty).$$

3-2. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x) = \frac{ax^2 + \beta x + 1}{x^2 + 1}$ να έχει σύνολο τιμών το $[-1, 3]$.

Λύση

Είναι $A = \mathbb{R}$ και από υπόθεση $-1 \leq y \leq 3$ (1). Έτσι από

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{ax^2 + \beta x + 1}{x^2 + 1} = y \Leftrightarrow x^2 y + y = ax^2 + \beta x + 1 \Leftrightarrow (y - \alpha)x^2 - \beta x + (y - 1) = 0.$$

Αν $y = \alpha$ τότε η παραπάνω εξίσωση δίνει $-\beta x + \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\alpha - 1}{\beta}$ με $\beta \neq 0$. Αν $\beta = 0$ τότε $\alpha = 1$ και

$$\text{έτσι } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1 \text{ με } f(A) = \{1\} \text{ άτοπο.}$$

Αφού λοιπόν η τιμή $\frac{\alpha - 1}{\beta}$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και η τιμή $y = \alpha$ θα ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

Αν $y \neq \alpha$ τότε για να έχει η παραπάνω εξίσωση λύση στο $\mathbb{R}$,

$$\text{πρέπει } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4(y - \alpha)(y - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -4y^2 + 4(\alpha + 1)y + \beta^2 - 4\alpha \geq 0.$$

Αν το τριώνυμο αυτό έχει $\Delta \leq 0$ τότε η σχέση (1) δεν θα επαληθεύεται. Άρα λόγω (1) να έχει $\Delta_1 > 0$ και ρίζες $q_1 = -1, q_2 = 3$ και αυτό όταν ισχύουν

$$q_1 + q_2 = 2 \Leftrightarrow \alpha + 1 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1, q_1 \cdot q_2 = -3 \Leftrightarrow \frac{\beta^2 - 4\alpha}{-4} = -3 \Leftrightarrow \beta = \pm 4$$

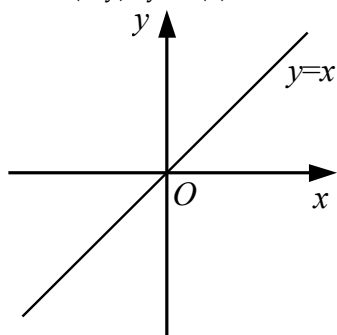
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

3-3. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{ax^2 + 3\beta x + 3}{x^2 - x + 1}$ να έχει σύνολο τιμών το $[-3, 5]$.

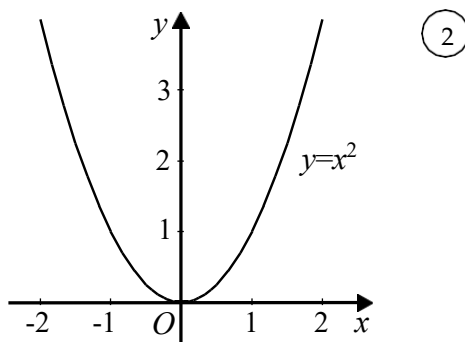
4 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Γραφική παράσταση της φ λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y=f(x)$ δηλ.

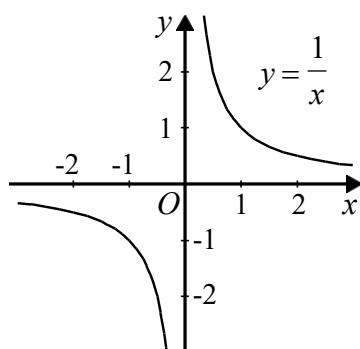
$$C_f = \{M(x,y) / y = f(x) \text{ και } x \in D_f\}$$



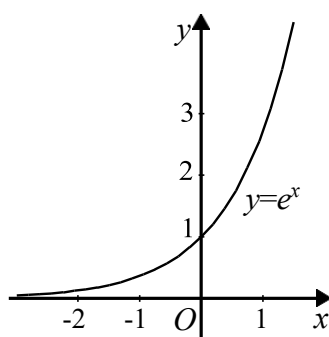
(α) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.



(β) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι μια παραβολή.

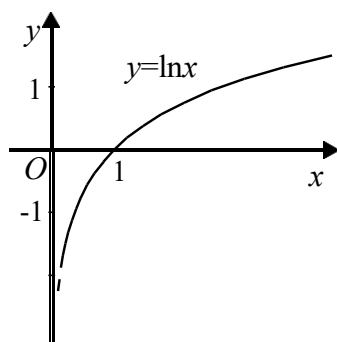


(γ) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή.

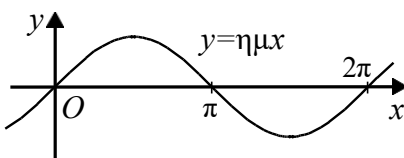
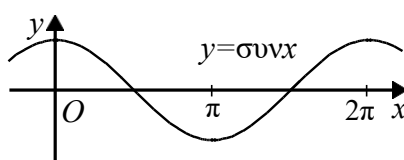


(δ) Η καμπύλη της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^x$ είναι “πάνω” από τον άξονα

x' , αφού $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.



(ε) Η καμπύλη της λογαριθμικής Συνάρτησης $f(x) = \ln x$ είναι “δεξιά” του άξονα yy' , αφού ο λογάριθμος ορίζεται μόνο για $x > 0$.



(στ) Οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \varsigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π .

Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη C_f το πολύ ένα κοινό σημείο.

Όταν δίνεται η C_f τότε:

- Α. Η τιμή της f στο $x_0 \in D_f$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f .
- Β. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f .
- Γ. Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f .

1. Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων όπως γνωρίζουμε.

2. Αν $g(x) = -f(x)$ τότε δημιουργούμε τη συμμετρική της C_f ως προς τον x' .

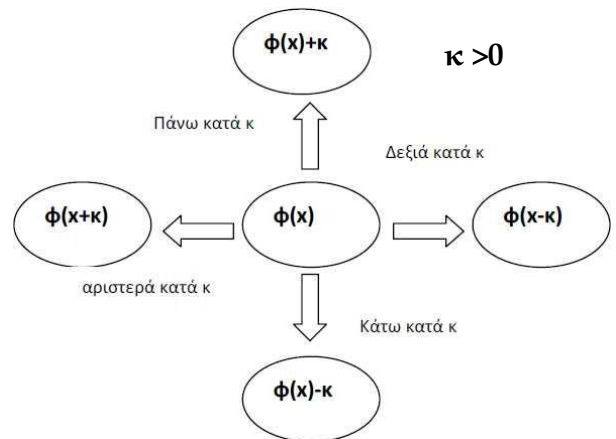
3. Αν $g(x) = |f(x)|$ τότε αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον x' και από τα συμμετρικά ως προς τον άξονα x' των τμημάτων της C_f που δεν βρίσκονται πάνω απ' αυτόν.

3. Αν $g(x) = f(x) + \kappa$ τότε μετατοπίζουμε τη C_f

- κατά κ μονάδες προς τα πάνω αν $\kappa > 0$,
- κατά κ μονάδες προς τα κάτω αν $\kappa < 0$.

4. Αν $g(x) = f(x + \kappa)$ τότε μετατοπίζουμε τη C_f

- κατά κ μονάδες δεξιά αν $\kappa < 0$,
- κατά κ μονάδες αριστερά αν $\kappa > 0$.



5. Σε συναρτήσεις με απόλυτα απαλλάσσουμε τα απόλυτα και δημιουργούμε πολύκλαδη.

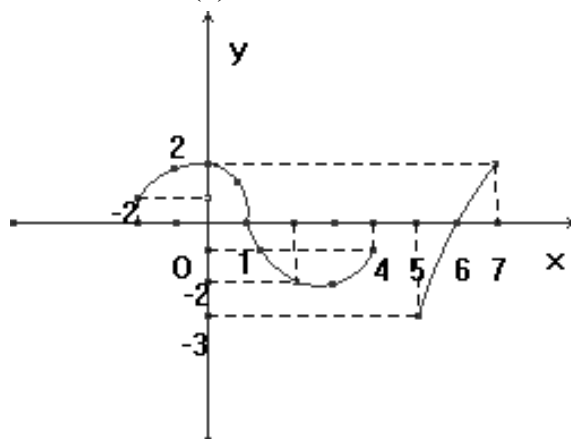
Παράδειγμα1: Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + 2, \quad f(x) = \ln(x+1), \quad f(x) = |x+1| + |x-1|$$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

4-1. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

- i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A .
- ii) Να βρεθεί το σύνολο τιμών $f(A)$.
- iii) Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- iv) Για ποιες τιμές του x ισχύει $f(x) \geq 0$.



Λύση

- i) Οι τετμημένες των σημείων της C_f ανήκουν στο σύνολο $(-2, 4] \cup [5, 7)$. Άρα $A = (-2, 4] \cup [5, 7)$.
- ii) Οι τεταγμένες των σημείων της C_f ανήκουν στο σύνολο $[-3, 2]$. Άρα $A = [-3, 2]$.
- iii) Η C_f τέμνει τον άξονα x' στα σημεία με τετμημένες 1 και 6. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 6.
- iv) Η C_f είναι πάνω από τον άξονα x' ή τον συναντά για $x \in [-2, 1] \cup [6, 7]$, για τα οποία ισχύει $f(x) \geq 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

4-2. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

$$\text{i) } f(x) = \frac{|x|}{x} + 1, \text{ ii) } f(x) = x|x|, \text{ iii) } f(x) = \begin{cases} -x+3 & , \quad x < 1 \\ x+1 & , \quad x \geq 1 \end{cases} \quad \text{iv) } f(x) = |\ln x|.$$

Και από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο των τιμών της f σε καθεμία περίπτωση.

4-3. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^2, g(x) = x^2 + 1, h(x) = (x-2)^2, k(x) = (x-2)^2 + 1.$$

4-4. Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

$$f(x) = \begin{cases} 4x+2, & x < 0 \\ 2x-1, & x \geq 0 \end{cases} \quad g(x) = 3|x-1|+1, \quad h(x) = \begin{cases} 2-2x, & 0 \leq x < 2 \\ -2, & x \geq 2 \end{cases}.$$

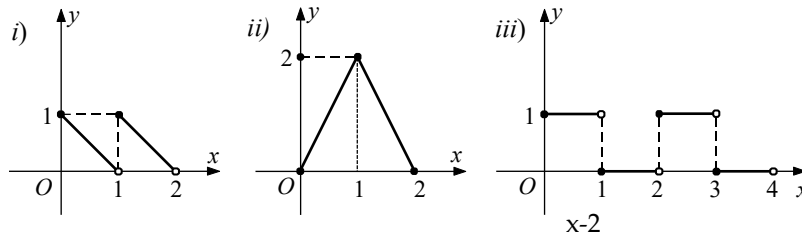
4-5. Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x) = \frac{x+1}{x^2-12x^2+48x-64}$ και $g(x) = \frac{2x-3}{x^2-8x+16}$.

4-6. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2-12x^2+48x-64}{x^2-8x+16}$.

4-7. Αν $f(x) = \begin{cases} |2x-1|, & x \geq 1 \\ -x, & x < 1 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 3x, & x \geq 0 \\ -4x-3, & x < 0 \end{cases}$, να χαράξετε τη γραφική παράσταση της

συνάρτησης $f \circ g$ και μετά να βρείτε το σύνολο τιμών της.

4-8. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι:



4-9. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$.

4-10. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις: $f(x) = \frac{|x+1| + |x-1|}{2}$, $f(x) = \frac{\eta\mu x + |\eta\mu x|}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$.

1. ΤΙΜΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΗ ΘΕΣΗ x_0 : $f(x_0)$

1. Βρίσκω το πεδίο ορισμού.

2. Απλοποιώ τον τύπο.

3. Θέτω στον τύπο x το x_0 , αν $x_0 \in D_f$.

i) Αν $x_0 \notin D_f$ τότε δεν ορίζεται το $f(x_0)$.

ii) Σε περίπτωση πολλαπλού τύπου εκτιμώ αρχικά σε ποιο διάστημα ανήκει το x_0 και κάνω αντικατάσταση στον αντίστοιχα κλάδο. (Όχι και στους δύο).

4. Αν το σημείο $A(x_0, y_0) \in C_f$ τότε $f(x_0) = y_0$

Παρατήρηση: Για να βρω ένα τυχαίο σημείο στη C_f θέτω στο x μια τυχαία τιμή και βρίσκω το αντίστοιχα y . Π.χ. $x = 3$ $f(3)$. Άρα το σημείο $(3, f(3))$

Παράδειγμα 1: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & | x^2-1, x \leq 1 \end{cases}$. Να βρεθούν οι τιμές: $f(2), f(0), f(\text{συνα})$.

Παράδειγμα 2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x-2 & | x-2, 1 < x \leq 2 \\ 1+x & | x > 2 \end{cases}$. Να βρεθούν οι τιμές: $f(3), f(-2), f(\text{συνα})$.

Παράδειγμα 3: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$. Να δειχθεί ότι ισχύει η ισότητα

$$f(\alpha) + f(\beta) = f\left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}\right).$$

Παράδειγμα 4: Να βρεθεί ο λ ώστε το σημείο $A(\lambda^2 - \lambda, \lambda^2 - 1)$ να είναι τομή των ευθειών

$$\varepsilon_1: 5x - 2y - 4 = 0 \text{ και } \varepsilon_2: 3x + 4y - 18 = 0.$$

Παράδειγμα 5: Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln(\alpha + x)}{\ln(\beta + x)}$, όταν έχει ρίζα το -8 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

5-1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in [1, 3) \\ -x - 1, & \text{αν } x \in [3, 5] \end{cases}$. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$K = f(2) - f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 2f(4).$$

Λύση

- Επειδή $1 < 2 < 3$ είναι $f(2) = 2^2 = 4$.
- Επειδή $3 < 4 < 5$ είναι $f(4) = -4 - 1 = -5$.
- Επειδή $1 < 3 \leq 3$ θα είναι και $\frac{1}{2} < \frac{3}{2} < 3$ ή $1 < \sqrt{\frac{3}{2}} < \sqrt{3} < 3$, οπότε $f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = \frac{3}{2}$.

$$\text{Άρα } K = 4 - \frac{3}{2} + 2(-5) = 4 - \frac{3}{2} - 10 = -6 - \frac{3}{2} = -\frac{15}{2}.$$

5-2. Αν $f(x) = xf(x+1)$ και $f(1) = 6$, τότε το $f(4)$ ισούται με:

- Α. $\frac{1}{3}$ Β. 1 Γ. $\frac{4}{3}$ Δ. 2 Ε. 3

Λύση

- Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 1 \cdot f(2)$.
- Για $x = 2$ έχουμε $f(2) = 2 \cdot f(3)$.
- Για $x = 3$ έχουμε $f(3) = 3 \cdot f(4)$.

$$\text{Οπότε } f(1) = 1 \cdot f(2) = 1 \cdot 2 \cdot f(3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot f(4) \Leftrightarrow f(1) = 6 \cdot f(4) \Leftrightarrow f(4) = \frac{f(1)}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Άρα η σωστή απάντηση είναι η Β.

5-3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ και οι αριθμοί k, λ τέτοιοι ώστε $k + \lambda = 1$ και $k\lambda > 0$. Να αποδειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα $f(kx + \lambda y) \leq kf(x) + \lambda f(y)$.

Λύση

Έχουμε ισοδύναμα:

$$f(kx + \lambda y) \leq kf(x) + \lambda f(y) \Leftrightarrow (kx + \lambda y)^2 + \alpha(kx + \lambda y) + \beta \leq k(x^2 + \alpha x + \beta) + \lambda(y^2 + \alpha y + \beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2x^2 + \lambda^2y^2 + 2k\lambda xy + \alpha kx + \alpha \lambda y + \beta \leq kx^2 + \lambda y^2 + \alpha kx + \alpha \lambda y + k\beta + \lambda \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2x^2 + \lambda^2y^2 + 2k\lambda xy + \beta \leq kx^2 + \lambda y^2 + k\beta + \lambda \beta$$

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο δεύτερο μέλος

$$kx^2 - k^2x^2 + \lambda y^2 - \lambda^2y^2 - 2k\lambda xy + k\beta + \lambda \beta - \beta \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow kx^2(1-k) + \lambda y^2(1-\lambda) - 2k\lambda xy + (k+\lambda)\beta - \beta \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$k\lambda x^2 + k\lambda y^2 - 2k\lambda xy + \beta - \beta \geq 0 \quad || k = 1 - \lambda, \lambda = 1 - k$$

$$\Leftrightarrow k\lambda(x^2 + y^2 - 2xy) \geq 0 \quad || \text{παράγοντοποίηση}$$

$$k\lambda(x-y)^2 \geq 0$$

Ισχύει, γινόμενο μη αρνητικών αριθμών.

5-4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x}{\beta x}$. Να υπολογιστεί το $\alpha + \beta$ αν γνωρίζετε ότι η C_f

διέρχεται από τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2, 2)$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $f(1) = \frac{1+\alpha}{\beta}$ και $f(2) = \frac{4+2\alpha}{2\beta} = \frac{2+\alpha}{\beta}$.

Όμως $f(1) = 1$ και $f(2) = 2$, οπότε

$$\left(\frac{1+\alpha}{\beta} = 1 \text{ και } \frac{2+\alpha}{\beta} = 2 \right) \Leftrightarrow (\alpha + 1 = \beta \text{ και } \alpha + 2 = 2\beta) \Leftrightarrow (\alpha = \beta - 1 \text{ και } \alpha = 2\beta - 2). \text{ Άρα}$$

$$\beta - 1 = 2\beta - 2 \Leftrightarrow \beta = 1. \text{ Επομένως } \alpha + 1 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0. \text{ Και τότε θα είναι } \alpha + \beta = 0 + 1 = 1.$$

5-5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$.

i) Ποια σχέση συνδέει τους α, β και γ αν:

α. Το σημείο $(1, 2)$ ανήκει στη C_f .

β. Το σημείο $(1, 2)$ είναι η κορυφή της C_f .

γ. Η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 3)$.

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση που ικανοποιεί και τις τρεις προηγούμενες συνθήκες.

Λύση

i) α. Το σημείο $(1, 2) \in C_f$ αν και μόνο αν $f(1) = 2 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 2$. (1)

β. Ο τύπος της f ισοδύναμα γράφεται $f(x) = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$ (Α' ΛΥΚΕΙΟΥ)

Η C_f είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) \right)$. Επομένως είναι $\left(-\frac{\beta}{2\alpha} = 1 \text{ και } f(1) = 2 \right) \Leftrightarrow (2\alpha + \beta = 0 \text{ και } \alpha + \beta + \gamma = 2)$.

γ. Η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, f(0))$, άρα θα ισχύει $f(0) = 3 \Leftrightarrow \gamma = 3$.

ii) Ισχύουν συγχρόνως $(\alpha + \beta + \gamma = 2 \text{ και } 2\alpha + \beta = 0 \text{ και } \gamma = 3) \Leftrightarrow (\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 3)$.

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

5-6. Αν $f(x) = x^3 - 3x$, να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$.

5-7. Αν $\varphi(t) = t^2 - 5t + 6$, να υπολογίσετε τις τιμές $\varphi(0)$ και $\varphi(1)$. Για ποιες τιμές του t είναι $\varphi(t) = 0$

5-8. Αν $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$ και $f(e)$.

5-9. Αν $h(\theta) = \sin \theta - \eta \mu \theta$, να υπολογίσετε τις τιμές $h(0)$ και $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Για ποιες τιμές της γωνίας $\theta \in [0, 2\pi]$

είναι $h(\theta) = 0$;

5-10. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \varepsilon \varphi x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$.

Να υπολογίσετε τις τιμές: $f\left(-\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(-\frac{\pi}{3}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(0)$.

5-11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & x \leq 1 \\ 63x, & x > 1 \end{cases}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β. Να βρείτε τις τιμές $f(0), f(-1), f(1), f(2)$

γ. Να λύσετε της εξίσωση $f(x) = 0$

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$.

5-12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2-1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β. Να βρείτε τις τιμές $f(0), f(2)$

γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες είναι $f(x) = -\frac{5}{8}$

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$

ε. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

στ. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

5-13. Αν $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$, να δείξετε ότι $f(x) + f(-x) = 1$.

5-14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{x-1}, & x \neq 1 \\ \alpha^2 - 3, & x = 1 \end{cases}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β. Να υπολογίσετε το α ώστε $f(-1) = f(1)$

5-15. Για τις συναρτήσεις $f(x)$ να αποδειχθούν οι αντίστοιχες ισότητες

A. αν $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{3x+1}$ τότε $f(x+2) + f(x) = 2f(x+1)$.

B. αν $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{2x-3}$ τότε $f(f(x)) = x$.

Γ. αν $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ τότε $f\left(\alpha + \beta\right) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{1 + f(\alpha)f(\beta)}$.

5-16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4\alpha x}{\alpha^2 x^2 + 1}, \alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και στη

συνέχεια να βρείτε τις τιμές του α έτσι ώστε η τιμή της f στο 1 να είναι ίση με 2.

5-17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta + \sqrt{4-x^2}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

β. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(-2, -2)$ και $B(2, 2)$, να βρείτε το σημείο στο οποίο η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$.

5-18. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$, $B(1, 0)$ και $\Gamma(2, 1)$.

α. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ .

β. Να σχεδιάσετε την παραβολή.

γ. Αν f είναι η συνάρτηση με γραφική παράσταση την παραπάνω παραβολή, να βρείτε τη συνάρτηση g που έχει γραφική παράσταση την ευθεία AB .

5-19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (2-\alpha)x^2 - (\alpha+3)x + \alpha^2 - 5$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του α , έτσι ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $M(1, -6)$

ii. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(1, -6)$, να βρεθούν τα κοινά σημεία της C_f και του άξονα $x'x$.

5-20. Αν $f(x) = \alpha|x^2 - 1| - \beta|x + 3|$ να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(-1, 4)$.

5-21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda - 1)x^2 + 2(\lambda + 1)x + \lambda + 5$ με $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η γραφική παράσταση της f

α. να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακριβώς σημεία,

β. να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

ii. Να αποδειχθεί ότι όταν το λ διατρέχει το $\mathbb{R} - \{1\}$, τότε η C_f διέρχεται από ένα σταθερό σημείο.

2. Γεωμετρικοί Τόποι

A. Γεωμετρικός τόπος σημείου τομής καμπυλών

1. Λύνω το σύστημα των εξισώσεων των δύο γραμμών και γράφω το σημείο τομής

2. Θέτω x την τετμημένη και y την τεταγμένη και απαλοίφω την παράμετρο

3. Ο γ.τ. είναι η γραμμή που θα προκύψει (Προσοχή στους πιθανούς περιορισμούς της παραμέτρου)

Παράδειγμα 6. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων τομής των ευθειών $y = \alpha x - 2\alpha + 1$, $y = (\alpha - 1)x - 3\alpha + 3$

B. Γεωμετρικός τόπος κορυφής παραβολής

1. Βρίσκω τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής από τον τύπο $K \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha} \right)$

2. Θέτω x την τετμημένη και y την τεταγμένη και απαλοίφω την παράμετρο.

3. Ο γ.τ. είναι η γραμμή που θα προκύψει (Προσοχή στους πιθανούς περιορισμούς της παραμέτρου)

Παράδειγμα 7. Να βρεθεί ο γ.τ. των κορυφών των παραβολών $y = x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 1$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

5-22. Ναδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία οι παραβολές

$$y = (1 - \lambda)x^2 + (5\lambda - 4)x + 3 - 4\lambda.$$

Λύση

Για $\lambda = 1$ είναι $y = x - 1$ και για $\lambda = 0$ είναι $y = x^2 - 4x + 3$. Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}. \text{ Έχουμε δύο σημεία τομής } \Sigma(1, 0) \text{ και } P(4, 3).$$

Εξετάζουμε αν οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν τη γενική εξίσωση:

$$\Sigma(1, 0): 0 = (1 - \lambda) \cdot 1 + (5\lambda - 4) \cdot 1 + 3 - 4\lambda, 0 = 0 \text{ ισχύει.}$$

$$P(4, 3): 3 = (1 - \lambda) \cdot 16 + (5\lambda - 4) \cdot 4 + 3 - 4\lambda \Leftrightarrow 3 = 16 - 16\lambda + 20\lambda - 16 + 3 - 4\lambda, 3 = 3 \text{ ισχύει.}$$

Έτσι τα σημεία $\Sigma(1, 0)$ και $P(4, 3)$ είναι δύο σταθερά σημεία από τα οποία διέρχονται οι παραβολές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

5-23. Ναδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχεται από σταθερό σημείο του επιπέδου η παραβολή:

$$y = (2\lambda + 5)x^2 + 2(6\lambda + 13)x + 18\lambda + 42.$$

5-24. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_\alpha(x) = (\alpha - 1)x^2 + \alpha x - 2(\alpha - 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. Ποια είναι η απόσταση d των σημείων αυτών;

5-25. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων τομής των παραβολών $y = x^2 + x + \alpha + 2$, $y = x^2 - x + 3\alpha + 8$

5-26. Να βρεθεί ο γ.τ. των κορυφών των παραβολών $y = x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 1$

Δύο συναρτήσεις είναι ίσες όταν έχουν

- Το ίδιο πεδίο ορισμού ΚΑΙ
- Τον ίδιο τύπο (*)

(Αν το ένα πεδίο ορισμού είναι υποσύνολο του άλλου π.χ. $D_f \subseteq D_g$ τότε μπορεί στο υποσύνολο να οριστεί ισότητα).

Για να αποδείξω ότι είναι ίσες

- Βρίσκω τα D_f, D_g
- Αν $D_f = D_g$ ή $(D_f \subseteq D_g)$ αποδεικνύω ότι $f(x) = g(x)$ είτε με ισοδυναμία είτε με ευθεία απόδειξη (κάνουμε πράξεις στον συνθετότερο τύπο της μιας συνάρτησης και βρίσκουμε τον τύπο της άλλης).

Παράδειγμα1: Να βρεθεί το διάστημα στο οποίο οι συναρτήσεις είναι ίσες:

$$f(x) = \sqrt{(x-1)(2-x)} \text{ και } g(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{2-x}.$$

Παράδειγμα2: Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων και το διάστημα στο οποίο είναι ίσες οι

$$\text{συναρτήσεις } f(x) = \frac{x-3\lambda-1}{x^2-(2\lambda+1)x+\lambda^2+\lambda} \text{ και } g(x) = \frac{(\lambda-1)x^2+x-4}{x^2-3x+\lambda+1}.$$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

6-1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x^2$ και $g(x) = 2 \ln x$.

- Να εξετάσετε αν η f και η g είναι ίσες.
- Αν $f \neq g$ να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

Λύση

Για την f πρέπει: $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$. Η g έχει πεδίο ορισμού το $B = (0, +\infty)$. Επειδή $A \neq B$ οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες.

ii) Για κάθε $x \in B$ είναι $f(x) = 2 \ln x = g(x)$.

Άρα το ζητούμενο σύνολο είναι το B .

6-2. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\lambda(2\lambda+1)}{x-\lambda+2}$ και $g(x) = \frac{(3\lambda-1)x+\lambda}{x+\lambda}$, να είναι ίσες.

Λύση

Επειδή οι συναρτήσεις είναι ρητές και πρέπει να έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, οι παρονομαστές θα έχουν την ίδια ρίζα. Δηλαδή είναι: $\lambda-2 = -\lambda \Leftrightarrow 2\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

Τότε στο σύνολο $\mathbb{R} - \{1\}$ έχουμε $f(x) = \frac{(2x+1)}{x+1}$ και $g(x) = \frac{2x+1}{x+1}$, οπότε οι συναρτήσεις f και g είναι

ίσες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

6-3. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f=g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x)=g(x)$.

$$\text{i) } f(x)=\sqrt{x^2} \text{ και } g(x)=(\sqrt{x})^2 \quad \text{ii) } f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+|x|} \text{ και } g(x)=1-\frac{1}{|x|} \quad \text{iii) } f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \text{ και } g(x)=\sqrt{x}+1.$$

6-4. i. Να αποδείξετε ότι $(\sqrt{x+4}+\sqrt{x})(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})=4, x \geq 0$.

ii. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}$ και $g(x) = \sqrt{x+4}-\sqrt{x}$

6-5. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ώστε οι συναρτήσεις f, g με

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} \text{ και } g(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{x+2} \text{ να είναι ίσες.}$$

(*)Εάν δυο συναρτήσεις έχουν διαφορετικές αναλυτικές εκφράσεις (τύπους) είναι πάντα διαφορετικές;
Απάντηση
Όχι απαραίτητως. Π.Χ
 $f(x) = 3x / \{-1, 0, 1\}$
 $g(x) = 3x^3 / \{-1, 0, 1\}$
Ισχύει: $f = g$, ενώ οι αναλυτικές εκφράσεις είναι διαφορετικές.

7 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Πράξεις Συναρτήσεων

- Βρίσκω D_f, D_g

α. Αν $D_f = D_g = A$

β. Αν $D_f \neq D_g$ τότε βρίσκω το κοινό πεδίο ορισμού $A = D_f \cap D_g$ και έχω

- $D_{f+g} = A \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $D_{f-g} = A \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $D_{f \cdot g} = A \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $D_{(\lambda f)} = A \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
- $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in A : g(x) \neq 0\}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
- $D_{\sqrt{f}} = \{x \in A : f(x) \geq 0\}, (\sqrt{f})(x) = \sqrt{f(x)}$

Πριν κάνω αντικατάσταση στους τύπους ίσως βολεύει να απλοποιήσω τους τύπους για ευκολότερες πράξεις.

Παράδειγμα1: Δίνονται οι συναρτήσεις f και g . Να γίνουν οι αντίστοιχες πράξεις στο κοινό πεδίο ορισμού: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$, $g(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2} : f+g, f:g$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

7-1. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ και $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$ και $\frac{f}{g}$.

Λύση

Για την f πρέπει $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [0, +\infty)$.

Η g έχει πεδίο ορισμού το $B = \mathbb{R} - \{2\}$.

- Η συνάρτηση $f+g$ έχει πεδίο ορισμού το $\Gamma = A \cap B = [0, 2) \cup (2, +\infty)$. Για κάθε $x \in \Gamma$ είναι

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{e^x - 1} + \frac{x-1}{x-2}.$$

- Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού το $\Delta = A \cap B - \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\}$. Είναι

$$g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1. \text{ Άρα } \Delta = [0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty). \text{ Για κάθε } x \in \Delta \text{ είναι}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{\frac{x-1}{x-2}} = \frac{(x-2)\sqrt{e^x - 1}}{x-1}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

7-2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, fg και $\frac{f}{g}$.

7-3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ και $g(x) = \frac{x^2-4}{x-3}$.

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων

β. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f+g$;

γ. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $\frac{f}{g}$ και $\frac{g}{f}$

δ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ παίρνει θετικές τιμές.

7-4. Αν $f(x)=3x^2-2x-1$ και $g(x)=2x-1$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$.

7-5. Αν $f(x)=4x+6$, $g(x)=x+1$ τότε να βρείτε τις συναρτήσεις:

$$f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}, \frac{g(x)}{f(x)}.$$

7-6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu 2x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ με $x \in [0, \pi]$. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ και στη συνέχεια να ορίσετε τις συναρτήσεις:

α. τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$ και $f \cdot g$

β. τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$ και να απλοποιήσετε τον τύπο της

γ. τη συνάρτηση $\frac{g}{f}$.

7-7. Ομοίως για τις συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ και $g(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

2. Πράξεις Σε Πολύκλαδες Συναρτήσεις

Κατασκευάζω πίνακα τιμών των συναρτήσεων στα διαστήματα ορισμού.

1. Στην πρώτη γραμμή τοποθετώ τα άκρα των διαστημάτων ορισμού.

2. Στη δεύτερη και στη Τρίτη τους αντίστοιχους τύπους.

3. Στην τελευταία γραμμή την αντίστοιχη πράξη.

Παράδειγμα2: Δίνονται οι συναρτήσεις f και g . Να οριστούν τα αντίστοιχα αθροίσματα αυτών:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} 3-x, & x \leq 3 \\ 1+2x, & 3 < x \end{cases}.$$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

7-8. Να βρεθεί η συνάρτηση $f+g$, όταν $f(x)=\begin{cases} 2, & x > 0 \\ x+2, & x \leq 0 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} |x|^2, & x > 0 \\ 3x, & x \leq 0 \end{cases}$.

Λύση

Οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$. Άρα και η $f+g$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για να βρούμε τον τύπο της συνάρτησης $f+g$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις $x > 0$ και $x \leq 0$. Σε κάθε περίπτωση προσθέτουμε τους αντίστοιχους τύπους των f και g .

- Για $x > 0$ είναι $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2 + x^2$.
- Για $x \leq 0$ είναι $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + 2 + 3x = 4x + 2$.

$$\text{Συνοψίζοντας έχουμε: } (f+g)(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x > 0 \\ 4x + 2, & x \leq 0 \end{cases}.$$

7-9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases} x-1, & x \leq 0 \\ 2x+1, & x > 0 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} 3-x, & x < 1 \\ -x-1, & x \geq 1 \end{cases}$. Να βρεθεί η τιμή της

$$\text{παράστασης } K = (f+g)(2) + (f \cdot g)(0).$$

Λύση

$$\text{Είναι } K = f(2) + g(2) + f(0) \cdot g(0) = (2 \cdot 2 + 1) + (-2 - 1) + (0 - 1)(3 - 0) = (4 + 1) + (-3) + (-1) \cdot 3 = 5 - 3 - 3 = -1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

7-10. Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, όταν

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-3, & x > 1 \\ x+2, & x \leq 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} x^2+5, & x > 3 \\ 3x, & x \leq 3 \end{cases}.$$

8. ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Απλός τύπος

1. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

- Βρίσκω D_f, D_g και $D_{f \circ g}$. $x \in D_{f \circ g} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_g \\ \text{και} \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \dots \text{Αν } D_{f \circ g} \neq \emptyset \text{ τότε}$
- Βρίσκω τον τύπο $f(g(x))$.

2. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

- Βρίσκω D_f, D_g και $D_{g \circ f}$. $x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ \text{και} \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \dots \text{Αν } D_{g \circ f} \neq \emptyset \text{ τότε}$
- Βρίσκω τον τύπο $g(f(x))$.

Παράδειγμα 1: $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x-2}$. Βρες $(g \circ f)(x)$.

Γενικά: $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

Παρατήρηση: Αν $D_f = \mathbb{R}$ τότε $D_{f \circ g} = D_g$ και αν $D_g = \mathbb{R}$ τότε $D_{g \circ f} = D_f$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

8-1. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^x - x$ και $g(x) = \frac{3x}{x-2}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις

i) $f \circ g$ ii) $g \circ g$.

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$, ενώ η g το $B = \mathbb{R} - \{2\}$.

i) Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το B .

Για κάθε $x \in B$ είναι $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{3x}{x-2}\right) = e^{\frac{3x}{x-2}} - \frac{3x}{x-2}$.

ii) Η $g \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το $B' = \{x \in B / g(x) \in B\}$.

Είναι $\begin{cases} x \in B \\ g(x) \in B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \frac{3x}{x-2} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -4 \end{cases}$. Άρα $B' = \mathbb{R} - \{2, -4\}$. Για κάθε $x \in B'$ είναι

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{3x}{x-2}\right) = \frac{3 \cdot \frac{3x}{x-2}}{\frac{3x}{x-2} - 2} = \frac{9x}{x-4}.$$

8-2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 2x + 2$ και $g(x) = -x^2 + 2x$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ (1) δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Επειδή οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$. Είναι

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^2 + 2g(x) + 2 = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 2$$

και

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -[f(x)]^2 + 2f(x) = -x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x$$

Οπότε η σχέση (1) γίνεται $2[x^4 + (2x+1)^2] = 0$.

Η τελευταία εξίσωση δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$ αφού

$$x^4 + (2x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ και } 2x+1=0) \Leftrightarrow \left(x=0 \text{ και } x=-\frac{1}{2}\right) \text{ που είναι αδύνατο.}$$

8-3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$.

i) Να αποδειχθεί ότι $f(x) + f(1-x) = 1$.

ii) Με την βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος να βρεθεί το

$$\text{άθροισμα } f\left(\frac{1}{2000}\right) + f\left(\frac{2}{2000}\right) + f\left(\frac{3}{2000}\right) + \dots + f\left(\frac{1999}{2000}\right).$$

Λύση

$$i) \text{ Είναι } f(x) + f(1-x) = \frac{9^x}{9^x + 3} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x} + 3} = \frac{9^x}{9^x + 3} + \frac{\frac{9}{9^x}}{\frac{9}{9^x} + 3} = \frac{9^x}{9^x + 3} + \frac{3}{9^x + 3} = 1.$$

ii) Εφαρμόζοντας την προηγούμενη σχέση για τις τιμές $\frac{1}{2000}, \frac{2}{2000}, \frac{3}{2000}$ κ.λπ. έχουμε

$$f\left(\frac{1}{2000}\right) + f\left(\frac{1999}{2000}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{2}{2000}\right) + f\left(\frac{1998}{2000}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{3}{2000}\right) + f\left(\frac{1997}{2000}\right) = 1$$

.....

$$f\left(\frac{999}{2000}\right) + f\left(\frac{1001}{2000}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{1000}{2000}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε} \\ f\left(\frac{1}{2000}\right) + f\left(\frac{2}{2000}\right) + f\left(\frac{3}{2000}\right) + \dots + f\left(\frac{1999}{2000}\right) = (1 + 1 + \dots + 1) + \frac{1}{2} = 999 + \frac{1}{2} = 999,5.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

8-4. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους : $f(x) = \ln(x+1)$ και $g(x) = \sqrt{4-|x|}$. Να οριστούν οι συναρτήσεις:

$$f+g, \frac{f}{g}, f \circ g.$$

8-5. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$, αν

$$i) f(x) = x^2 \text{ και } g(x) = \sqrt{x}, \quad ii) f(x) = \eta \mu x \text{ και } g(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad iii) f(x) = \frac{\pi}{4} \text{ και } g(x) = \epsilon \phi x.$$

8-6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

8-7. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, εφόσον ορίζονται, σε καθεμία από τις περιπτώσεις:

$$i. f(x) = \sqrt{1-x}, g(x) = \ln(x-1) \quad ii. f(x) = \sqrt{3-4x^2}, g(x) = \sin x.$$

8-8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x-1, x \in [-3, 3]$ και $g(x) = 5-2x, x \in [3, 7]$. Να ορισθούν οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

$$8-9. \text{ Αν } f(x) = \eta \mu x + \sin x \text{ και } g(x) = \sqrt{x^2 + 2}, \text{ να βρείτε τον αριθμό } (g \circ f)\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

2. Πολλαπλός τύπος

- Συμβολίζω $f_1, f_2, \dots$ τους κλάδους της f .
- Συμβολίζω $g_1, g_2, \dots$ τους κλάδους της g .
- Βρίσκω τις συνθέσεις $f_1 \circ g_1, f_1 \circ g_2, f_2 \circ g_1, f_2 \circ g_2, \dots$ (πεδίο ορισμού και τύπους όπως στη Σ23).
- Γράφω τον τύπο της $(f \circ g)(x)$.

$$f \begin{cases} f_1 \begin{cases} g_1 \rightarrow f_1 \circ g_1 \\ g_2 \rightarrow f_1 \circ g_2 \end{cases} \\ f_2 \begin{cases} g_1 \rightarrow f_2 \circ g_1 \\ g_2 \rightarrow f_2 \circ g_2 \end{cases} \end{cases}.$$

Παράδειγμα2: Να βρεθεί η σύνθεση της συνάρτησης g με την f ($f \circ g$).

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & 4 < x < 6 \\ x-2, & 6 \leq x < 8 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x+1, & 2 < x < 4 \\ x-1, & 4 \leq x < 7 \end{cases}.$$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

8-10. Έστω $f(x) = |x-1|$ και $g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$. Να βρεθεί η $(f \circ g)(x)$.

Λύση

$$\text{Είναι } f(x) = \begin{cases} -x+1 = f_1(x), & A_1 = (-\infty, 1) \\ |x-1| = f_2(x), & A_2 = [1, +\infty) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} = g_1(x), & B_1 = (-\infty, 0) \\ \ln x = g_2(x), & B_2 = (0, +\infty) \end{cases}.$$

Θα πάρουμε για τις συνθέσεις τους συνδυασμούς ανά δύο.

$f \circ g$: Πεδίο ορισμού $B' = \{x \in B \mid g(x) \in A\}$ και έχουμε 4 περιπτώσεις.

$f_1 \circ g_1$: $B'_1 = \{x \in B_1 \mid g_1(x) \in A_1\} = \{x \leq 0 \mid \sqrt{1-x} < 1\}$. Λύνω ξεχωριστά $\sqrt{1-x} < 1 \Leftrightarrow 1-x < 1 \Leftrightarrow x > 0$ και

αφού οι $x \leq 0, x > 0$ δεν συναληθεύουν δεν ορίζεται η $f_1 \circ g_1$.

$f_2 \circ g_1$: $B'_2 = \{x \in B_1 \mid g_1(x) \in A_2\} = \{x \leq 0 \mid \ln x < 1\}$. Λύνω ξεχωριστά $\ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$. Οπότε $B'_2 = (0, e)$.

$$f_2(g_1(x)) = -g_1(x) + 1 = -\ln x + 1.$$

$f_1 \circ g_2$: $B'_3 = \{x \in B_2 \mid g_2(x) \in A_1\} = \{x > 0 \mid \sqrt{1-x} \geq 1\}$. Λύνω ξεχωριστά $\sqrt{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow 1-x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Οπότε $B'_3 = (-\infty, 0]$. $f_1(g_2(x)) = g_2(x) - 1 = \sqrt{1-x} - 1$.

$f_2 \circ g_2$: $B'_4 = \{x \in B_2 \mid g_2(x) \in A_2\} = \{x > 0 \mid \ln x \geq 1\}$. Λύνω ξεχωριστά $\ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e$. Οπότε $B'_4 = [e, +\infty)$.

$$f_2(g_2(x)) = g_2(x) - 1 = \ln x - 1.$$

$$\text{Τελικά είναι } f(g(x)) = \begin{cases} \sqrt{1-x} - 1, & x \in (-\infty, 0] \\ -\ln x, & x \in (0, e) \\ \ln x - 1, & x \in [e, +\infty) \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

8-11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} |x^2-1|, & \text{αν } x < 2 \\ |x+1|, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} |x^2-x|, & \text{αν } x < 3 \\ |2x|, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$. Να ορίσετε τη

συνάρτηση $f \circ g$.

3. Πεδίο Ορισμού σε σύνθετη

1. Θέτω $g(x)$ την παράσταση που είναι μέσα στην παρένθεση του συμβόλου $f(\)$.

2. Βρίσκω το $D_{f \circ g} = \begin{cases} x \in D_g \\ \text{και} \\ g(x) \in D_f \end{cases}$.

Παράδειγμα3: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = f(1 - \sqrt{x^2 - 3x})$ αν $A_f = [-1, 1]$.

Παρατήρηση: Προσοχή στους περιορισμούς. Αν γράψω $f(\eta\mu x - 2)$ για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι λάθος γιατί $\eta\mu x - 2 < 0$ και δεν ανήκει στο $D_f = (0, +\infty)$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

8-12. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = (-1, 2]$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

i). $f(2x-1)$ ii). $f(x^2)$.

Λύση

i) Έστω η συνάρτηση $g(x) = 2x-1$ με πεδίο ορισμού το $B = \mathbb{R}$ και η

συνάρτηση $h(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$. Η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμού το $B' = \{x \in B / g(x) \in A\}$. Είναι $\{x \in B \mid g(x) \in A\} \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < 2x-1 \leq 2\} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{3}{2}$. Άρα η h έχει πεδίο ορισμού το $B' = \left(0, \frac{3}{2}\right]$.

ii) Έστω $x^2 = \omega$ (1) οπότε $f(x^2) = f(\omega)$. Είναι $\omega \in A \Leftrightarrow -1 < \omega \leq 2 \Leftrightarrow -1 < x^2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$. Άρα η $f(x^2)$ έχει πεδίο

ορισμού το $B = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

8-13. Αν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$ είναι το $[-2, 11]$ τότε να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x^2 - 3x + 1)$.

9 ΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ / ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΗΣ ΜΕ ΆΛΛΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Μορφοποίηση

Γενικά βλέπουμε τον τύπο της f από «έξω» προς τα μέσα και διαπιστώνουμε τις συναρτήσεις που μπορούν να συνθέσουν την f . (Μπορεί να βρούμε διαφορετικές συναρτήσεις).

Παράδειγμα1: Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων, αν

$$f(x) = \eta\mu(3x+6) \quad f(x) = \eta\mu^2(\ln x).$$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

9-1. Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων, αν

$$i). f(x) = e^{-x} \quad ii). f(x) = \sin^3(2x) + 1$$

Λύση

i) Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$ είναι σύνθεση της $h(x) = -x$ με την $g(x) = e^x$.

ii) Η συνάρτηση $f(x) = \sin^3(2x) + 1$ είναι σύνθεση της $h(x) = 2x$, $g(x) = \sin x$ και $\varphi(x) = x^3 + 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

9-2. Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων, αν

$$i) f(x) = \eta\mu(x^2+1), \quad ii) f(x) = 2\eta\mu^2 3x+1 \quad iii) f(x) = \ln(e^{2x}-1), \quad iv) f(x) = \eta\mu^2(3x).$$

2. ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΗΣ ΜΕ ΆΛΛΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ακολουθούμε τον πίνακα:

	ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ	ΕΝΕΡΓΕΙΑ
1	$f(x), g(x)$	$f \circ g$ ή $g \circ f$	Μεθοδολογία Σ23
2	$f(x), (f \circ g)(x)$ Εξωτερική και Σύνθεση	$g(x)$ Εσωτερική	Στον τύπο της f θέτω όπου x το $g(x)$, δηλ. θέτω στον τύπο της εξωτερικής όπου x την εσωτερική.
3	$g(x), (f \circ g)(x)$ Εσωτερική Σύνθεση	$f(x)$ Εξωτερική	Θέτω $\omega = g(x)$, δηλ. θέτω $\omega =$ εσωτερική και έτσι βρίσκω $f(\omega)$ και τελικά $f(x)$

Παράδειγμα2: Αν $f(g(x)) = x^2 + 4x - 2$, $f(x) = 2x - 1$ βρες $g(x)$.

Παράδειγμα3: Αν $f(g(x)) = x^2 + 2x + 2$, $g(x) = x + 1$ βρες $f(x)$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

9-3. Να βρείτε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει

$$i). (f \circ g)(x) = e^x + x^2 - 1 \text{ αν } g(x) = x - 1 \quad ii). (g \circ f)(x) = |\varepsilon\varphi x|, \text{ αν } g(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Λύση

i) Έχουμε $f(g(x)) = e^x + x^2 - 1$ δηλαδή $f(x-1) = e^x + x^2 - 1$. Έστω $\omega = x - 1 \Leftrightarrow x = \omega + 1$.

Είναι $f(\omega) = e^{\omega+1} + (\omega+1)^2 - 1 = e^{\omega+1} + \omega^2 + 2\omega$. Άρα $f(x) = e^{x+1} + x^2 + 2x$.

$$ii) \text{ Έχουμε } g(f(x)) = |\varepsilon\varphi x| \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x) - 1} = |\varepsilon\varphi x| \Leftrightarrow f^2(x) - 1 = \varepsilon\varphi^2 x \Leftrightarrow f^2(x) = 1 + \varepsilon\varphi^2 x \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f(x)| = \frac{1}{|\sin x|} \Leftrightarrow f(x) = \pm \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

Μια τέτοια συνάρτηση είναι π.χ. η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{\sin x}$.

9-4. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x^2 + x) = 2x^2 + 2x + 2$. Να βρεθεί η $f(x)$.

Λύση

Διαδοχικά έχουμε $f(x^2 + x) = 2(x^2 + x) + 2$. Θέτουμε $x^2 + x = t$, οπότε έχουμε $f(t) = 2t + 2$.

Άρα $f(x) = 2x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

9-5. Αν $g\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2 \cdot \frac{x-1}{x+1} + 5$ και $f(x^2 - 2x + 3) = 3x^2 - 6x + 7$ να βρεθεί η συνάρτηση $(f+g)(x)$.

Λύση

Θέτουμε $\frac{x-1}{x+1} = t$, οπότε για $x \neq -1$ η συνάρτηση $g\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2 \cdot \frac{x-1}{x+1} + 5$ γράφεται $g(t) = 2t + 5$. Θέτουμε

$x^2 - 2x + 3 = \omega$, οπότε για $x \neq -1$ έχουμε $3x^2 - 6x + 7 = 3(x^2 - 2x + 3) - 2 = 3\omega - 2$. Οπότε η συνάρτηση

$f(x^2 - 2x + 3) = 3x^2 - 6x + 7$ γράφεται $f(\omega) = 3\omega - 2$. Άρα $f(x) = 3x - 2$ και $g(x) = 2x + 5$, $x \neq -1$.

Οπότε $(f+g)(x) = 5x + 3$, $x \neq -1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

9-6. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει:

i) $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 2$, αν $g(x) = x + 1$.

ii) $(f \circ g)(x) = \sqrt{1+x^2}$, αν $g(x) = -x^2$.

iii) $(g \circ f)(x) = |\sin x|$, αν $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

9-7. Να βρείτε τη συνάρτηση g , τέτοια ώστε να ισχύει: $(f \circ g)(x) = x^2 + 4x - 2$, $x \in \mathbb{R}$ αν $f(x) = 2x - 1$.

9-8. Αν $f(x) = x + 3$, να βρεθεί η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ g)(x) = e^{x+1} + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9-9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x - 2$ και $(f \circ g)(x) = x^2 + x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η συνάρτηση f .

9-10. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(x-1) = x^2 - 7x + 12$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

9-11. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(3x+2) = 9x^2 - 3x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

9-12. Να βρείτε τη συνάρτηση f , τέτοια ώστε να ισχύει: $(f \circ g)(x) = x^2 + 5x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ αν $g(x) = x - 2$.

9-13. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(x+1) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x) + f(1+x) = 2(x^2 + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Σε αρκετές μεθοδολογίες θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο **συναρτησιακή σχέση**.

Συνήθως οι συναρτήσεις δίνονται με τον τύπο τους και το πεδίο ορισμού τους. Λέμε, για παράδειγμα, δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

Μας είναι γνωστό ότι για κάθε τιμή των θετικών $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει: $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$

Αυτή η ιδιότητα με το σύμβολο της συνάρτησης f γράφεται $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και λέμε ότι αποτελεί μια **συναρτησιακή σχέση της f** .

10 ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ: ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ)

Αν μας δίνει μια σχέση ανάμεσα στην $f(x)$ και σε κάποια σύνθετη π.χ. $f(-x)$ και μας ζητάει τον τύπο της f τότε θέτω στη θέση του x μια κατάλληλη παράσταση ώστε να ανταλλάξουν τα εσωτερικά στις παραπάνω σχέσεις και στη συνέχεια απαλοίφω ένα από τα δύο και μένει ο τύπος της f

Παράδειγμα1: Έχω $f(x+1)$, $f(1-x)$. Θέτω $x \rightarrow -x$, οπότε γίνονται αντίστοιχα $f(-x+1)$, $f(1-(-x)) = f(1+x)$.

Παράδειγμα2: Αν $f(1+x) + 2f(1-x) = 5x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρεις τον τύπο της f .

Παράδειγμα3: Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + 1$, όταν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $f(x+1) - 2f(x-1) = x^2 - 8x + 6$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

10-1. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x-3) - 2f(1-x) = x^2 - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1).

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

Λύση

Έστω $x-3 = y \Leftrightarrow x = y+3$. Για $x = y+3$ η (1) γίνεται

$$f(y) - 2f(-y-2) = y^2 + 4y + 3, y \in \mathbb{R} \text{ η' } f(x) - 2f(-x-2) = x^2 + 4x + 3, x \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Θέτουμε στη (2) όπου x το $-x-2$ και έχουμε $f(-x-2) - 2f(x) = x^2 - 1$ η' $f(-x-2) = 2f(x) + x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Οπότε η (2) γίνεται } f(x) - 2(2f(x) + x^2 - 1) = x^2 - 4x + 3 \text{ η' } f(x) = -x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}.$$

10-2. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $2f(x) + 3f(1-x) = 4f(0) - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

Λύση

Θέτουμε στη σχέση $2f(x) + 3f(1-x) = 4f(0) - x$ (1) όπου x το $1-x$ και

$$\text{έχουμε } 2f(1-x) + 3f(x) = 4f(0) - 1 + x.$$

$$\text{Από το σύστημα } \begin{cases} 2f(x) + 3f(1-x) = 4f(0) - x \\ 3f(x) + 2f(1-x) = 4f(0) - 1 + x \end{cases} \text{ βρίσκουμε } 5f(x) = 4f(0) + 5x - 3.$$

Αλλά από τη σχέση (1) για $x=0$ και για $x=1$ αντίστοιχα έχουμε $\begin{cases} 2f(0) + 3f(1) = 4f(0) \\ 3f(1) + 2f(0) = 4f(0) - 1 \end{cases}$ και από το τελευταίο σύστημα προκύπτει ότι $f(0) = -3$.

$$\begin{cases} 2f(0) + 3f(1) = 4f(0) \\ 3f(1) + 2f(0) = 4f(0) - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3f(1) = 2f(0) \\ 3f(1) + 2f(0) = 4f(0) - 1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } 5f(x) = 5x - 15 \Leftrightarrow f(x) = x - 3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

10-3. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει: $f(x) + xf(-x) = x+1, x \in \mathbb{R}$ τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

10-4. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $3f(x+1) - 2f(2-x) = x^2 + 14x - 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. α.

Να βρεθεί ο τύπος της f .

β. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x-2) + 1$.

11 ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ: ΙΣΟΤΗΤΕΣ-ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

1. Συναρτησιακή Ισότητα

1. Θέτω $f(x) = \alpha, g(x) = \beta, h(x) = \gamma, \dots$ για απλούστευση της σχέσης.

2. Φέρνω όλους τους όρους στο 1^ο μέλος και μορφοποιώ το 1^ο μέλος στη μορφή

$$A^2 + B^2 + \Gamma^2 = 0 \Rightarrow A = B = \Gamma = 0 \text{ (συνήθως)}.$$

Παρατήρηση: Θυμηθείτε την ταυτότητα Euler.

Παράδειγμα1: Ναδειχθεί ότι είναι ίσες οι συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ όταν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:

$$f(x)[f(x) - g(x)] + g(x)[g(x) - h(x)] + h(x)[h(x) - f(x)] = 0.$$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

11-1. Έστω f, g με κοινό πεδίο ορισμού A για τις οποίες, για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι

$$\frac{f(x)}{e^x + |f(x)|} = \frac{g(x)}{e^x + |g(x)|}. \text{ Να αποδειχθεί ότι } f = g \text{ στο } A.$$

Λύση

Από την ισότητα της υπόθεσης, αφού οι παρονομαστές είναι θετικοί, πρέπει οι αριθμητές f, g να είναι ομόσημοι. Έτσι έχουμε:

$$f(x)(e^x + |g(x)|) = g(x)(e^x + |f(x)|) \Leftrightarrow e^x f(x) + f(x)|g(x)| = e^x g(x) + g(x)|f(x)| \Leftrightarrow \begin{matrix} fg \\ \text{ομοσημοί} \end{matrix} e^x f(x) = e^x g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

11-2. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες

ισχύει $f^2(x) + g^2(x) + 1 = 2(\eta\mu x f(x) - \sigma\upsilon\nu x g(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^2(x) + g^2(x) + 1 = 2(\eta\mu x f(x) - \sigma\upsilon\nu x g(x)) \Leftrightarrow f^2(x) - 2\eta\mu x f(x) + \eta\mu^2 x + g^2(x) + 2\sigma\upsilon\nu x g(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - \eta\mu x)^2 + (g(x) + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) - \eta\mu x = 0 \text{ και } g(x) + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu x \text{ και } g(x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

Άρα $f(x) = \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = -\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

11-3. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(1-x)f(1+x) - f(1+2x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1).

Λύση

Για $x = 0$ η ισότητα γίνεται $f^2(1) - f(1) - 2 = 0$, οπότε $f(1) = 2$ ή $f(1) = -1$ που είναι άτοπο, διότι σε μια τιμή x αντιστοιχεί μία μόνο τιμή του y . Άρα δεν υπάρχει συνάρτηση ώστε να ισχύει η σχέση (1).

11-4. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε να ισχύει η ισότητα

$$[f(x) + g(x)]^2 - 2[f(x) - 1][g(x) - 1] + 4 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδειχθεί ότι } f = g.$$

Λύση

$$\text{Έχουμε } f^2(x) + g^2(x) + 2f(x)g(x) - 2[f(x)g(x) - f(x) - g(x) + 1] + 4 = 0$$

$$\text{Δηλαδή } f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) + 2g(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow (f(x) + 1)^2 + (g(x) + 1)^2 = 0 \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f(x) = -1$ και $g(x) = -1$. Άρα $f = g$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

11-5. Να βρεθεί η συνάρτηση για την οποία ισχύει $f^2(x) = 4e^x(f(x) - e^x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

11-6. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$((f+g)(x))^2 - 2(fg)(x) - 2(f(x)\eta\mu x - g(x)\sigma\upsilon\nu x) + 1 = 0 \quad (1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ να αποδείξετε ότι}$$

$$(f(x) = \eta\mu x \text{ και } g(x) = -\sigma\upsilon\nu x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

2. Ανισότητες

Κάνω κατάλληλες αντικαταστάσεις και μορφοποιώ ως εξής:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \geq \text{παρασταση} \\ \text{και} \\ f(x) \leq \text{παρασταση} \end{array} \right| \Rightarrow f(x) = \text{παρασταση} \quad (\text{π.χ. } f(x) \geq x, f(x) \leq x \Rightarrow f(x) = x)$$

Παράδειγμα2: Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν $f(x) \geq x$ και $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ναδειχθεί ότι είναι $f(x) = x$ (ταυτοτική συνάρτηση).

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

11-7. Έστω περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $x^2 f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$.

Λύση

Θέτουμε στη σχέση όπου x το $-x$ και έχουμε $x^2 f(-x) \geq -x$. Αφού η f είναι περιττή έχουμε $f(-x) = -f(x)$ και η σχέση γίνεται $-x^2 f(x) \geq -x \Leftrightarrow x^2 f(x) \leq x$. Άρα θα είναι $x^2 f(x) = x$.

- Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 0$, αφού η f είναι περιττή.
- Για $x \neq 0$ έχουμε $f(x) = \frac{1}{x}$.

Άρα ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \end{cases}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

11-8. Να προσδιοριστούν όλες οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x) - x \leq x^2 \leq f(x-1) + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

11-9. Μια περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(x) \leq x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. α.

Να βρεθεί το $f(0)$,

β. Να προσδιοριστεί ο τύπος της f ,

γ. Να γίνει η γραφική παράσταση της f .

11-10. Μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1$ για κάθε $x > 0$.

α. Να προσδιορισθεί ο τύπος της f ,

β. Να γίνει η γραφική παράσταση της f .

11-12. Να βρεθεί η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x) + x \leq x^2 \leq f(x+1) - x$.

1. Σταθερή Συνάρτηση

Μια συνάρτηση λέγεται σταθερή στο D_f αν για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Για να δείξω ότι η f σταθερή εκτελώ τις πράξεις και πρέπει να βρω τελικό αποτέλεσμα αριθμό ή παράσταση ανεξάρτητο του x .

Παράδειγμα1: Να αποδειχθεί ότι είναι σταθερή η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{3x^2 + 4} \left(\frac{x-2}{x+2} + \frac{2x}{x-2} \right)$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

12-1. Να αποδειχθεί ότι είναι σταθερή η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\sigma\upsilon\nu x}$.

Λύση
$$f(x) = \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu 3x \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 3x \eta\mu x}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu (3x - x)}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu 2x}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} = \frac{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} = 2 \Leftrightarrow f(x) = 2.$$

12-2. Να αποδειχθεί ότι είναι σταθερές οι συναρτήσεις f και g όταν για κάθε x του κοινού πεδίου ορισμού των ισχύει: $[f(x) + g(x)]^2 - 4(f(x) - g(x)) = 2[f(x) \cdot g(x) - 4]$.

Λύση

$$[f(x) + g(x)]^2 - 4[f(x) - g(x)] = 2[f(x) \cdot g(x) - 4]$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4(\alpha - \beta) = 2(\alpha\beta - 4) \quad \parallel \text{για } f(x) = \alpha, g(x) = \beta$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha + 4\beta - 2\alpha\beta + 8 = 0$$

$$(\alpha^2 - 4\alpha + 4) + (\beta^2 + 4\beta + 4) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 + (\beta + 2)^2 = 0 \text{ αρα } \alpha = 2 \text{ και } \beta = -2$$

 Έτσι είναι $f(x) = 2$ και $g(x) = -2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

12-3. Να δειχθεί ότι είναι σταθερές οι συναρτήσεις f και g όταν για κάθε x του κοινού πεδίου ορισμού των ισχύει: $(f(x) + g(x))[f(x) + g(x) - 10] \leq 2[f(x) \cdot g(x) - 25]$.

2. Άρτιες Περιττές Συναρτήσεις

Έστω μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού συμμετρικό ως προς το 0.

- Αν $f(-x) = f(x)$ τότε η f λέγεται άρτια και έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.
- Αν $f(-x) = -f(x)$ τότε η f λέγεται περιττή και έχει άξονα συμμετρίας τον $(0, 0)$.

Εύρεση άρτιας - περιττής.

1. Βρίσκω πεδίο ορισμού.

Αν D_f συμμετρικό τότε υπολογίζω το $f(-x)$.

- Αν $f(-x) = f(x)$ τότε f άρτια.
- Αν $f(-x) = -f(x)$ τότε f περιττή.
- Αν $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$ τότε f ούτε άρτια ούτε περιττή.

Παράδειγμα2: Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση. $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} + \frac{|x|}{x} + \frac{|x+2|}{x+2}$

Παράδειγμα3: Να δειχθεί ότι είναι περιττή η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -2x+5 & x < -3 \\ -2x-5 & 3 < x \end{cases}$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

12-4. Αν $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^2 + 1$, ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις:

i). $h(x) = (f \cdot g)(x)$ ii). $s(x) = f(g(x))$ iii). $t(x) = g(f(x))$

είναι περιττές;

Λύση

Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) = x^3(x^2 + 1) = x^5 + x^3$ και $h(-x) = (-x^5) + (-x^3) = -x^5 - x^3 = -h(x)$.

Άρα η h είναι περιττή.

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $s(x) = (x^2 + 1)^3$, οπότε $s(-x) = ((-x)^2 + 1)^3 = (x^2 + 1)^3 = s(x)$.

Άρα η s δεν είναι περιττή.

iii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $t(x) = (x^3)^2 + 1 = x^6 + 1$ και $t(-x) = (-x^6) + 1 = x^6 + 1 = t(x)$.

Άρα η t δεν είναι περιττή.

12-5. Αν $g(3) = -3$, f περιττή συνάρτηση και $h(x+1) = \frac{f(g(x))}{f(x)}$, να υπολογιστεί το $h(4)$.

Λύση

$$\text{Για } x = 3 \text{ έχουμε } h(3+1) = \frac{f(g(3))}{f(3)} \Leftrightarrow h(4) = \frac{f(-3)}{f(3)} = \frac{-f(3)}{f(3)} = -1.$$

12-6. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ είναι περιττή.

Λύση

• Πρέπει $x^2 + x + 1 \geq 0$. Προφανώς ισχύει, αφού $\Delta_1 = 1 - 4 = -3 < 0$. Ομοίως πρέπει $x^2 - x + 1 \geq 0$.

Προφανώς ισχύει, αφού $\Delta_2 = 1 - 4 = -3 < 0$. Άρα $D_f = \mathbb{R}$. Έτσι για κάθε $x \in D_f$ το $-x \in D_f$.

• Γνωρίζουμε από την άλγεβρα ότι $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = \alpha - \beta$, για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$. Οπότε

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}. \text{ Ονομάζουμε } \alpha = x^2 + x + 1 \text{ και } \beta = x^2 - x + 1. \text{ Τότε } f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$\text{και } f(-x) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}} = -\frac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} = -f(x). \text{ Άρα η } f \text{ είναι περιττή.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

12-7. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \ln \frac{16-x^4}{4+x^2}$ είναι άρτια ή περιττή.

12-8. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^4 \sqrt{9 - 4x^2}$ και να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

3. Περιοδική Συνάρτηση

Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο A λέγεται περιοδική όταν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $T > 0$ έτσι ώστε $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$ για κάθε $x \in A$

Παράδειγμα 4: Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Εύρεση Σημείων τομής με άξονες

A. Εύρεση σημείων τομής της C_f με $x'x$.

α. Θέτω $y = 0$.

β. Λύνω την εξίσωση $f(x) = 0$, αν q_1, q_2 οι ρίζες της τότε τα σημεία $(q_1, 0)(q_2, 0)$ είναι οι τομές με τον $x'x$. (Τα σημεία μπορεί να είναι από 0 έως άπειρα).

B. Εύρεση σημείων τομής της C_f με $y'y$.

α. Αν $0 \in D_f$ τότε θέτω $x = 0$ και βρίσκω το $f(0)$. Το σημείο τομής είναι $(0, f(0))$.

β. Αν $0 \notin D_f$ η C_f δεν τέμνει τον $y'y$. (Τα σημεία τομής είναι το πολύ ένα, αν υπάρχει είναι μοναδικό).

Παράδειγμα1: Να βρεθούν τα σημεία τομής των αξόνων με καμπύλες

$$\alpha. y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$\beta. y = \sqrt{x} + \ln x - 1$$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

13-1. Έστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - f(x) - 1 = x(x-1)$ (1) για κάθε $x \in A$. Να δείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

Λύση

Έστω ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο x_0 . Τότε είναι $f(x_0) = 0$ (2).

Για $x = x_0$ η (1) γίνεται $f^2(x_0) - f(x_0) - 1 = x_0(x_0 - 1) \Leftrightarrow 0^2 - 0 - 1 = x_0^2 - x_0 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 + 1 = 0$ που είναι

άτοπο, αφού η εξίσωση $x^2 - x + 1 = 0$ είναι αδύνατη, διότι έχει διακρίνουσα $\Delta = -3 < 0$.

Άρα η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

13-2. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = (\kappa^2 + 2)x^2 - 3x + \kappa^2 - 2$ και $g(x) = \lambda x^2 + 3\kappa\lambda x + \kappa$, όπου $\kappa, \lambda, x \in \mathbb{R}$.

α). Να βρεθούν τα κ και λ , ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f και g να τέμνονται στον άξονα $y'y$ και στην ευθεία $x = -1$.

β). Για τη μικρότερη τιμή του κ που βρήκατε στο ερώτημα (α), να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και C_g καθώς και τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g .

Λύση

α). Για να τέμνονται στον άξονα $y'y$, πρέπει: $f(0) = g(0) \Leftrightarrow \kappa^2 - 2 = \kappa \Leftrightarrow \kappa^2 - \kappa - 0 \Leftrightarrow \kappa = -1$ ή $\kappa = 2$.

- Για $\kappa = -1$ έχουμε: $f(x) = 3x^2 - 3x - 1$ και $g(x) = \lambda x^2 - 3\lambda x - 1$. Οι C_f και C_g τέμνονται στην ευθεία $x = -1$, όταν ισχύει $f(-1) = g(-1) \Leftrightarrow 5 = 4\lambda - 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2}$.

- Για $\kappa = 2$ έχουμε: $f(x) = 6x^2 - 3x + 2$ και $g(x) = \lambda x^2 + 6\lambda x + 2$. Ισχύει $f(-1) = g(-1) \Leftrightarrow 11 = -5\lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{9}{5}$.

Επομένως είναι $(\kappa, \lambda) = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ ή $(\kappa, \lambda) = \left(2, -\frac{9}{5}\right)$.

β). Για $\kappa = -1$ και $\lambda = \frac{3}{2}$ έχουμε: $f(x) = 3x^2 - 3x - 1$ και $g(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x - 1$.

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και C_g , λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 1 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x - 1 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 2 = 3x^2 - 9x - 2 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow 3x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1.$$

Επομένως οι C_f και C_g τέμνονται στα σημεία $(0, f(0))$, δηλαδή $(0, -1)$, και $(-1, f(-1))$, δηλαδή $(-1, 5)$.

Για να βρούμε τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία η C_f είναι κάτω από τη C_g , λύνουμε την ανίσωση

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow 3x(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0.$$

Επομένως η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g στο σύνολο $\Delta = (-1, 0)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

13-3. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες όταν:

1. $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 4}$

2. $f(x) = x^3 - 5x + 4$

3. $f(x) = 9^x + 3^x - 12$

4. $f(x) = 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x$

5. $f(x) = 25^x - 15^x - 10^x$

6. $f(x) = \log\left(\frac{\kappa+x}{\kappa-x}\right), \kappa > 0$

13-4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} - x + 2$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$.

13-5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-1| - |x+1|}{1-|x|}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και τα σημεία

στα οποία η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή. Τι είδους συμμετρία παρουσιάζει η γραφική της παράσταση;

13-6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + 12$.

i. Να βρείτε τις τιμές $f(0), f(1), f(5), f(-3)$.

ii. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες.

13-7. Έστω η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$. Να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f με τους

άξονες $x'x$ και $y'y$.

13-8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$

α. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες

β. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της f που έχουν τεταγμένη 1.

2. Εύρεση Σημείων τομής δύο Συναρτήσεων

Για να βρω τα κοινά σημεία των C_f, C_g λύνω το σύστημα των εξισώσεων τους δηλ. $f(x) = g(x)$.

Γενικότερα θα μπορούσα να φέρω όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και να θέσω καινούρια συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ και να λύσω την εξίσωση $h(x) = 0$. Αυτή την τεχνική θα τη χρησιμοποιήσουμε πολύ στις συναρτήσεις όταν θέλουμε να λύσουμε εξισώσεις ή ανισώσεις.

Παράδειγμα2: Να βρεθούν τα κοινά σημεία των καμπυλών $y = 3x^2 - x - 7$ και $y = 2x^2 + 2x - 9$.

Σημείο ανήκει σε γραμμή ή γραμμή διέρχεται από σημείο όταν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της γραμμής. Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες στην εξίσωση.

Παράδειγμα3: Να βρεθούν οι τιμές των α και β ώστε οι παραβολές $f(x) = 8x^2 - \alpha x + 5$ και $g(x) = \alpha x^2 + \beta x - 1$ να τέμνονται πάνω στις ευθείες $x = 2$ και $x = 3$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

13-9. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, g(x) = x^2 + 2x + 3$ και να αποδείξετε ότι είναι κορυφές τριγώνου με εμβαδόν $E = 3$ τ.μ.

3. Γραφικές Παραστάσεις Πάνω ή Κάτω από τον $x'x$ ή C_f πάνω από C_g

A. Για να βρω το διάστημα στο οποίο η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$ (αντίστροφα κάτω από τον $x'x$) λύνω την ανίσωση $f(x) > 0$ (αντίστροφα $f(x) < 0$).

Παράδειγμα4: Βρες το διάστημα στο οποίο η $f(x) = x^2 - 5x + 6$ βρίσκεται πάνω από τον $x'x$.

B. Για να βρω το διάστημα στο οποίο η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g λύνω την ανίσωση $f(x) > g(x)$.

Παράδειγμα5: Βρες το διάστημα στο οποίο η $f(x) = x^2 + 1$ είναι κάτω από τη $g(x) = -5x + 7$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

13-10. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν $f(x) = \frac{2+x}{1-x}$.

Λύση

Είναι $f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1-x > 0 \text{ και } (x+2)(x-1) < 0) \Leftrightarrow -2 < x < 1$.

Άρα η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ μόνο όταν $x \in (-2, 1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

13-11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x$ και $g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x}$. Να βρείτε:

α. τα πεδία ορισμού των f και g

β. τα κοινά σημεία των C_f και C_g

γ. τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

13-12. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν:

i) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, ii) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, iii) $f(x) = e^x - 1$.

13-13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 2$, $g(x) = x^2 + 2x + 2$. Να βρεθούν:

i. Τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

ii. Τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g .

4. Σχετική Θέση Καμπυλών

Για να βρω τη σχετική θέση δύο καμπυλών βρίσκω το πρόσημο της διαφοράς $\Delta = f(x) - g(x)$.

α. Σχηματίζω το Δ (Δεν είναι διακρίνουσα).

β. Μηδενίζω το Δ και τις τιμές που βρίσκω τις βάζω σε πίνακα προσήμων.

γ. Αν $\Delta > 0$ τότε C_f πάνω από C_g .

Αν $\Delta < 0$ τότε C_f κάτω από C_g .

Αν $\Delta = 0$ τότε C_f, C_g τέμνονται.

Παράδειγμα6: Βρες τη σχετική θέση των $f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = x - 6$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

13-14. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $f(x) = g(x) + x^2 - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g .

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) = g(x) + x^2 - 4 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = x^2 - 4$. Έστω η συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 4, x \in \mathbb{R}.$$

Είναι $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 2$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$h(x)$	$+$	$-$	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων της $h(x)$ έχουμε:

- Τα κοινά σημεία των C_f και C_g είναι εκείνα που έχουν τετμημένες -2 και 2 .
- Όταν $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ είναι $f(x) > g(x)$ και η C_f είναι πάνω από τη C_g .
- Όταν $x \in (-2, 2)$ είναι $f(x) < g(x)$ και η C_f είναι κάτω από τη C_g .

13-15. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + 8$ στον x και στο σημείο $A(2, 2)$. Κατόπιν να βρεθεί η σχετική θέση των f, g .

Λύση

Πρέπει $4x - x^2 \geq 0$, άρα πεδίο ορισμού της f το $A = [0, 4]$ και της g το $B = \mathbb{R}$.

Η f τέμνει την x εκεί που $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 4$.

Αφού $g(0) = 8$ η g θα τέμνει την x στο $x = 4$, άρα $g(4) = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + \beta = -2$ (1).

Από υπόθεση επίσης $g(2) = 2 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -3$ (2).

Από (1), (2) είναι $\alpha = \frac{1}{2}$ και $\beta = -4$, οπότε $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + 8 = \frac{1}{2}(x-4)^2$.

Η σχετική θέση των f, g θα βρεθεί από το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$. Θα λύσουμε την ανίσωση

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) > 0 &\Leftrightarrow \sqrt{4x - x^2} > \frac{1}{2}(x-4)^2 \stackrel{\text{υψωνω}}{\Leftrightarrow} 4x(4-x) > (4-x)^4 \Leftrightarrow 4x - (4-x)^3 > 0 \Leftrightarrow x^3 - 12x^2 + 52x - 64 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 10x + 32) > 0 \Leftrightarrow x > 2 \end{aligned}$$

Άρα η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g στο $(2, 4)$ και κάτω στο $(0, 2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

13-16. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x-2}$, $g(x) = x^2$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) - g(x) = -\frac{1}{x-2}$ για κάθε $x \neq 2$

β. Να εξετάσετε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

14. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ (f γν. αύξουσα στο Δ), αντίστοιχα αν για

οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$ (f γν. φθίνουσα στο Δ). Προσοχή το Δ είναι διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων.

Βασικές συναρτήσεις:

1). Ευθεία $f(x) = \alpha x + \beta$

αν $\alpha > 0 \Rightarrow f(x)$ γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

αν $\alpha < 0 \Rightarrow f(x)$ γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

αν $\alpha = 0 \Rightarrow f(x)$ σταθερή.

Παράδειγμα1: Να βρεθεί η μονοτονία της $f(x) = -3x + 2004$

2). Τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Βρίσκω το $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$. (εκατέρωθεν του x_0 θα αλλάξει η μονοτονία).

$$\begin{aligned} \text{Αν } \alpha > 0 \text{ τότε} & \begin{cases} f \text{ γν. φθιν. στο } \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right] \\ f \text{ γν. αυξ. στο } \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right) \end{cases} \\ \text{Αν } \alpha < 0 \text{ τότε} & \begin{cases} f \text{ γν. αυξ. στο } \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right] \\ f \text{ γν. φθιν. στο } \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right) \end{cases} \end{aligned}$$

Παράδειγμα2: Να βρεθεί η μονοτονία της $f(x) = -x^2 + x - 1$.

3). Υπερβολή $f(x) = \frac{\alpha}{x}$ $D_f = \mathbb{R}^*$ $\alpha \neq 0$

αν $\alpha > 0$ τότε f γν. φθιν. στο $(-\infty, 0)$, f γν. φθιν. στο $(0, +\infty)$.

αν $\alpha < 0$ τότε f γν. αυξ. στο $(-\infty, 0)$, f γν. αυξ. στο $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα3: Να βρεθεί η μονοτονία της $f(x) = -\frac{3}{x}$.

4). Εκθετική $f(x) = \alpha^x$ $D_f = \mathbb{R}$ $\alpha > 0, \alpha \neq 1$

αν $\alpha > 1 \Rightarrow f(x)$ γν. αυξ. στο $\mathbb{R}$ ειδικά η $f(x) = e^x$ γν. αυξ. στο $\mathbb{R}$.

αν $0 < \alpha < 1 \Rightarrow f(x)$ γν. φθιν. στο $\mathbb{R}$ ειδικά η $f(x) = e^{-x}$ γν. φθιν. στο $\mathbb{R}$.

5). Λογαριθμική $f(x) = \log_{\alpha} x$ $D_f = (0, +\infty)$ $\alpha > 0, \alpha \neq 1$.

αν $\alpha > 1 \Rightarrow f(x)$ γν. αυξ. στο $(0, +\infty)$ ειδικά η $f(x) = \ln x$ γν. αυξ. στο $(0, +\infty)$.

αν $0 < \alpha < 1 \Rightarrow f(x)$ γν. φθιν. στο $(0, +\infty)$.

6). $f(x) = \eta \mu x$ $D_f = \mathbb{R}$ περιοδική $T = 2\pi$
 f γν. αυξ. στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, f γν. φθιν. στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, f γν. φθιν. στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, f γν. αυξ. στο $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ όμοια στα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

άλλα διαστήματα πλάτους 2π .

7). $f(x) = \sigma \upsilon \nu x$ $D_f = \mathbb{R}$ περιοδική $T = 2\pi$
 f γν. φθιν. στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, f γν. φθιν. στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, f γν. αυξ. στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, f γν. αυξ. στο $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ όμοια στα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

άλλα διαστήματα πλάτους 2π .

8). $f(x) = \epsilon \phi x$ $D_f = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ $k \in \mathbb{Z}$ περιοδική $T = \pi$

f γν. αυξ. στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, f γν. αυξ. στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, όμοια στα άλλα διαστήματα πλάτους π .

9). $f(x) = \sigma\phi x$ $D_f = \mathbb{R} - \{k\pi\}$ $k \in \mathbb{Z}$ περιοδική $T = \pi$
 f γν. φθιν. στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, f γν. φθιν. στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, όμοια στα άλλα διαστήματα πλάτους π .

10). $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ με $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$ $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\delta}{\gamma}\right\}$
 αν $D > 0$ τότε f γν.αυξ στο $\left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right)$, f γν.αυξ στο $\left(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty\right)$

αν $D < 0$ τότε f γν.φθιν στο $\left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right)$, f γν.φθιν στο $\left(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty\right)$

Παράδειγμα4: Να βρεθεί η μονοτονία της $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Την ιδιότητα 10 δεν την αναφέρει το βιβλίο άρα δεν μπορώ να τη χρησιμοποιήσω, μόνο για επαλήθευση του αποτελέσματος

Παρατήρηση: Αν f γν. αυξ στο Δ τότε η $-f$ γν. φθιν στο Δ .

Αν f γν. φθιν στο Δ τότε η $-f$ γν. αυξ στο Δ .

Αν f γν. αυξ ή f γν. φθιν στο D_f τότε λέγεται γνησίως μονότονη.

Αν f γν. αυξ ή f γν. φθιν σε διαστήματα τότε λέγεται κατά διαστήματα μονότονη.

Αν f γν. αυξ στο $(\alpha, \beta]$ και f γν. αυξ στο $[\beta, \gamma)$ τότε δεν συνεπάγεται ότι f γν. αυξ στο $(\alpha, \beta] \cup [\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma)$ (μόνο αν είναι συνεχής στο β).

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

14-1. Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = -2x+4$ ως προς τη μονοτονία.

14-2. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις $f(x) = 2^x$ και $g(x) = 3^{-x}$ ως προς τη μονοτονία

15 ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΜΕ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ

Α' Τρόπος:

- Βρίσκω D_f .
- Θεωρώ $x_1, x_2 \in D_f$ (η γενικότερα σε κατάλληλο διάστημα Δ) με $x_1 < x_2$.
- Με τη βοήθεια του $x_1 < x_2$ κατασκευάζω με επιτρεπτές πράξεις στο πρώτο μέλος το $f(x_1)$ και έτσι κατασκευάζεται στο δεύτερο μέλος το $f(x_2)$ (επιτρεπτές πράξεις: πολλαπλασιάζω με κατάλληλους αριθμούς, προσθέτω, κ.λπ. υψώνω σε δύναμη).
- Έτσι αν $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ γν.αυξ στο D_f (ή στο Δ).

αν $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f$ γν.φθιν στο D_f (ή στο Δ).

Παράδειγμα1: Να βρεθεί η μονοτονία των συναρτήσεων

$f(x) = 3\sqrt{x-2} - 4$ $f(x) = -3\sqrt{2-x} + 7$ $f(x) = x^4 + 3x^2 - 5$ $f(x) = x^3 + 3x - 7$

Παρατήρηση: Ειδικά για την ύψωση σε άρτια δύναμη πρέπει και τα δύο μέλη της ανισότητας να είναι ΘΕΤΙΚΑ. Αν δεν είναι παίρνω περιπτώσεις. Για ύψωση σε περιττή δύναμη δεν έχω κανέναν περιορισμό.

Β' Τρόπος: Λόγος μεταβολής.

- Βρίσκω D_f θεωρώ $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$.

- Γράφω το λόγο μεταβολής $\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.
- Κάνω όλες τις δυνατές πράξεις και μετασχηματισμούς (παραγοντοποίηση – συζυγή παράσταση κ.λπ.) με σκοπό να απλοποιη η διαφορά $x_1 - x_2$ με απλοποίηση.
- Αν $\lambda > 0 \Rightarrow f$ γν.αυξ στο D_f .
 Αν $\lambda < 0 \Rightarrow f$ γν.φθιν στο D_f .
 Αν $\lambda = 0 \Rightarrow f$ σταθερή στο D_f .

Παράδειγμα2: Να βρεθεί η μονοτονία της $f(x) = 3\sqrt{x-2} - 4$.

Σχετικά με τις πράξεις στις ανισότητες έχω: Στο $\mathbb{R}$ γίνεται η πρόσθεση ομοιόστροφων ανισοτήτων κατά μέλη και στο $\mathbb{R}_+$ ο πολλαπλασιασμός, η ύψωση σε δύναμη και η εξαγωγή της ρίζας. Όταν αντιστρέφουμε τα μέλη μιας ανισότητας, αυτή αλλάζει φορά αν αυτά είναι ομόσημα και διατηρεί τη φορά αν είναι ετερόσημα. Αφαίρεση και διαίρεση ανισοτήτων κατά μέλη δεν γίνεται. (Θα μάθουμε παρακάτω έναν άλλο τρόπο εύρεσης μονοτονίας με χρήση παραγόντων που θα αντιμετωπίζει πιο σύνθετες παραστάσεις).

Παρατήρηση: Αν ο τύπος της $f(x)$ περιέχει περισσότερες από μία διαφορετικού τύπου συναρτήσεις π.χ. εκθετική, πολυωνυμική, λογάριθμο, κ.λπ. τότε δουλεύω αποκλειστικά με αυτόν τον τρόπο

Η ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΜΑΣ ΒΟΗΘΑΕΙ ΣΤΟ ΝΑ ΑΠΟΔΕΙΞΟΥΜΕ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

15-1. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1) - e^{2-x}$.

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (1, +\infty)$. Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

- $x_1 - 1 < x_2 - 1$ και $\ln(x_1 - 1) < \ln(x_2 - 1)$ (1) αφού η συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα.
- $-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2$ και $e^{2-x_1} > e^{2-x_2} \Leftrightarrow -e^{2-x_1} < -e^{2-x_2}$ (2) αφού η συνάρτηση e^x είναι γνησίως αύξουσα.

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε $\ln(x_1 - 1) - e^{2-x_1} < \ln(x_2 - 1) - e^{2-x_2}$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

15-2. Να βρεθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = 1 - \sqrt{x-2}$.

Λύση

Πεδίο ορισμού $A = [2, +\infty)$. Είναι

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1 - \sqrt{x_1 - 2} - 1 + \sqrt{x_2 - 2}}{x_1 - x_2} = \frac{(\sqrt{x_1 - 2} - \sqrt{x_2 - 2})(\sqrt{x_1 - 2} + \sqrt{x_2 - 2})}{(x_1 - x_2)(\sqrt{x_1 - 2} + \sqrt{x_2 - 2})} =$$

$$= \frac{-(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(\sqrt{x_1 - 2} + \sqrt{x_2 - 2})} = -\frac{1}{\sqrt{x_1 - 2} + \sqrt{x_2 - 2}} < 0$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.

15-3. i) Να αποδειχθεί ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες στο σύνολο A και $f(x) > 0, g(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, τότε και η συνάρτηση fg είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Λύση

i) Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$. Τότε ισχύει $0 < f(x_1) < f(x_2)$ και $0 < g(x_1) < g(x_2)$.

Οπότε $f(x_1)g(x_1) < f(x_2)g(x_2) \Leftrightarrow (fg)(x_1) < (fg)(x_2)$ που σημαίνει ότι η fg είναι γνησίως αύξουσα στο A .

ii) Στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα, καθώς και η $f(x) = \eta\mu x$.
 Επιπλέον $f_1'(x) > 0$ και $f_2'(x) > 0$ για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Επομένως η συνάρτηση $f(x) = (f_1 f_2)(x) = x^3 \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Επειδή $f(x) = 0$ για $x = 0$, έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

15-4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$.

i) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (i) να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $h(x) = (2x^3 + 1)^3 + 5$.

Λύση

i) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα θα

είναι $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$ ή $(g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$ που σημαίνει ότι η $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Έστω $f(x) = 2x^3 + 1$ και $g(x) = x^3 + 5$. Οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση $(g \circ f)(x) = (2x^3 + 1)^3 + 5$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

15-5. Ναδειχθεί ότι αν οι f, g είναι γνησίως αύξουσες σε διάστημα Δ , τότε και η $f + g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Λύση

Αφού οι f, g γνησίως αύξουσες για $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$, $g(x_1) < g(x_2)$ και προσθέτοντας κατά μέλη $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$. Άρα η $f + g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

15-6. Να δείξετε ότι:

- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .
- Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση fg είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Ανάλογα συμπεράσματα διατυπώνονται, αν οι f, g είναι γνησίως φθίνουσες σε ένα διάστημα Δ .

15-7. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$, και οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας τότε η $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα, ενώ αν είναι διαφορετικού είδους μονοτονίας τότε η $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα. Εξετάστε όλες τις περιπτώσεις.

15-8. Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = 3 \ln x + 4e^x + 2x^3 + 4x + 3$ ως προς τη μονοτονία.

15-9. Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + e^x$, $x \geq 0$ ως προς τη μονοτονία.

15-10. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση f όταν:

α. $f(x) = 2e^{5-x} - 3$ και β. $f(x) = (x-2)^2 - 2$, $x \leq 2$.

15-11. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες;

i) $f(x) = \sqrt{1-x}$ ii) $f(x) = 2 \ln(x-2) - 1$ iii) $f(x) = 3e^{1-x} + 1$ iv) $f(x) = (x-1)^2 - 1$, $x \leq 1$.

15-12. Μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και $f(1) - f(3) > 0$. Να βρείτε τη μονοτονία της f .

15-13. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y \in \mathbb{R}$. Αν $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, να αποδειχθεί ότι:

α. $f(0)=0$, β. η f είναι περιττή και γ. η f είναι γνησίως αύξουσα.

15-14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x-6$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β. Να χαράξετε τη γραφική της παράσταση

γ. Να εξετάσετε αν η f έχει ακρότατα.

15-15. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x-2}$, $h(x)=-\frac{3}{x}$.

15-16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:A \rightarrow \mathbb{R}$.

α. Αν οι f,g είναι γνησίως αύξουσες (αντ. γν. φθίνουσες) να αποδείξετε ότι και $h(f+g)$ είναι γνησίως αύξουσες (αντ. γν. φθίνουσες)

β. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι η $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα

γ. Αν οι f και g είναι γνησίως αύξουσες με θετικές τιμές, τότε και η fg είναι γνησίως αύξουσα.

15-17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x-2}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,2)$ και στο $(2,+\infty)$. Είναι η f γνησίως μονότονη;

15-18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-1}+x-2$, $x \in [1,5]$.

α. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) \in [-1,5]$, για κάθε $x \in [1,5]$.

15-19. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ και

$x_1, x_2, \dots, x_{100}$ με $x_1 < x_2 < \dots < x_{100}$. Αν $f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{100})=1$, να αποδείξετε ότι $f(x_1)>0,01$.

15-20. Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση f στο Δ και $x_1, x_2, \dots, x_5 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 < \dots < x_5$. Αν

$f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_5)=1$, να δείξετε ότι $f(x_1) \leq 0,2$

16 ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f** .

Αν η ανισότητα $f(x) \geq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο** ή **απλά ελάχιστο**, το $f(x_0)$.

Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f** .

Αν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή **απλά μέγιστο**, το $f(x_0)$.

Ο ΑΡΙΘΜΟΣ x_0 ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΘΕΣΗ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ (...ΣΤΟ x_0)

Ο ΑΡΙΘΜΟΣ $f(x_0)$ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΤΙΜΗ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ (...ΤΟ $f(x_0)$)

ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ $(x_0, f(x_0))$ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΣΗΜΕΙΟ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ

- Βρίσκω το $f(A)$. Απαιτώ η εξίσωση $f(x) = y$ να έχει λύση ως προς x .
- Αν $f(A) = [\alpha, \beta]$ τότε ελάχιστο το α , μέγιστο το β .
Αν $f(A) = (\alpha, \beta]$ τότε μέγιστο το β , και όχι ελάχιστο.
Αν $f(A) = (\alpha, \beta)$ τότε όχι ακρότατα.
Αν $f(A) = [\alpha, \beta)$ τότε ελάχιστο το α , και όχι μέγιστο.
- Θέτω στον τύπο όπου y τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της f και λύνω ως προς x για να βρω την αντίστοιχη θέση μεγίστου ή ελαχίστου. Ή κατασκευάζω συνθετικά σχέση της μορφής $f(x) \geq \alpha$ ή $f(x) \leq \alpha$ που σημαίνει ακρότατο.

Παράδειγμα1: Να βρεθεί το μέγιστο και ελάχιστο των συναρτήσεων και οι αντίστοιχες θέσεις αυτών.

$$(1) : f(x) = 1 - 3x, \quad A = [-1, 0] \qquad (2) : f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Ειδική Περίπτωση: Αν η $f(x)$ είναι τριώνυμο τότε έχει ακρότατο ελάχιστο το σημείο της κορυφής της παραβολής $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ αν $\alpha > 0$ ελάχιστο
αν $\alpha < 0$ μέγιστο

Προσοχή

Αν αποδείξουμε ότι για μια συνάρτηση f ισχύει $f(x) \leq M$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για να είναι ολικό μέγιστο το M πρέπει στην (1) να ισχύει το ίσο τουλάχιστον μια φορά.

(Ανάλογα για $f(x) \geq m$...)

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

16-1. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων

$$i). f(x) = -x^2 + 2x - 5 \qquad ii). f(x) = 3(x-1)^4 - 2 \qquad iii). f(x) = 1 - 2\eta\mu x$$

Λύση

$$i). \text{ Η } f \text{ παρουσιάζει στο } -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1 \text{ μέγιστο το } -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{-16}{4 \cdot (-1)} = -4.$$

$$ii). \text{ Είναι } D_f = \mathbb{R}. \text{ Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει } (x-1)^4 \geq 0 \text{ (το } = \text{ ισχύει για } x=1 \text{)}.$$

$$\text{Έχουμε } (x-1)^4 \geq 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^4 \geq 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^4 - 2 \geq -2 \Leftrightarrow f(x) \geq -2 = f(1).$$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $f(1) = -2$.

iii). Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$, όπου το = αριστερά του $\eta\mu x$ ισχύει

για $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, και το = δεξιά του $\eta\mu x$ ισχύει για $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Έχουμε $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \geq -2\eta\mu x \geq -2 \Leftrightarrow 3 \geq 1 - 2\eta\mu x \geq -1 \Leftrightarrow f\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) \geq f(x) \geq f\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Άρα η f παρουσιάζει στα σημεία $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ μέγιστο το 3, και στα σημεία $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ελάχιστο το -1, $k \in \mathbb{Z}$.

16-2. Να βρεθεί το μέγιστο και ελάχιστο της συνάρτησης και οι αντίστοιχες θέσεις

αυτής $f(x) = 1 - \sqrt{4 - x^2}$.

Λύση

Πεδίο ορισμού $4 - x^2 \geq 0$, $x^2 \leq 4$, $A = [-2, 2]$ $y = 1 - \sqrt{4 - x^2}$, $\sqrt{4 - x^2} = 1 - y$. Πρέπει $1 - y \geq 0$, $y \leq 1$ (1)

$4 - x^2 = (1 - y)^2$, $x^2 = 4 - (1 - y)^2$. Πρέπει $4 - (1 - y)^2 \geq 0$, $y^2 - 2y - 3 \leq 0$. Ισχύει όταν $-1 \leq y \leq 3$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε κοινή λύση την $-1 \leq y \leq 1$. Έτσι το σύνολο τιμών είναι $f(A) = [-1, 1]$

για $y = -1$: $1 - \sqrt{4 - x^2} = -1$, $x = 0$

για $y = 1$: $1 - \sqrt{4 - x^2} = 1$, $x = \pm 2$.

Ελάχιστο -1 για $x = 0$ και μέγιστο 1 για $x = \pm 2$.

16-3. Να βρεθεί το μέγιστο και ελάχιστο της συνάρτησης και οι αντίστοιχες θέσεις

αυτής $f(x) = \ln(x - 1)$.

Λύση

Πεδίο ορισμού $(1, +\infty)$. Είναι $x - 1 = e^y$ και $x = e^y + 1$. Πρέπει $x > 1$ ή $e^y + 1 > 1$, $e^y > 0$.

Ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συνεπώς η f δεν έχει ολικά ακρότατα.

Bonus ασκήσεις που παίζουμε με τον ορισμό ...

16-3β Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ παρουσιάζει ελάχιστο μ και μέγιστο M . Να αποδείξετε ότι

για οποιουδήποτε πραγματικούς α, β ισχύει: $\mu \leq \frac{3f(\alpha) + 17f(\beta)}{20} \leq M$

Λύση

Εφόσον η συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$, παρουσιάζει ελάχιστο μ και μέγιστο M ισχύει:

$$\begin{cases} \mu \leq f(\alpha) \leq M \\ \mu \leq f(\beta) \leq M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\mu \leq 3f(\alpha) \leq 3M \\ 17\mu \leq 17f(\beta) \leq 17M \end{cases} (+) \Rightarrow 20\mu \leq 3f(\alpha) + 17f(\beta) \leq 20M \Leftrightarrow \mu \leq \frac{3f(\alpha) + 17f(\beta)}{20} \leq M$$

16-3γ. Να βρείτε αν έχει ολικό ακρότατο η συνάρτηση $f(x) = 2|x - 1| + 3$.

Λύση

Εργαζόμαστε συνθετικά, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|x - 1| \geq 0 \Leftrightarrow 2|x - 1| \geq 0 \Leftrightarrow 2|x - 1| + 3 \geq 3 \Leftrightarrow f(x) \geq 3. \text{ Αλλά από τον τύπο παρατηρούμε ότι } f(0) = 3$$

Αποδείξαμε ότι $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο 3 για $x=0$.

16-3δ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $|5f(x) - 4| \leq 11$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τα πιθανά ακρότατα της f .

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|5f(x) - 4| \leq 11 \Leftrightarrow -11 \leq 5f(x) - 4 \leq 11 \Leftrightarrow -7 \leq 5f(x) \leq 15 \Leftrightarrow -\frac{7}{5} \leq f(x) \leq 3$$

Άρα η f παρουσιάζει πιθανά ακρότατα. Ελάχιστο ίσο με $-\frac{7}{5}$ και μέγιστο ίσο με 3. Για να είναι βέβαια τα

ακρότατα αρκεί να υπάρχουν x_1 και x_2 ώστε να ισχύουν $f(x_1) = -\frac{7}{5}$ και $f(x_2) = 3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

16-4. Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x) = -x^2 + 1$.

16-5. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ έχει μέγιστο το 3 και ελάχιστο το $\frac{1}{3}$.

16-6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x-5}}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη

γ. Να βρείτε το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης.

16-7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x-3}}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

γ. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f .

16-8. α. Να δείξετε ότι $\theta + \frac{1}{\theta} \geq 2$ για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό θ .

β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = 7^x + 7^{-x}$.

16-9. Να βρεθεί ο $k \in \mathbb{R}^*$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = kx^2 - 3kx - \frac{13}{2}$ να έχει μέγιστο τον k .

16-10. Ένας μαθητής βρήκε ότι για μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|f(x)| \leq 2001$, για κάθε $x \in A$.

Συμπέρανε έτσι ότι η f έχει ελάχιστο το -2001 και μέγιστο το 2001. Είχε δίκιο;

Bonus

16-10α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο $m = \frac{1-\sqrt{5}}{8}$ και μέγιστο

$$M = \frac{1+\sqrt{5}}{8}.$$

16-10β. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ παρουσιάζει ελάχιστο m και μέγιστο M . Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x ισχύει:

$$f^2(x) - (m+M)f(x) + mM \leq 0$$

17 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ "1-1"

Ορισμός: Εστω $f(x)$ συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$ τότε η f λέγεται "1-1" στο A ή ισοδύναμα $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

- Η ιδιότητα "1-1" σημαίνει ότι όλες οι τιμές της συνάρτησης είναι διαφορετικές μεταξύ τους (δεν υπάρχουν ίσες τιμές). Αυτό γραφικά σημαίνει ότι κάθε παράλληλη ευθεία προς τον άξονα x' τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο ή με διαφορετικό τρόπο σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει το πολύ μία ρίζα για κάθε τιμή του κ .
- Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = a^x$ (e^x) και $g(x) = \log_a x$ ($\ln x$) είναι "1-1" συναρτήσεις δηλαδή από τις ισότητες $f(\alpha) = f(\beta)$, $f(\sin x - 1) = f(\eta \mu^2 x + 1)$ προκύπτει άμεσα $\alpha = \beta$, $\sin x - 1 = \eta \mu^2 x + 1$ αντίστοιχα.

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι και "1-1".

Το αντίστροφο δεν αληθεύει πάντα, δηλαδή αν είναι "1-1" δεν σημαίνει ότι θα είναι γνησίως μονότονη.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3-x, & 1 < x < 2 \end{cases}$ είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

Μπορείτε να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f και να «δείτε» ότι δεν είναι γνησίως μονότονη.

Το αντίθετοαντίστροφο ισχύει, δηλαδή αν δεν είναι "1-1" δεν είναι γνησίως μονότονη. (ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΕΝΟΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ ΠΑΝΤΑ, ΟΜΩΣ ΤΟ ΑΝΤΙΘΕΤΟΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΙΣΧΥΕΙ ΠΑΝΤΑ)

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η συνεπαγωγή $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ΙΣΧΥΕΙ ΠΑΝΤΑ.

"1-1": Απόδειξη της ιδιότητας "1-1".

Α' τρόπος (χρησιμοποιείται συνήθως σε ασκήσεις που είναι γνωστός ο τύπος της f).

- Υποθέτω ότι $f(x_1) = f(x_2)$.
- Εκτελώ τις πράξεις στη σχέση $f(x_1) = f(x_2)$
- Αν εξαχθεί άμεσα $x_1 = x_2$ τότε η f είναι "1-1".
- Σε διαφορετική περίπτωση μεταφέρουμε όλους τους όρους στο ένα μέλος, παραγοντοποιούμε ώστε να έχουμε γινόμενο της μορφής $(x_1 - x_2) \Pi(x_1, x_2) = 0$. Για να είναι η συνάρτηση "1-1" θα πρέπει να μην μηδενίζεται ο παράγοντας $\Pi(x_1, x_2)$ για κάθε τιμή των x_1, x_2 δηλαδή πρέπει να βγει αποκλειστικά $x_1 = x_2$.
- Ή αλλιώς κατασκευάζουμε με σύνθεση $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ ή με πράξεις $f^3(x_1) = f^3(x_2)$ τους όρους της σχέσης που δόθηκε. Τελικά προκύπτει $x_1 = x_2$.

Παράδειγμα1: Να εξεταστεί αν είναι "1-1" η συνάρτηση $f(x) = 3x + 4$

Παράδειγμα2: Να εξεταστεί αν είναι "1-1" οι συναρτήσεις $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

Β' τρόπος Μονοτονία (χρησιμοποιείται συνήθως όταν αναγνωρίζω τη μονοτονία της f , όταν έχω πολυώνυμο με όλους τους όρους περιττού βαθμού ή άθροισμα διαφορετικού τύπου συναρτήσεων, π.χ. $\ln x, e^x$, κ.λπ.).

- Βρίσκω τη μονοτονία της f .
- Αν η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι "1-1".
- Αν αλλάζει η μονοτονία, τότε κάνουμε χρήση του Α' τρόπου.

Παράδειγμα3: Να εξεταστεί αν είναι "1-1" η συνάρτηση $f(x) = 2 - x - e^x$.

Για να δείξω ότι μια συνάρτηση δεν είναι "1-1" αρκεί να έρθω σε αντίφαση με τον ορισμό.

Α' τρόπος (αντιπαράδειγμα).

Αναζητώ να βρω δύο συγκεκριμένες τιμές x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους ($x_1 \neq x_2$) και αποδεικνύω ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Παράδειγμα4: $f(x) = x^2$.

Γενικά η χρήση του αντιπαράδειγματος εφαρμόζεται όταν θέλω να αποδείξω ότι ΜΙΑ ΣΧΕΣΗ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ.

Β' τρόπος

Αποδεικνύω ότι η f είναι άρτια ή περιοδική, οπότε δεν θα είναι "1-1", αφού:

- Αν f άρτια, έχω $f(-x) = f(x)$ για $-x \neq x$.
- Αν f περιοδική «επαναλαμβάνονται» κάποιες τιμές.

(Γενικά οι πολωνυμικές συναρτήσεις με άρτιους βαθμούς, θα υποψιαζόμαστε ότι δεν είναι "1-1").

Παράδειγμα5: $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, $f(x) = \eta \mu x$.

Προσοχή: Η f μπορεί σε ένα διάστημα A να μην είναι "1-1" αλλά σε ένα διάστημα B με $B \subseteq A$ μπορεί να είναι "1-1".

Παράδειγμα6: $f(x) = x^2$ με $D_f = \mathbb{R}$, $D_f = [0, +\infty)$

1). Βρίσκω αν είναι "1-1" σε κάθε τύπο.

- Αν δεν είναι τότε η f όχι "1-1".
- Αν είναι τότε θεωρώ x_1 στο ένα διάστημα, x_2 στο άλλο και προσπαθώ να επαληθεύσω τον ορισμό (κατασκευάζω κατά περίπτωση τα $f(x_1), f(x_2)$ ή αλλιώς βρίσκω το πεδίο τιμών του κάθε κλάδου και αν έχουν ένα τουλάχιστον κοινό στοιχείο τότε η f όχι "1-1".

Παράδειγμα7: Να εξεταστεί αν είναι "1-1" η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 0 \\ x^2+1, & 0 < x \end{cases}$.

2). Αν υποψιαστώ από μια πρόχειρη γραφική παράσταση ότι δεν είναι "1-1" δουλεύω με αντιπαράδειγμα, δηλαδή ψάχνω δύο τιμές μία στον έναν κλάδο και μία στον άλλο οι οποίες να είναι μεταξύ τους ίσες.

Παράδειγμα 8: $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x \geq 0 \\ -x+1, & x < 0 \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι: $-2 \neq 1 \Rightarrow f(-2) = 3 = f(1)$

3)(Ανακεφαλαιώνοντας πως δείχνω ότι μια συνάρτηση δεν είναι 1-1)

Να αποδείξετε ότι δεν είναι 1-1 η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$

Λύση

(Α τρόπος)

Αν υποθέσουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$, έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1^2-1}{x_1^2+1} = \frac{x_2^2-1}{x_2^2+1} \Rightarrow (x_1^2-1)(x_2^2+1) = (x_2^2-1)(x_1^2+1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2$$

Από την οποία προκύπτει $x_2 = x_1$ ή $x_2 = -x_1$. Κατά συνέπεια δεν ικανοποιείται η απαίτηση του ορισμού της συνάρτησης 1-1.

(Β τρόπος)

Λύνουμε ως προς x την εξίσωση $y = f(x)$ και βρίσκουμε:

$$y = \frac{x^2-1}{x^2+1} \Leftrightarrow x^2-1 = yx^2+y \Leftrightarrow x^2-yx^2 = y+1 \Leftrightarrow x^2(1-y) = y+1$$

Από την σχέση για $y \neq 1$ παίρνουμε: $x^2 = \frac{y+1}{1-y}$, όπου $\frac{y+1}{1-y} \geq 0$ και $x = \pm \sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$

Για $y \neq 1$, η ανίσωση $\frac{y+1}{1-y} \geq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y \in [-1, 1)$

Δηλαδή, υπάρχουν $y \in [-1, 1)$ στα οποία αντιστοιχούν δυο τιμές του $x \in A$. Αυτό σημαίνει ότι η f δεν είναι 1-1.

(Γ τρόπος)

Εύρεση αντιπαράδειγματος με παρατήρηση

$-1 \neq 1 \Rightarrow f(-1) = 0 = f(1)$ (δυο διαφορετικές τιμές του πεδίου ορισμού της f με ίσες τιμές) Άρα, η f δεν είναι 1-1.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

17-1. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = e^x + f^3(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".

Λύση

Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$f(f(x)) = e^x + f^3(x) \Leftrightarrow f(f(x)) - f^3(x) = e^x$. Στο 2^ο μέλος έχουμε τη συνάρτηση e^x η οποία είναι "1-1".

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και $f(x_1) = f(x_2)$.

- Από τον ορισμό της f έχουμε $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$.
- Είναι $f^3(x_1) = f^3(x_2)$.

Οπότε $f(f(x_1)) - f^3(x_1) = f(f(x_2)) - f^3(x_2)$ ή $e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, αφού η e^x είναι "1-1".

Άρα η f είναι "1-1".

17-2. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$ και $f(x) = x - \ln f(x)$ για κάθε $x \in A$.

i) Να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".

Λύση

i) Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ θα είναι $f(x_1) > f(x_2)$, οπότε και $\ln f(x_1) > \ln f(x_2) \Leftrightarrow -\ln f(x_1) < -\ln f(x_2)$ αφού η συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα $x_1 - \ln f(x_1) < x_2 - \ln f(x_2)$ ή $f(x_1) < f(x_2)$ που είναι άτοπο. Άρα η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Έστω $x_1, x_2 \in A$ και $f(x_1) = f(x_2)$. Είναι $\ln f(x_1) = \ln f(x_2)$, οπότε $f(x_1) + \ln f(x_1) = f(x_2) + \ln f(x_2)$, άρα $x_1 = x_2$. Άρα η f είναι "1-1".

17-3. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f^2(x) - 5f(x) + 6$, $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως μονότονη και τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(1, 3)$ ανήκουν στην C_f να βρείτε τη σχετική θέση της C_g με τον άξονα $x'x$.

Λύση

Επειδή $A(-1, 2)$, $B(1, 3) \in C_f$ έχουμε $f(-1) = 2$ και $f(1) = 3$. Αφού $-1 < 1$ και $f(-1) < f(1)$ αποκλείεται η f να είναι γνησίως φθίνουσα και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως αύξουσα άρα και "1-1". Είναι:

- $g(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 5f(x) + 6 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$ ή $f(x) = 3 \Leftrightarrow f(x) = f(-1)$ ή $f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$.
Άρα η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία -1 και 1 .
- $g(x) > 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 5f(x) + 6 > 0 \Leftrightarrow f(x) < 2$ ή $f(x) > 3 \Leftrightarrow f(x) < f(-1)$ ή $f(x) > f(1) \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$.
Άρα η C_g είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ στα διαστήματα του x , $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$.
- Η C_g είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ στα διαστήματα του x , $(-1, 1)$.

17-4.

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $6f(x^2) - f^2(x) \geq 9$ (1), να αποδείξετε ότι η f δεν είναι "1-1".

Λύση

Η σχέση (1) για $x = 0$ και $x = 1$ δίνει $6f(0) - f^2(0) \geq 9$ και $6f(1) - f^2(1) \geq 9$,

δηλαδή $f^2(0) - 6f(0) + 9 \leq 0$ και $f^2(1) - 6f(1) + 9 \leq 0$, δηλαδή $(f(0) - 3)^2 \leq 0$ και $(f(1) - 3)^2 \leq 0$,

οπότε $f(0) = 3$ και $f(1) = 3$. Συνεπώς η f δεν είναι "1-1".

17-5. Να εξεταστεί αν είναι "1-1" η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ 1+\sqrt{x-1}, & 1 \leq x \end{cases}$.

Λύση

Για $x < 1$: Η f είναι γνησίως αύξουσα ($\alpha = 1 > 0$) άρα και "1-1".

Για $x \geq 1$: Η f είναι γνησίως αύξουσα γιατί η $x-1$ είναι γνησίως αύξουσα οπότε και η $\sqrt{x-1}$ και τελικά $1+\sqrt{x-1} = f(x)$. Έτσι η f ως γνησίως αύξουσα είναι συνάρτηση "1-1" και στο διάστημα $[1, +\infty)$

βρίσκουμε τα σύνολα τιμών στις δύο περιπτώσεις:

$x < 1$: $y = x+1$, $x = y-1$ πρέπει $y-1 < 1$, $y < 2$. Έτσι το σύνολο τιμών για $x < 1$ είναι $f(A_1) = (-\infty, 2)$.

$x \geq 1$: $y = 1 + \sqrt{x-1}$, $y-1 = \sqrt{x-1}$ (πρέπει $y-1 \geq 0$, $y \geq 1$), $(y-1)^2 = x-1$, $x = 1 + (y-1)^2$ πρέπει

$1 + (y-1)^2 \geq 1$, $(y-1)^2 \geq 0$ ισχύει. Συνεπώς είναι $y \geq 1$, οπότε $f(A_2) = [1, +\infty)$.

Επειδή τα δύο σύνολα $f(A_1) = (-\infty, 2)$ και $f(A_2) = [1, +\infty)$ έχουν κοινά στοιχεία (τα στοιχεία του διαστήματος $[1, 2)$) η συνάρτηση f δεν είναι "1-1" στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$ αλλά "1-1" κατά διαστήματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

17-6. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 1$ είναι συνάρτηση 1-1.

17-7. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x+5}$ είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της.

17-8. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{5^x - 1}{5^x + 1}$ είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της.

17-9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν οι f και g είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι 1-1.

17-10. Αν $f(f(x)) = x-5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

17-11. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^2(x) + f(x) + 1 = x^3 + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της.

17-12. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α. Αν η συνάρτηση $g \circ f$ είναι 1-1, να αποδειχθεί ότι και f είναι 1-1.

β. Αν η συνάρτηση $g \circ f$ είναι 1-1 και η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι και η g είναι "1-1".

17-13. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = |x|$ δεν είναι 1-1.

17-14. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{2003} - x^{2001} + x^{1940} + x^2 - 1$ δεν είναι 1-1.

17-15. Να εξετάσετε ποιες από τις συναρτήσεις

$f(x) = (x-1)^5 + x^3 + x + 1$ και $g(x) = (x-2001)(x-2003) + 2005$ είναι 1-1.

17-16. α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $9x^2 - 24x + 16$ και να λύσετε την εξίσωση $|x^4| - 1 = 0$.

β. Αν για τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ισχύει $9f^2(x) - |x^4| + 1 \leq 24f(x) - 16$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.

17-17. Να εξετάσετε αν είναι 1-1 η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 0 \\ x+2, & x \geq 0 \end{cases}$ στο πεδίο ορισμού της.

18 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ – ΕΥΡΕΣΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

Για να αντιστρέφεται μια συνάρτηση f πρέπει να είναι "1-1".

$f: A \rightarrow B$ τότε $f^{-1}: B \rightarrow A$ αν $f(1)=3$ τότε $1 \rightarrow 3$ $3 \rightarrow 1$ δηλαδή $f^{-1}(3)=1$.

$(1,3) \in C_f$ τότε $(3,1) \in C_{f^{-1}}$ $f(3)=7 \Leftrightarrow f^{-1}(7)=3$ $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$ άρα $f^{-1}(f(x))=x=f(f^{-1}(x))$.

Οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο $y=x$. (Θα επανέλθουμε σε αυτό..)

Αν γνωρίζω ότι υπάρχει η $f^{-1}(x)$ αυτό σημαίνει ότι η f είναι "1-1" και επίσης ότι η f^{-1} θα είναι "1-1".

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

- 1). $D_f = R_{f^{-1}}$, $D_{f^{-1}} = R_f$. Το πεδίο τιμών της f^{-1} δεν καθορίζεται από τον τύπο της αλλά από το D_f .
- 2). Η εξίσωση $f(x)=y$ έχει μοναδική λύση ως προς x όταν η f είναι "1-1".
- 3). Η εξίσωση $f^{-1}(x)=y$ έχει μοναδική λύση ως προς x αφού η f είναι "1-1".
- 4). Οι εξισώσεις $f^{-1}(x)=x$, $f(x)=x$, $f(x)=f^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμες (οπότε αρκεί να λύσω μια από τις τρεις, την πιο εύκολη). Αν οι $C_f, C_{f^{-1}}$ τέμνονται τότε υποχρεωτικά το σημείο τομής τους είναι πάνω στη διχοτόμο.
- 5). Η f και η f^{-1} έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας (με απόδειξη σε ασκήσεις).

Δηλ. Αν f γνησίως αύξουσα, τότε και f^{-1} γνησίως αύξουσα (όμοια φθίνουσα)
 Αν $y_1 < y_2$ θ.δ.ο. $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Εστω $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \xRightarrow{f \text{ γν. αυξ.}} f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) \xRightarrow{f \text{ γν. αυξ.}} y_1 \geq y_2$ άτοπο.

ΘΕΛΕΙ ΠΑΝΤΟΤΕ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΕ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

- Βρίσκω το πεδίο ορισμού της f , έστω $D_f = A$.
- Αποδεικνύω ότι η f είναι "1-1" (Σ39) οπότε υπάρχει η αντίστροφη f^{-1} της f .
- Θέτω $y=f(x)$ και λύνω ως προς x σημειώνοντας συγχρόνως τους περιορισμούς του y (η εξίσωση έχει μοναδική λύση ως προς x λόγω της ιδιότητας "1-1").
- Οι περιορισμοί του y καθορίζουν το $f(A)$.
- Θέτω $x \rightarrow f^{-1}(y)$ και αλλάζω τη θέση του y με το x τότε $f^{-1}(y): f(A) \rightarrow R$.

Παράδειγμα1: $f(x)=e^x+1$.

- Αποδεικνύω το "1-1".
- Θέτω όπου x το $f^{-1}(x)$ και λόγω της ιδιότητας $f(f^{-1}(x))=x$ βρίσκω τελικά την $f^{-1}(x)$.

Παράδειγμα2: Να βρεθεί αν υπάρχει, η αντίστροφη της συνάρτησης $f: R^* \rightarrow R$ όταν ισχύει η σχέση για κάθε $x \in R$ $f^3(x) + xf(x) - 1 = 0$.

Όμοια δουλεύω και σε απόδειξη συνεπαγωγών.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

18-1. Εστω η συνάρτηση $f(x)=2+\sqrt{e^x-1}$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".

ii) Να ορίσετε την αντίστροφη της f .

Λύση

i) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=[0,+\infty)$. Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ έχουμε

$$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow 2+\sqrt{e^{x_1}-1}=2+\sqrt{e^{x_2}-1} \Leftrightarrow \sqrt{e^{x_1}-1}=\sqrt{e^{x_2}-1} \Leftrightarrow e^{x_1}-1=e^{x_2}-1 \Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2} \Leftrightarrow x_1=x_2.$$

Άρα η f είναι "1-1".

ii)

Για κάθε $x \in A$ έχουμε

$$f(x)=y \Leftrightarrow 2+\sqrt{e^x-1}=y \Leftrightarrow \sqrt{e^x-1}=y-2 \Leftrightarrow e^x-1=(y-2)^2 \text{ και } y-2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x=1+(y-2)^2 \text{ και } y \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x=\ln x(y^2-4y+5) \quad (1) \text{ και } y \geq 2$$

Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=[2,+\infty)$. Οπότε η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $f(A)$.

Για τον τύπο της f^{-1} από (1) για κάθε $y \in f(A)$ έχουμε $x = f^{-1}(y)$, άρα $f^{-1}(y) = \ln(y^2 - 4y + 5)$ (2).

$$f^{-1}(x) = \ln(x^2 - 4x + 5), \quad x \in f(A).$$

18-2. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \geq 2 \\ 3x - 2, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$ αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1} .

Λύση

$$\text{Έστω } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } f(x_1) = f(x_2).$$

- Αν $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$, τότε $x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow (x_1^2 - x_2^2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$. Επειδή $x_1 + x_2 \neq 0$ (αφού $2 \leq x_1 < x_2$ είναι $x_1 + x_2 \geq 4$). Είναι $x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
- Αν $x_1, x_2 \in (-\infty, 2)$ με $f(x_1) = f(x_2)$, έχουμε $3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
- Αν $x_1 < 2 < x_2$, δηλαδή $x_1 \neq x_2$, έχουμε $x_1^2 < 2 \Leftrightarrow 3x_1 - 2 < 4 \Leftrightarrow 3x_1 - 2 < 4 \Leftrightarrow f(x_1) < 4$ και $x_2 > 2 \Leftrightarrow x_2^2 > 4 \Leftrightarrow f(x_2) > 4$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$, δηλαδή $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Άρα η f είναι "1-1". Επομένως αντιστρέφεται. Στην περίπτωση που $x \geq 2$, τότε $x^2 \geq 4$, δηλαδή $f(x) \geq 4$.

Έστω $y \in [4, +\infty)$ με $x^2 = y$, τότε $x = \sqrt{y}$, αφού $x \geq 2$. Αν $x < 2$, τότε $f(x) < 4$, οπότε για $y < 4$

$$\text{είναι } 3x - 2 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+2}{3} < 2. \text{ Έτσι τελικά έχουμε } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{αν } x \geq 4 \\ \frac{x+2}{3}, & \text{αν } x < 4 \end{cases}.$$

Σχόλιο: Μια συνάρτηση f πολλαπλού τύπου είναι "1-1", όταν κάθε κλάδος της είναι "1-1". Η αντίστροφη μιας τέτοιας συνάρτησης προκύπτει αντιστρέφοντας κάθε κλάδο της.

18-3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$. Να εξεταστεί αν η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1} .

Λύση

Αφαιρώ και προσθέτω τη μονάδα με σκοπό να βγει ταυτότητα.

Άρα $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow (x_1 - 1)^3 + 1 = (x_2 - 1)^3 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Από την $y = (x - 1)^3 + 1 \Leftrightarrow (x - 1)^3 = y - 1$ οπότε για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα $x \in \mathbb{R}$, άρα η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Άρα

$$\text{υπάρχει } f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x-1}, & \text{αν } x \geq 1 \\ 1 - \sqrt[3]{1-x}, & \text{αν } x < 1 \end{cases}.$$

18-4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

α). Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

β). Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

Λύση

α). Προφανώς το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\text{Είναι } f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{e^{2x_1} - 1}{e^{2x_1} + 1} = \frac{e^{2x_2} - 1}{e^{2x_2} + 1} \Leftrightarrow e^{2x_1} e^{2x_2} - e^{2x_2} + e^{2x_1} - 1 = e^{2x_1} e^{2x_2} - e^{2x_1} + e^{2x_2} - 1 \Leftrightarrow e^{2x_1} = e^{2x_2}.$$

Όμως, όπως γνωρίζουμε, η συνάρτηση $g(x) = e^x$ είναι "1-1" και

$$\text{συνεπώς } e^{2x_1} = e^{2x_2} \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2. \text{ Άρα και η } f \text{ είναι συνάρτηση "1-1".}$$

β). Για να βρούμε την f^{-1} λύνουμε τη σχέση $y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ ως προς x .

$$y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Leftrightarrow e^{2x} \cdot y + y = e^{2x} - 1 \Leftrightarrow e^{2x} (y - 1) = -y - 1.$$

- Αν $y = 1 \Rightarrow 0 = -y - 1 \Rightarrow y = -1$, άτοπο.

- Αν $y \neq 1$, έχουμε $e^{2x} = \frac{y+1}{1-y}$. Άρα $\frac{y+1}{1-y} > 0$, δηλαδή αν $y \in (-1, 1)$, τότε $2x = \ln \frac{y+1}{1-y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{1-y}$, επομένως ο τύπος της f^{-1} είναι $f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{1-y}$, $y \in (-1, 1)$.

Όπως ξέρουμε όμως, η ονομασία της ανεξάρτητης μεταβλητής δεν έχει σημασία. Επειδή συνηθίζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή να ονομάζεται x μπορούμε να γράψουμε τον τύπο της f^{-1} ως

$$εξής f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{1-x}, x \in (-1, 1).$$

18-5. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + 2f^3(x) - x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

i). Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".

ii). Να βρείτε την αντίστροφη της f .

Λύση

i). Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^{f(x)} + 2f^3(x) - x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} + 2f^3(x) + 1 = x. \text{ Έστω } x_1, x_2 \in A \text{ με } f(x_1) = f(x_2).$$

$$\text{Είναι } e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)} \text{ και } f^3(x_1) = f^3(x_2). \text{ Οπότε } e^{f(x_1)} + 2f^3(x_1) - x_1 + 1 = e^{f(x_2)} + 2f^3(x_2) - x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η f είναι "1-1".

ii). Για κάθε $y \in f(A)$ υπάρχει μοναδικό $x \in A$ ώστε $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Οπότε η δοθείσα ισότητα γίνεται $e^y + 2y^3 - f^{-1}(y) + 1 = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^y + 2y^3 + 1$, $y \in \mathbb{R}$ ή $f^{-1}(x) = e^x + 2x^3 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

18-6. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $f(f(x)) + x = 0$. Δείξτε ότι έχει αντίστροφη.

Λύση

$$\text{Έχουμε } f(x_1) = f(x_2). \text{ Από τη σχέση } f(f(x)) + x = 0 \text{ προκύπτουν οι } \begin{cases} |f(f(x_1)) + x_1 = 0| \\ |f(f(x_2)) + x_2 = 0| \end{cases}.$$

$$\text{Άρα } f(f(x_1)) + x_1 = 0 = f(f(x_2)) + x_2 = 0 \text{ δηλαδή } x_1 = x_2, \text{ διότι } f(f(x_1)) = f(f(x_2)).$$

Άρα έχει αντίστροφη.

18-7. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη συνθήκη $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Να αποδειχθεί ότι

i). $f(0) = 0$

ii). $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii). Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ την $x_0 = 0$, τότε η f είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $f^{-1}(\alpha + \beta) = f^{-1}(\alpha) + f^{-1}(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Λύση

i). Για $x = y = 0$ είναι $f(0) = f(0) + f(0)$. Άρα $f(0) = 0$.

ii). Για $y = -x$ είναι $f(x-x) = f(x) + f(-x)$ ή $f(0) = f(x) + f(-x)$. Άρα $f(-x) = -f(x)$.

iii). Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ ή $f(x_1) - f(x_2) = 0$ ή $f(x_1) + f(-x_2) = 0$ ή $f(x_1 - x_2) = 0$.

Άρα $x_1 - x_2 = 0$ ή $x_1 = x_2$, δηλαδή η f είναι "1-1", άρα αντιστρέψιμη.

Θέτουμε $f^{-1}(\alpha) = x$ και $f^{-1}(\beta) = y$ για τυχαία $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Άρα $\alpha = f(x)$ και $\beta = f(y)$.

$$\text{Είναι } f(x+y) = f(x) + f(y) = \alpha + \beta \text{ και } f^{-1}(f(x+y)) = f^{-1}(\alpha + \beta) \text{ ή } x+y = f^{-1}(\alpha + \beta) \text{ ή } f^{-1}(\alpha) + f^{-1}(\beta) = f^{-1}(\alpha + \beta).$$

18-8. Αν $f(f(x)) + f(x) = 2x - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(3) = 2$, να βρεθεί η $f^{-1}(3)$ και να λυθεί η

$$\text{εξίσωση } f^{-1}(x) = 2.$$

Λύση

Αποδεικνύεται 'όπως στις προηγούμενες ασκήσεις ότι είναι "1-1" συνάρτηση και έχει αντίστροφη.

Στη σχέση που δόθηκε θέτουμε όπου x το $f^{-1}(3)$

$$f(f(f^{-1}(3))) + f(f^{-1}(3)) = 2f^{-1}(3) - 3 \Leftrightarrow f(3) + 3 = 2f^{-1}(3) - 3 \parallel \text{γιατί } f(f^{-1}(x)) = x \Leftrightarrow 2 + 3 = 2f^{-1}(3) - 3,$$

οπότε είναι $f^{-1}(3) = 4$. Από την $f^{-1}(x) = 2$ έχουμε ισοδύναμα $f(f^{-1}(x)) = f(2)$, δηλαδή $x = f(2)$ (1).

Από την $f(3)=2$ είναι $f(f(3))=f(2)$ και λόγω της υπόθεσης $(f(f(x))=2x-3-f(x))$, θα είναι $2 \cdot 3 - 3 - f(3) = f(2)$, $f(2) = 2 \cdot 3 - 3 - 2$, $f(2) = 1$ (2). Από τις (1) και (2) έχουμε $x = 1$

▪ Μια σκέψη! Πως βρίσκουμε το σύνολο τιμών συνάρτησης από το πεδίο ορισμού της αντίστροφης

Γνωρίζουμε ότι:

Το πεδίο ορισμού της f είναι σύνολο τιμών της f^{-1} και το σύνολο τιμών της f είναι πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Από την παραπάνω πρόταση αντιλαμβανόμαστε ότι όταν έχουμε δυο αντίστροφες συναρτήσεις, έχουμε δυο πεδία ορισμού και δυο σύνολα τιμών αυτών. Αν γνωρίζουμε δυο από τα τέσσερα χαρακτηριστικά σύνολα, μπορούμε να βρούμε και τα άλλα δυο.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x^3-1}{8-x^3}$. Να βρείτε τα σύνολα τιμών αυτής και της αντιστροφής της.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται αν ισχύει:

$$\begin{cases} \frac{x^3-1}{8-x^3} > 0 \\ 8-x^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1,2) \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1,2). \text{ Άρα } A_f = (1,2)$$

Θεωρούμε την εξίσωση

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln \frac{x^3-1}{8-x^3} \Leftrightarrow e^y = \frac{x^3-1}{8-x^3} \Leftrightarrow e^y(8-x^3) = x^3-1 \Leftrightarrow$$

$$8e^y - x^3e^y = x^3 - 1 \Leftrightarrow 8e^y + 1 = x^3 + x^3e^y \Leftrightarrow 8e^y + 1 = x^3(1+e^y) \Leftrightarrow \frac{8e^y+1}{1+e^y} = x^3 \quad (1)$$

Το πρώτο μέλος της (1) είναι θετικό άρα θα είναι και το δεύτερο για κάθε $y \in \mathbb{R}$

Έχουμε μοναδική λύση $x = \sqrt[3]{\frac{8e^y+1}{1+e^y}}$ που εύκολα διαπιστώνουμε * ότι ανήκει στο $A_f = (1,2)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση είναι 1-1 και έχει αντίστροφη με τύπο $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{8e^y+1}{1+e^y}}$ και πεδίο ορισμού $A_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το διάστημα $(1,2)$ ενώ το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}$.

Το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ ενώ το πεδίο ορισμού της είναι το διάστημα $(1,2)$.

*($1 < \sqrt[3]{\frac{8e^y+1}{1+e^y}} < 2 \Leftrightarrow 1 < \frac{8e^y+1}{1+e^y} < 8 \Leftrightarrow 1+e^y < 8e^y+1 < 8(1+e^y) \Leftrightarrow 1+e^y < 8e^y+1 < 8+8e^y$, ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$)

Πως βρίσκουμε την γραφική παράσταση συνάρτησης από την γραφική παράσταση της αντίστροφής της!!

Είπαμε ότι για να είναι αντιστρέψιμες δυο συναρτήσεις ισχύει η ισοδυναμία:

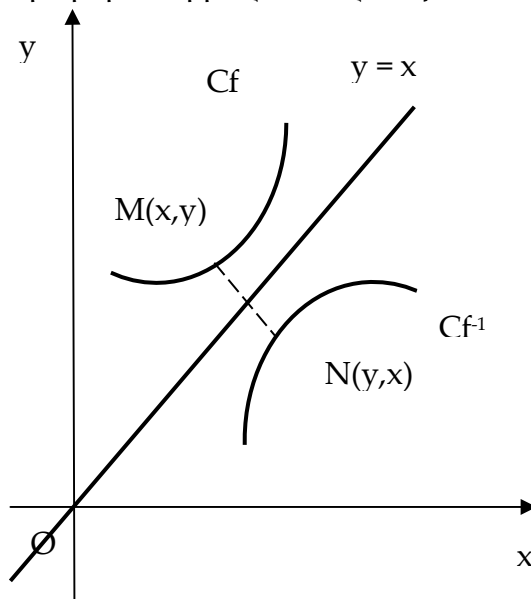
$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \text{ για κάθε } x \in A_f, y \in f(A)$$

Αυτό γεωμετρικά δηλώνει ότι:

Η C_f διέρχεται από το σημείο $M(x,y)$ εάν και μόνο εάν η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από το σημείο $N(y,x)$ το οποίο είναι το συμμετρικό του M ως προς την διχοτόμο $y=x$.

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στην πρόταση:

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ η οποία διχοτομεί τις γωνίες $xOy, x'O'y$. Συνεπώς, αν γνωρίζουμε τη μια από τις δυο γραφικές παραστάσεις $C_{f^{-1}}, C_f$ μπορούμε, με μια συμμετρία ως προς την ευθεία $y=x$, να βρούμε την άλλη.



Παράδειγμα

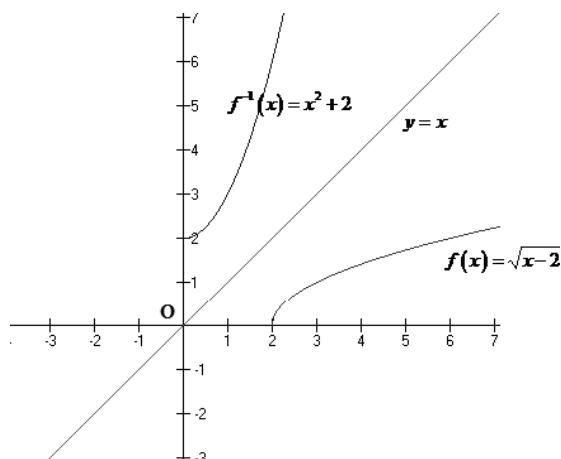
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2}$, να βρείτε την αντίστροφη της και να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις τους στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Λύση Πρέπει $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f = [2, +\infty)$
 Αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1-2} = \sqrt{x_2-2} \Rightarrow x_1-2 = x_2-2 \Rightarrow x_1 = x_2, x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ άρα η f είναι 1-1.

Λύνουμε την $y = f(x)$ σαν εξίσωση ως προς x και λαμβάνουμε όλα τα y ώστε η εξίσωση $y = f(x)$ να έχει λύση στο πεδίο ορισμού της f .

$$y = f(x) = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| \geq 0 \\ |y^2 = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| \geq 0 \\ |y^2 + 2 = x \end{cases} \quad (1)$$

Η αντίστροφη είναι $f^{-1}(x) = x^2 + 2$ με πεδίο ορισμού το $A_{f^{-1}} = [0, +\infty)$, που είναι και το σύνολο τιμών της f . Σχεδιάζουμε την $y = f^{-1}(x) = x^2 + 2$, μετατοπίζοντας κατακόρυφα την γραφική παράσταση της x^2 κατά δυο μονάδες προς τα πάνω. Η $f(x) = \sqrt{x-2}$ είναι συμμετρική της $y = f^{-1}(x) = x^2 + 2$ ως προς την ευθεία $y=x$ η οποία διχοτομεί τις γωνίες $xOy, x'O'y$. (Σχήμα)

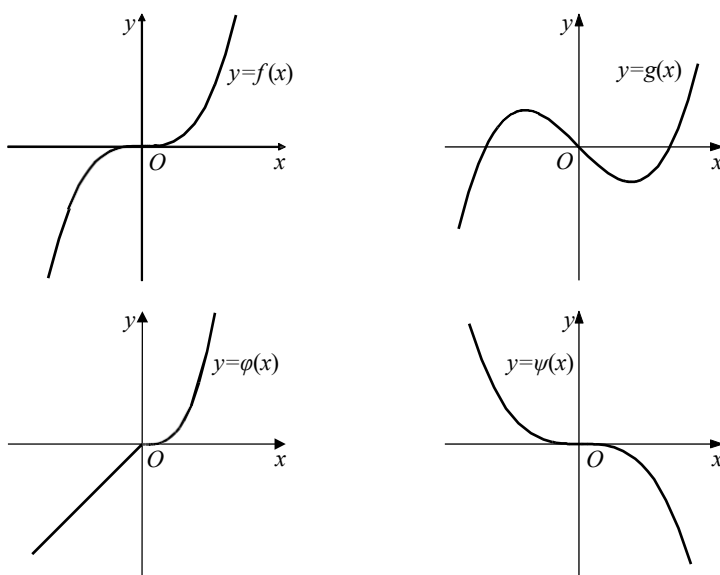


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

18-9. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι "1-1" και για καθεμία απ' αυτές να βρείτε την αντίστροφη της

- | | | | |
|--------------------|---------------------|---------------------------------|--------------------------|
| i) $f(x)=3x-2$ | ii) $f(x)=x^2+1$ | iii) $f(x)=(x-1)(x-2)+1$ | iv) $f(x)=\sqrt[3]{1-x}$ |
| v) $f(x)=\ln(1-x)$ | vi) $f(x)=e^{-x}+1$ | vii) $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ | viii) $f(x)= x-1 $ |

18-10. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g , φ και ψ .



Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις f , g , φ , ψ έχουν αντίστροφη και για καθεμία απ' αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.

18-11. Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση της $f(x)=1-\sqrt{x-2}$ και να σχεδιάσετε την C_f σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

18-12. Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2+1$. Να βρεθεί η f^{-1} .

18-13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-9x^2+27x-25$. Να βρεθεί η f^{-1} .

18-14. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει $(f(x))^3 + f(x) = x(1)$. Να αποδειχθεί ότι είναι συνάρτηση "1-1" και να βρεθεί η αντίστροφη της.

18-15. Να βρεθεί αν υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ όταν ισχύει η σχέση για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $f^3(x) + f(x) + x - 1 = 0$.

18-16. Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η σχέση: $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$, να βρεθεί η αντίστοιχη τιμή $f^{-1}(-1)$ και να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$.

19 "1-1": ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ

A: ΣΤΙΣ ΙΣΟΤΗΤΕΣ

1). Μπορώ σε μια ισότητα να «κολλήσω» την ίδια συνάρτηση. Π.χ.

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(g(f(x_1))) = f(g(f(x_2))).$$

2). Για να «ξεκολλήσω» μια συνάρτηση πρέπει να είναι "1-1" (ή γνησίως μονότονη).

$$f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \xRightarrow{f^{-1}-1} g(x_1) = g(x_2) \xRightarrow{g^{-1}-1} x_1 = x_2, \text{ ενώ } f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \xRightarrow{f' \circ g^{-1}-1} \text{ μένει όπως είναι.}$$

B: ΣΤΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Για να «κολλήσω» και να «ξεκολλήσω» μια συνάρτηση πρέπει να ξέρω τη μονοτονία της στο αντίστοιχο διάστημα (δεν αρκεί το "1-1" στις ανισότητες).

Π.χ.

$$1). x_1 < x_2 \xRightarrow{f \text{ γν. αυξ.}} f(x_1) < f(x_2) \xRightarrow{f \text{ γν. φθιν.}} g(f(x_1)) > g(f(x_2)) \xRightarrow{g \text{ γν. φθιν.}}$$

$$2). f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \xRightarrow{f \text{ γν. φθιν.}} f(x_1) > f(x_2) \xRightarrow{f \text{ γν. φθιν.}} x_1 < x_2$$

Τις δύο αυτές ιδιότητες θα τις χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές στη συνέχεια και θα είναι ο βασικός μας άξονας στη λύση εξισώσεων – ανισώσεων και στην απόδειξη ανισοτήτων.

Σε ασκήσεις ξεκινάω από τη σχέση $f(x_1) = f(x_2)$ και προσπαθώντας να κατασκευάσω την παράσταση που μου δίνει να καταλήξω ότι $x_1 = x_2$. (όμοια αποδεικνύω και τη μονοτονία).

Παράδειγμα1: Αν $f(f(x)) + g(g(x)) = x^3$ τότε να δείχθει ότι η f είναι "1-1".

Παράδειγμα2: Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1) + e^x$ είναι 1-1.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

19-1. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η C_f είναι κάτω από τη C_g , να δείξετε ότι $(f \circ f)(x) < (g \circ g)(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Επειδή η C_f είναι κάτω από τη C_g έχουμε $f(x) < g(x)$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ είναι $f(f(x)) < f(g(x))$ (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει και για $x = g(x)$, δηλαδή $f(g(x)) < g(g(x))$ (3).

Από (2) και (3) έχουμε $f(f(x)) < g(g(x)) \Leftrightarrow (f \circ f)(x) < (g \circ g)(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

19-2. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η $f \circ g$ γνησίως φθίνουσα, να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Λύση

Έστω ότι η g δεν είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{A}$ για τα οποία θα ισχύει

$$x_1 < x_2 \text{ και } g(x_1) \leq g(x_2) \quad (1).$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε από την (1)

$$f(g(x_1)) \leq f(g(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ g)(x_1) \leq (f \circ g)(x_2) \Leftrightarrow x_1 \geq x_2 \text{ (αφού } f \circ g \text{ γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}) \text{ που είναι άτοπο. Άρα η } g \text{ είναι γνησίως φθίνουσα.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

19-3. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f\left(\frac{x+f(x)}{2}\right) = x$, να

αποδείξετε ότι $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$.

20 ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ – ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $f(x) \stackrel{<}{>}{\alpha} \iff f(g(x)) \stackrel{<}{>}{\alpha} \iff f(h(x))$

A: Εξίσωση $f(x) = \alpha$ (όταν το πρώτο μέλος είναι άθροισμα ή διαφορά διαφορετικών τύπων συναρτήσεων $f(x) = \ln x + \eta\mu x + e^x \dots$ και το δεύτερο μέλος αριθμός).

- Αν $\alpha \notin f(\Delta)$ (πεδίο τιμών) τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha \in f(\Delta)$ τότε αναζητώ $x_0 \in \Delta$ ώστε $f(x_0) = \alpha$ (προφανής λύση).
- Βρίσκω το “1-1” της f .
- Άρα γράφεται στη μορφή $f(x) = f(x_0) \stackrel{f^{-1}-1}{\Rightarrow} x = x_0$ και μάλιστα μοναδική ρίζα.

Παράδειγμα1: $f(x) = \ln x + e^{x-1}$. Λύσε την εξίσωση $f(x) = 1$.

Το “1-1” της συνάρτησης μας εξασφαλίζει μοναδικότητα της ρίζας μιας συνάρτησης.

B: Ανίσωση $f(x) \stackrel{<}{>}{\alpha}$ (όταν ο τύπος της f αποτελείται από διαφορετικού τύπου συναρτήσεις).

- Αναζητώ $x_0 \in \Delta$ με $f(x_0) = \alpha$.
- Βρίσκω τη μονοτονία της f (όχι το “1-1”).
- Η ανίσωση παίρνει τη μορφή:

$$f(x) < f(x_0) \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 & \text{αν } f \text{ γν. αυξ.} \\ x > x_0 & \text{αν } f \text{ γν. φθιν.} \end{cases} \quad f(x) > f(x_0) \Rightarrow \begin{cases} x > x_0 & \text{αν } f \text{ γν. αυξ.} \\ x < x_0 & \text{αν } f \text{ γν. φθιν.} \end{cases}$$

(Το ίδιο κάνω με ανισώσεις με $\leq$ ή $\geq$).

Παράδειγμα2: $f(x) = \ln x + e^{x-1}$. Λύσε την εξίσωση $f(x) \leq 1$.

Παρατήρηση 1: Αν η εξίσωση ή η ανίσωση δεν περιέχει τον τύπο κάποιας $f(x)$ τότε μετακινώ όλους τους όρους (ή μόνο τα x) στο πρώτο μέλος και θέτω το πρώτο μέλος συνάρτηση $f(x)$ και τότε την φέρνω στη μορφή $f(x) = \alpha$ ή $f(x) > \alpha$ και δουλεύω με τους προηγούμενους τρόπους.

Παρατήρηση 2: Σε ασκήσεις που κάποια ερωτήματα έχουν λύση ανίσωσης, επειδή υπάρχει περίπτωση να ακολουθήσουμε τον Β' τρόπο καλό είναι από την αρχή να αποδεικνύουμε το “1-1” της συνάρτησης με τη μέθοδο της μονοτονίας.

Γ: Λύση εξίσωσης $f(g(x)) = f(h(x))$.

Βασικό γνώρισμα της μεθόδου είναι η σύνθετη μορφή της εξίσωσης και η δυνατότητα που έχουμε με μετακινήσεις όρων να σχηματίζουμε ομοιόμορφες παραστάσεις (η διαίσθηση και η φαντασία μας θα μας ωθήσει σε αυτή την κατασκευή).

- Μορφοποιώ την εξίσωση με μετακινήσεις όρων από το ένα μέλος στο άλλο, έτσι ώστε τα δύο μέλη να εμφανίζουν ομοιότητα ως προς τη δομή τους (σε κάθε μέλος η ίδια παράσταση έχει διαφορετική θέση: βάση εκθετικής, υπόρριζο, προσθετέος, κ.λπ.) π.χ. $e^{x-3} + \dots = e^{x-2} + \dots$ (προσπαθώ να εμφανίσω κάτι κοινό).
- Θεωρώ συνάρτηση f που εκφράζει τη δομή των δύο μελών (δημιουργείται σύνθετη συνάρτηση) και τελικά η εξίσωση παίρνει τη μορφή $f(g(x)) = f(h(x)) \stackrel{f^{-1}-1}{(1)}$.
- Αποδεικνύω ότι η f είναι “1-1” οπότε $(1) \Leftrightarrow g(x) = h(x)$ η οποία εξίσωση είναι απλούστερη. (Μπορεί να χρειαστεί να εφαρμόσω αυτόν τον τρόπο διαδοχικά 2 ή περισσότερες φορές έως ότου καταλήξω σε απλή εξίσωση).

Παράδειγμα 3: Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x$, $0 < \alpha < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο

$\mathbb{R}$. Στη συνέχεια να λύσετε ως προς κ την εξίσωση: $\alpha^{\kappa^2-4} - \alpha^{\kappa-2} = (\kappa^2 - 4) - (\kappa - 2)$.

Λύση

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε $-x_1 > -x_2$ (1)

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2} \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη (1) +(2): $\alpha^{x_1} - x_1 > \alpha^{x_2} - x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ έτσι f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
Συνεπώς η f είναι 1-1.

$$\alpha^{k^2-4} - \alpha^{k-2} = (k^2-4) - (k-2) \Leftrightarrow \alpha^{k^2-4} - (k^2-4) = \alpha^{k-2} - (k-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(k^2-4) = f(k-2) \Leftrightarrow k^2-4 = k-2 \Leftrightarrow k^2-k-2=0 \Leftrightarrow k=2 \text{ ή } k=-1$$

Παράδειγμα5: Να λυθεί η εξίσωση $(\sin x + \sqrt{x})^3 + \sin x = (\sqrt{x}+1)^3 + 1$.

Λύνεται ανάλογα αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = (x + \sqrt{x})^3 + x \dots$

Παράδειγμα4: Να λυθεί η εξίσωση $(\sin x + \sqrt{x})^3 + \sin x = (\sqrt{x}+1)^3 + 1$.

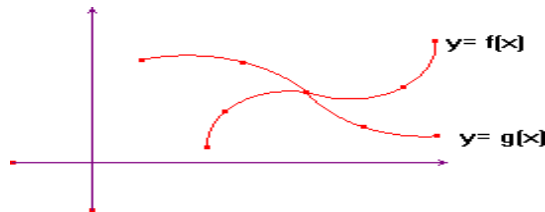
Δ: Λύση ανίσωσης $f(g(x)) < f(h(x))$.

Δουλεύω όπως στην περίπτωση Γ αλλά αντί να αποδείξω το "1-1" αποδεικνύω τη μονοτονία της f
 $f(g(x)) < f(h(x)) \Rightarrow g(x) < h(x)$.

Παράδειγμα4: Να λυθεί η ανίσωση $\sqrt{2x-1} + \ln(2x-1) \leq x + 2 \ln x$.

Παρατήρηση: Αν f γνησίως αύξουσα και g γνησίως φθίνουσα και υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = g(x_0)$ τότε ισχύουν:

- $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = x_0$
- $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x > x_0$
- $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x < x_0$



ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

20-1. Έστω η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$. Αν για τη συνάρτηση f είναι $f(x) = \ln x - g(x)$ για κάθε $x > 0$:

- Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λύσετε την ανίσωση $2 \ln x < 2 + g(x^2)$ στο $(0, +\infty)$.

Λύση

i) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$. Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, έχουμε

- $\ln x_1 < \ln x_2$, αφού η συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα.
- $g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow -g(x_1) < -g(x_2)$, αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα $\ln x_1 - g(x_1) < \ln x_2 - g(x_2)$ ή $f(x_1) < f(x_2)$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Είναι $g(1) = -2$. Έχουμε:

$$2 \ln x < 2 + g(x^2) \Leftrightarrow \ln x^2 - g(x^2) < 2 \Leftrightarrow f(x^2) < \ln 1 - g(1) \Leftrightarrow f(x^2) < f(1) \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in (0, 1).$$

20-2. i) Δίνεται η εξίσωση $\ln x = 1 - x$. Να αποδειχθεί ότι έχει μοναδική λύση τη $x = 1$.

ii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f είναι "1-1".

β. Να λυθεί η εξίσωση $\ln^5 x + \ln x = (1-x)^5 + (1-x)$.

Λύση

i) Η εξίσωση γράφεται $\ln x + x - 1 = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x + x - 1$ και παρατηρούμε ότι $g(1) = 0$. Αλλά η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η ρίζα $x = 1$ είναι μοναδική.

ii) α. Η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x$ είναι "1-1", διότι αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$,

τότε $x_1^5 < x_2^5$ και $x_1^5 + x_1 < x_2^5 + x_2$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Η εξίσωση γράφεται $f(\ln x) = f(1-x)$, και αφού η f είναι "1-1", θα ισχύει $\ln x = 1-x$, αλλά λόγω της (i) η $x=1$ είναι ρίζα.

20-3. Δίνεται η συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = -\frac{1}{2}$. Αν

$g(x) = -f(x)$ και $h(x) = 1+f(x)$, να εξεταστεί αν υπάρχει σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των g και h .

Λύση

Αρκεί να βρούμε τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε $g(x) = h(x)$. Έχουμε $-f(x) = 1+f(x) \Leftrightarrow 2f(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{2}$.

Τότε έχουμε $f(x) = f(2)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και "1-1", άρα $x=2$.

20-4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τιμές στο $(1, +\infty)$ και για την οποία ισχύει $f^3(x) - 3f(x) - x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να λυθεί η ανίσωση $f(f(x)) > 2$.

Λύση

i) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Επειδή $f^3(x) - 3f(x) = x$ θα ισχύει

$$f^3(x_1) - 3f(x_1) < f^3(x_2) - 3f(x_2) \Leftrightarrow f^3(x_1) - f^3(x_2) - 3(f(x_1) - f(x_2)) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x_1) - f(x_2))(f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) - 3) < 0$$

Αρα $f(x_1) - f(x_2) < 0$, αφού $f(x) > 1$ και $f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) - 3 > 0$, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Από την υπόθεση για $x=2$ έχουμε $f^3(2) - 3f(2) - 2 = 0 \Leftrightarrow (f(2) - 2)(f^2(2) + 2f(2) + 1) = 0 \Leftrightarrow f(2) = 2$.

ii) Η ανίσωση γράφεται $f(f(x)) > f(2)$ και επειδή η f είναι γνησίως

αύξουσα έχουμε $f(x) > 2$ ή $f(x) > f(2)$. Οπότε $x > 2$.

Σχόλιο: Όταν δεν γνωρίζουμε τον τύπο μιας συνάρτησης f και θέλουμε να λύσουμε ανίσωση της μορφής $f(x) > \kappa$ ή $f(x) < \kappa$, τότε αναζητούμε το x_0 του πεδίου ορισμού της f , ώστε $f(x_0) = \kappa$ και η ανίσωση γίνεται $f(x) > f(x_0)$.

20-5. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \alpha^x - 5x$, $0 < \alpha < 1$.

i) Να αποδειχθεί ότι είναι "1-1".

ii) Να λυθεί η εξίσωση $\alpha^{x^2-4} - \alpha^{2x-1} = 5(x^2 - 2x - 3)$.

Λύση

i) Η συνάρτηση με τύπο α^x και $0 < \alpha < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$ (1) και $-5x_1 > -5x_2$ (2). Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $\alpha^{x_1} - 5x_1 > \alpha^{x_2} - 5x_2$ ή $f(x_1) > f(x_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και "1-1".

ii) Η εξίσωση γράφεται

$$\alpha^{x^2-4} - \alpha^{2x-1} = 5(x^2 - 2x - 3) \Leftrightarrow \alpha^{x^2-4} - 5(x^2 - 4) = \alpha^{2x-1} - 5(2x - 1) \Leftrightarrow f(x^2 - 4) = f(2x - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 3$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

20-6. Να λυθούν οι ανισώσεις: (1): $\ln x > 1-x$ (2): $e^x > \frac{1-x}{1+x}$.

20-7. Να λυθούν οι ανισώσεις:

(1): $f(2x^2 - x + 3) < f(3x + x^2)$, όταν $f(x) = e^x + x$.

(2): $f(3-x) < f(6-2x)$, όταν $f(x) = \sqrt{4-x} - \ln x$.

20-8. i. Αν f, g συναρτήσεις γνησίως αύξουσες (γν. φθίνουσες) στο διάστημα Δ να δείξετε ότι και η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα (γν. φθίνουσα) στο Δ .

ii. Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $h(x) = 2005^x + 2005 \cdot x^3$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $h(k-3(x^3-3x)) > h(-2k-3)$.

20-9. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να λύσετε την ανίσωση

$$(f \circ g)(x^2 - 2x) \geq (f \circ g)(x+4)$$

20-10. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x - 16$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $f(2) = 2$

β. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f

γ. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) \geq 2$.

20-11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + x^5 + x^3 + x - 1$ και $g(x) = 2 - x - x^3 - \ln x$.

α. Να αποδειχθεί ότι οι f, g είναι γνησίως μονότονες

β. Να λυθούν οι ανισώσεις $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$.

20-12. Να λυθεί η ανίσωση $5^{x^2-x} < 5^{2x-2}$.

20-13. Να λυθεί η ανίσωση $2^{3x-x^2} - x^2 > 2^{6-2x} - 5x + 6$.

20-14. Να λυθεί η ανίσωση $\ln \frac{3+4}{5^x} < e^{5^x} - e^{3^x+4^x}$.

20-15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left| \left(\frac{3}{5} \right)^x + \left(\frac{4}{5} \right)^x \right| - 1$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Να λυθεί η εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$

γ. Να λυθεί η ανίσωση $3^x + 4^x > 5^x$.

20-16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - x - \ln x$

α. Να αποδείξετε ότι η $f''(1) = 1$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(1)$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $x + \ln x > 1$.

20-17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x + 2$

α. Να αποδείξετε ότι η $f''(1) = 1$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x-1} + x - 2 > 0$.

20-18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x + 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η $f''(1) = 1$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2-x} + (x^2-x)^3 + x^2 - 2x = e^{x+3} + (x+3)^3 + 3$.

20-19. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ g)(x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να λυθεί η εξίσωση

$$g(4^x - 2^{x+1} + 4) = g(2^{x+2} - 4)$$

20-20. α. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$ και $g(x) = \frac{1}{3^x} - 2x$ είναι $f'(1) = 1$.

β. Να λύσετε την εξίσωση: $\left| \left(\frac{1}{3} \right)^{x^2-9} - 2(x^2-9) \right| = \left(\frac{1}{3} \right)^{x+3} - 2x - 6$.

20-21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2003} + x^{2005}$.

α. Να βρείτε το $f(1)$.

β. Να ελέγξετε αν η συνάρτηση είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $x^{2003} + x^{2005} = 2$.

20-22. Να λυθεί η εξίσωση $(2^x + x^2 + 1)^3 + 2^{x^2} + x^2 + 1 = (2^{x+2} + x + 3)^3 + 4 \cdot 2^x + x + 3$.

20-23. Να λυθεί η εξίσωση $(e^{x-1} + x - 3)^5 + (e^{x-1} + x - 3)^3 + e^{x-1} + x = 0$.

20-24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2-x} - x + 2$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$

δ. Να εξετάσετε αν η f έχει ακρότατα.

20-25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} + x - 4$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη

γ. Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο

δ. Να εξετάσετε αν το σημείο $M(3,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

ε. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

20-26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x-3) - 4$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

20-27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x$ με $0 < \alpha < 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

β. Να λύσετε την ανίσωση $\alpha^{x^2} - \alpha^{x+2} > x^2 - (x+2)$

20-28. Δίνεται μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + x) > f(3-x)$.

20-29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x + x$, $\alpha > 1$.

α. Να βρείτε τη μονοτονία της f

β. Να λύσετε την ανίσωση $\alpha^{\ln x} - \alpha^x > -\ln x - x$.

20-30. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει $f(f(x)) + (f(x))^3 = 2x + 3$. α. Να αποδείξετε ότι είναι συνάρτηση "1-1".

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) = f(4-x)$.

20-31. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση: $f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. α.

Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x - 2) = f(2-x)$.

20-32. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση $g(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 - 8x + 7) = f(x-1)$.

Ε.Εξισώσεις με αντίστροφες

1). Η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ είναι ισοδύναμη με τις $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$.

2). Η ανίσωση $f^{-1}(x) > \alpha$ για να λυθεί πρέπει να είναι γνωστή η μονοτονία της f . Αν f γνησίως αύξουσα τότε $f^{-1}(x) > \alpha \Rightarrow f(f^{-1}(x)) > f(\alpha) \Rightarrow x > f(\alpha)$. Όμοια αν f γνησίως φθίνουσα.

(θα επανέλθουμε με αναλυτικό παράδειγμα)

Παράδειγμα 5: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-1} + x - 2$. Να λυθούν οι εξισώσεις

(1): $f(x) = f^{-1}(x)$ (2): $f^{-1}(\sqrt{x^2 + 1} - x) = f^{-1}(\sqrt{5} - x)$ και η ανίσωση (3): $f^{-1}(x^2 - 3x + 3) < 1$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

20-33. Αν η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(3,4)$, να λυθεί η ανισότητα $f(1 + f^{-1}(x-1)) > 4$.

Λύση

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, ο λόγος μεταβολής μεταξύ των σημείων $A(2,3)$ και $B(3,4)$ είναι

$\lambda = \frac{4-3}{3-2} = 1 > 0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και αντιστρέφεται. Οπότε

$f(1 + f^{-1}(x-1)) > 4 \Leftrightarrow 1 + f^{-1}(x-1) > f^{-1}(4) = 3 \Leftrightarrow f^{-1}(x-1) > 2 \Leftrightarrow f^{-1}(x-1) > f^{-1}(3) \Leftrightarrow x-1 > 3 \Leftrightarrow x > 4$.

Σχόλιο: Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε και η αντίστροφη αυτής f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα. Γενικά η αντίστροφη έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με τη συνάρτηση.

20-34. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{3x}{3-4x}$. Με την υπόθεση ότι η f αντιστρέφεται, να

υπολογιστεί η τιμή της $f^{-1}(-3)$.

Λύση

Έστω ότι $f^{-1}(-3) = \alpha$. Τότε ισοδύναμα έχουμε $f(\alpha) = f(f^{-1}(-3)) \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{3-4\alpha} = -3 \Leftrightarrow 3\alpha = -9 + 12\alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$

Άρα $f^{-1}(-3) = 1$.

Σχόλιο: Όταν δεν γνωρίζουμε τον τύπο της f^{-1} και θέλουμε να βρούμε μια τιμή $f^{-1}(x_0)$, τότε θέτουμε $f^{-1}(x_0) = \alpha$ και ισοδύναμα έχουμε $f(\alpha) = f(f^{-1}(x_0)) \Leftrightarrow f(\alpha) = x_0$ αφού $f \circ f^{-1} = I$ (ταυτοτική). Λύνουμε την τελευταία εξίσωση και προσδιορίζουμε το α .

20-35. Αν η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται με $f(x^3 + 1) = 2x - 8$, να βρεθεί η $f^{-1}(2)$.

Λύση

Έστω $f(x^3 + 1) = 2x - 8$ και f^{-1} η αντίστροφη της f , τότε $f^{-1}(2x - 8) = x^3 + 1$.

Θέτουμε $2x - 8 = 2 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$. Έτσι $f^{-1}(2 \cdot 5 - 8) = 5^3 + 1 = 125 + 1 = 126$. Άρα $f^{-1}(2) = 126$.

20-36. Για τη συνάρτηση f γνωρίζουμε ότι $f(f(x)) = 2003x + 2004$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i). Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1} .

ii). Να αποδειχθεί ότι $f(2003x + 2004) = 2003f(x) + 2004$.

iii). Να βρεθεί το $x_0 \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x_0) = x_0$.

Λύση

i). Έστω ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε $f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Leftrightarrow 2003x_1 + 2004 = 2003x_2 + 2004 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Άρα η f είναι "1-1". Θέτουμε $f(x) = y$, οπότε $f(f(x)) = f(y)$ ή $2003x + 2004 = f(y) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2003}(f(y) - 2004)$

ή $f^{-1}(y) = \frac{1}{2003}[f(y) - 2004]$.

Άρα $f^{-1}(x) = \frac{1}{2003}[f(x) - 2004]$ και $x = f^{-1}(y)$.

ii). Ισχύει $f(f(x)) = 2003x + 2004 \Leftrightarrow f(f(f(x))) = f(2003x + 2004)$ ή $2003f(x) + 2004 = f(2003x + 2004)$.

iii). Είναι $f(x_0) = x_0 \Leftrightarrow f(f(x_0)) = f(x_0)$ ή $2003x_0 + 2004 = x_0 \Leftrightarrow 2002x_0 = -2004 \Leftrightarrow x_0 = \frac{-2004}{2002}$.

20-37. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i). Να αποδειχθεί ότι η $g(x) = \frac{f^2(x) - 1}{f(x)}$ αντιστρέφεται.

ii). Εάν $f(\lambda^2) - f(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda^2)} - \frac{1}{f(\lambda)}$ και $f(\lambda) > 0$ και $f(\lambda^2) > 0$, να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

Η συνάρτηση g γράφεται $g(x) = f(x) - \frac{1}{f(x)}$. Αφού $f(x) > 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι $\frac{1}{f(x)}$ γνησίως φθίνουσα και $-\frac{1}{f(x)}$ γνησίως αύξουσα. Άρα η $g(x) = f(x) - \frac{1}{f(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα ως

άθροισμα συναρτήσεων που είναι γνησίως αύξουσες. Αφού η g είναι γνησίως μονότονη, θα είναι και "1-1", οπότε αντιστρέφεται.

ii). Η εξίσωση γράφεται $f(\lambda^2) - \frac{1}{f(\lambda^2)} = f(\lambda) - \frac{1}{f(\lambda)}$ δηλαδή $g(\lambda^2) = g(\lambda)$ και αφού η g είναι "1-1" θα

είναι και $\lambda^2 = \lambda \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

20-38. Έστω ότι η γνησίως μονότονη $f(x)$ περνά από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,0)$. Να λυθούν:

(1). Η εξίσωση $f^{-1}(f(x^2 + 2x) + 2) = 1$, (2). Η ανίσωση $f(f^{-1}(x^3 + x) - 2) > 2$.

20-39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{e}{x} + x$.

α. Να αποδειχθεί ότι ορίζεται η f^{-1}

β. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

20-40. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία:
 $f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x$.

20-41. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη και η C_f διέρχεται από τα σημεία

$A(1,2002)$ και $B(2,2005)$ να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει: $f^{-1} \lceil 3 + f(x^2 - 3) \rceil = 2$.

20-42. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,2)$ και $B(5,9)$.

α. Να λυθεί η εξίσωση $f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) = 9$.

β. Να λυθεί η ανίσωση $f(f^{-1}(x^2 - 8x) - 2) < 2$.

Bonus

20-42 I. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(f \circ f)(x) = 4x + 9$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α. Η f αντιστρέφεται.

β. $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(f(x) - 9)$

γ. $f(4x + 9) = 4f(x) + 9$ (Υποδ. με την βοήθεια της ισότητας (1))

δ. υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\kappa) = \kappa$.

20-42 II. A) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση τέτοια ώστε :

$$(f \circ f)(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

α. δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > x_0$

β. ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ. ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$

B) Αν $f(x) = x^3 + 2x - 2$, τότε:

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = (x^3 + 2x - 2)^3 + 2(x^3 + 2x - 2) - 2 = x$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΑ ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΩΝ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΔΥΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η ισοδυναμία $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ για $y = x$ γράφεται: $f(x) = x \Leftrightarrow x = f^{-1}(x)$. Τι σημαίνει αυτό;

Αν υπάρχουν σημεία στα οποία η C_f τέμνει την διχοτόμο τότε αυτά θα είναι και σημεία από τα οποία περνάει η $C_{f^{-1}}$ και αντίστροφα.

Δεν μπορούμε όμως να ισχυριστούμε ότι τα μόνα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι αυτά στα οποία και οι δυο συναντούν την διχοτόμο.

Ο σίγουρος τρόπος για να βρούμε όλα τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι να λύσουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} |y=f(x) \\ |y=f^{-1}(x) \end{cases} \text{ που γράφεται ισοδύναμα και με την μορφή } \begin{cases} |y=f(x) \\ |f(y)=x \end{cases}$$

Παράδειγμα

Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = -x^3$. Στην συνέχεια να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Λύση

-Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A_f = \mathbb{R}$, είναι προφανώς 1-1 και επομένως έχει αντίστροφη που ο τύπος της βρίσκεται αν λύσουμε ως προς x την εξίσωση:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = -x^3 \Leftrightarrow -y = x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{-y}, y \geq 0 \\ |x = -\sqrt[3]{-y}, y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{-y}, y \geq 0 \\ |x = -\sqrt[3]{y}, y < 0 \end{cases}$$

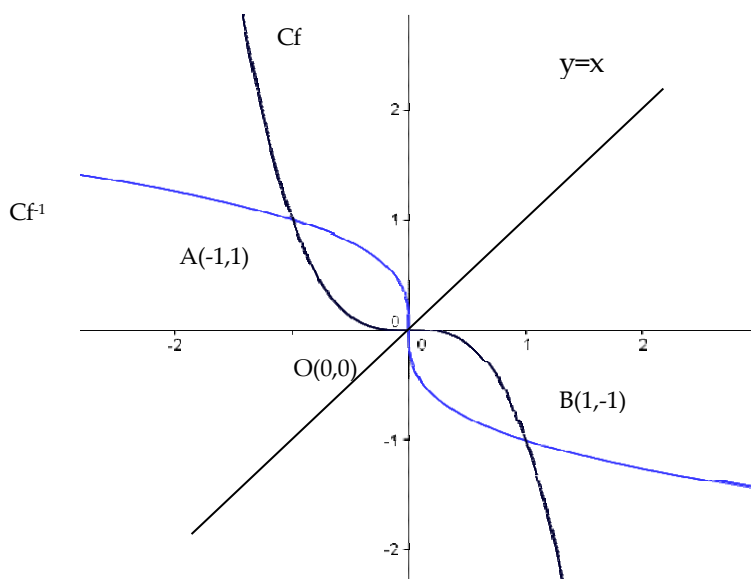
$$\text{Άρα η αντίστροφη έχει τύπο: } f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x} & x \geq 0 \\ |-\sqrt[3]{x}, & x < 0 \end{cases}$$

-Για να βρούμε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} \begin{cases} |y=f(x) \\ |y=f^{-1}(x) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |y=f(x) \\ |f(y)=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y=-x^3 \\ | -y^3 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y=-(-y^3)^3 \\ | -y^3 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y=y^9 \\ | -y^3 = x \end{cases} \\ \begin{cases} |y-y^9=0 \\ | -y^3=x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |y(1-y^8)=0 \\ | -y^3=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y=0 \text{ ή } y=1 \text{ ή } y=-1 \\ | -y^3=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y=0 \text{ ή } y=1 \text{ ή } y=-1 \\ |y=0 \text{ ή } y=-1 \text{ ή } y=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Τελικά, έχουμε τρία κοινά σημεία τα $A(-1,1), B(1,-1), O(0,0)$.

Παρατηρήστε ότι δεν χρησιμοποιήσαμε το τύπο της αντίστροφης, θυμηθείτε το, όταν σε παρόμοια άσκηση δεν είναι δυνατόν να βρεθεί ο τύπος της f^{-1} .



Πότε συμβαίνει τα μόνα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι αυτά στα οποία και οι δυο συναντούν την διχοτόμο;

Μόνο αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Προκύπτουν από την λύση της εξίσωσης:

$$f(x) = x \text{ ή } f^{-1}(x) = x \text{ ή } f^{-1}(x) = f(x)$$

Επανάληψη στις συναρτήσεις

Ενα μικρό πακετάκι λυμένων ασκήσεων που ανακεφαλαιώνουν τις συναρτήσεις. Διαβάστε τις και κατόπιν προσπαθήστε να κάνετε το κριτήριο που ακολουθεί.

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -2x + \alpha, & x > 0 \end{cases}$, α πραγματική παράμετρος.

i) Αν $f(\frac{\alpha^2}{2} + 2) = -\alpha^2 - 4$. Να βρείτε την τιμή του α.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1.

iii) Να βρείτε την αντίστροφη της.

Λύση

i) $\frac{\alpha^2}{2} + 2 > 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ άρα η τιμή της f για $x = \frac{\alpha^2}{2} + 2$ προκύπτει από το δεύτερο κλάδο της

συνάρτησης. Έτσι $f(\frac{\alpha^2}{2} + 2) = -\alpha^2 - 4 \Leftrightarrow -2(\frac{\alpha^2}{2} + 2) + \alpha = -\alpha^2 - 4 \Leftrightarrow$

$$-\alpha^2 - 4 + \alpha = -\alpha^2 - 4 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

ii) Για $\alpha = 0$, η συνάρτηση παίρνει την μορφή: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -2x, & x > 0 \end{cases}$.

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

• Για $x \leq 0$ έχουμε, $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \Leftrightarrow x = -\sqrt{y}$, $y \geq 0$

• Για $x > 0$ έχουμε, $f(x) = y \Leftrightarrow -2x = y \Leftrightarrow x = -\frac{y}{2} > 0$, $y < 0$

Επομένως για κάθε $y \in \mathbb{R} = f(A)$ η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση (ως προς x) την $x = -\sqrt{y}$ όταν $y \geq 0$ και την $x = -\frac{y}{2} > 0$ όταν $y < 0$. Άρα η f είναι συνάρτηση 1-1, οπότε και είναι αντιστρέψιμη.

iii) Επειδή $f(x) = y \Leftrightarrow x = \begin{cases} -\sqrt{y}, & y \geq 0 \\ -\frac{y}{2}, & y < 0 \end{cases}$ η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\frac{x}{2}, & x < 0 \end{cases}$

2) Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\left(\frac{x+f(x)}{2}\right) = x \quad (1). \text{Να αποδείξετε ότι } f(x) = x, x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Θα το αποδείξουμε με άτοπο. Έστω ότι υπάρχει ένα αριθμός $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(\alpha) > \alpha$, τότε επειδή η

$$f \text{ είναι γνησίως αύξουσα θα έχουμε διαδοχικά: } \alpha + f(\alpha) > 2\alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha + f(\alpha)}{2} > \alpha \Rightarrow f\left(\frac{\alpha + f(\alpha)}{2}\right) > f(\alpha) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \alpha > f(\alpha)$$

Άτοπο. Όμοια δείχνουμε ότι δεν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(\alpha) < \alpha$. Άρα $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3) Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,-2)$

i) Να βρείτε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(3)$

ii) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f .

iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(3x-1)+2 < 0$

iv) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

v) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1}) = 2$

vi) να βρείτε τους αριθμούς: $f^{-1}(2)$ και $f^{-1}(-2)$

vii) Να λύσετε την εξίσωση $f(-2 + f^{-1}(x+2)) = 2$

Λύση

i) Η γραφική παράσταση της C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,-2)$ άρα $f(1) = 2$ και $f(3) = -2$

ii) Η f η οποία είναι γνησίως μονότονη και ισχύει $f(3) < f(1)$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα.

iii) $f(3x-1)+2 < 0 \Leftrightarrow f(3x-1) < -2 \Leftrightarrow f(3x-1) < f(3) \stackrel{fg}{\Leftrightarrow} 3x-1 > 3 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}$

iv) Η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

v) $f(e^{x-1}) = 2 \Leftrightarrow f(e^{x-1}) = f(1) \stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} e^{x-1} = 1 \stackrel{e^x}{\Leftrightarrow} e^{x-1} = e^0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

vi) Η γραφική παράσταση της C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,-2)$ άρα $f(1) = 2 \Leftrightarrow 1 = f^{-1}(2)$
 $f(3) = -2 \Leftrightarrow 3 = f^{-1}(-2)$

vii) $f(-2 + f^{-1}(x+2)) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(f(-2 + f^{-1}(x+2))) = f^{-1}(2) \stackrel{1=f^{-1}(2)}{\Leftrightarrow} -2 + f^{-1}(x+2) = 1 \Leftrightarrow$
 $f^{-1}(x+2) = 3 \Leftrightarrow f^{-1}(x+2) = f^{-1}(-2) \Leftrightarrow x+2 = -2 \Leftrightarrow x = -4$

4) Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι $f(f(x))+x=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχτεί ότι:

i) η f είναι συνάρτηση 1-1

ii) αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, τότε $f^{-1}(x) = -f(x)$

iii) η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

iv) Bonus ερώτημα

Να δείξετε ότι η f είναι περιττή και ότι ισχύει $f(0)=0$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(f(x)) = -x$ (1)

i) Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε είναι $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ (2)

και λόγω της (1) η σχέση (2) γίνεται: $-x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Επομένως η f είναι συνάρτηση 1-1, οπότε η f είναι αντιστρέψιμη.

ii) Έστω ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Τότε η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν στην σχέση $f(f(x))+x=0 \Leftrightarrow f(f(x))=-x$ (3) που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θέσουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ έχουμε:

$f(f(f^{-1}(x))) = -f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = -f^{-1}(x) \Leftrightarrow -f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ θα ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε $f(f(x_1)) < f(f(x_2))$ ή $-x_1 < -x_2$ ή $x_1 > x_2$ (άτοπο)

Άρα η f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

Όμοια δουλεύουμε αν υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

iv) Ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$y = f(x) \Rightarrow f(y) = f(f(x)) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} f(y) = -x \Rightarrow f(f(y)) = f(-x) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} -y = f(-x) \Rightarrow -f(x) = f(-x) \quad (4)$$

Από την (4) ισχύει για $x = 0$ $-f(0) = f(-0) \Leftrightarrow -2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$

5) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί την συνθήκη $2f(x^{1974}) - f^2(x^{1974}) \geq 1$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i) Να βρείτε το $f(0)$.

ii) Να βρείτε το $f(1)$.

iii) Η f αντιστρέφεται;

Λύση

i) Για $x = 0$ η (1) παίρνει την μορφή:

$$2f(0) - f^2(0) \geq 1 \Leftrightarrow 2f(0) - f^2(0) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -2f(0) + f^2(0) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (f(0) - 1)^2 \leq 0 \quad (2)$$

αλλά για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(f(0) - 1)^2 \geq 0$ (3). Απο (2), (3) προκύπτει:

$$(f(0) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1 \quad (4)$$

ii) Για $x = 1$ η (1) παίρνει την μορφή:

$$2f(1) - f^2(1) \geq 1 \Leftrightarrow 2f(1) - f^2(1) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -2f(1) + f^2(1) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (f(1) - 1)^2 \leq 0 \quad (5)$$

αλλά για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(f(1) - 1)^2 \geq 0$ (6). Απο (5), (6) προκύπτει:

$$(f(1) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1 \quad (7)$$

iii) Ισχύει $f(1) = f(0)$ άρα η f δεν είναι 1-1 οπότε δεν αντιστρέφεται.

6) (Εξετάσεις 2002)

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε η $f \circ g$ να είναι 1-1.

i) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.

ii) Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $g(f(\ln x) + 1) = g(x + 2)$ να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x + 1$

Λύση

i) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ όπου $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \xrightarrow{f \circ g \text{ 1-1}} x_1 = x_2$ άρα g είναι 1-1.

ii) $g(f(\ln x) + 1) = g(x + 2) \xrightarrow{g \text{ 1-1}} f(\ln x) + 1 = x + 2 \Leftrightarrow f(\ln x) = x + 1 \quad (1)$

Ισχύει για κάθε $x > 0$ άρα ισχύει και για e^x οπότε η (1) γίνεται: $f(\ln e^x) = e^x + 1 \Rightarrow f(x) = e^x + 1$

7) Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, $g(x) = 2 \sin \frac{x}{3}$

i) Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq 2 \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $2^x + 2^{-x} = 2 \sin \frac{x}{3}$

Λύση

$$i) f(x) \geq 2 \Rightarrow 2^x + 2^{-x} \geq 2 \Leftrightarrow 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2 \Leftrightarrow 2^{2x} + 1 \geq 2 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{2x} + 1 - 2 \cdot 2^x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2^x - 1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει για } x \in \mathbb{R}$$

$$2 \geq g(x) \Leftrightarrow 2 \geq 2 \sin \frac{x}{3} \Leftrightarrow 1 \geq \sin \frac{x}{3} \text{ ισχύει για } x \in \mathbb{R}$$

ii) $2^x + 2^{-x} = 2 \sin \frac{x}{3} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ (1) αλλά $f(x) \geq 2 \geq g(x)$ (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε οι (1), (2) ισχύουν

ταυτόχρονα μόνο όταν $f(x) = 2 = g(x)$. Λύνω μια από τις δυο.

$$\text{Έστω } 2 = g(x) \Leftrightarrow 2 = 2 \sin \frac{x}{3} \Leftrightarrow 1 = \sin \frac{x}{3} \Leftrightarrow x = 6k\pi, k \in \mathbb{N} \text{ από τις άπειρες λύσεις για } k=0 \text{ προκύπτει } x=0$$

ικανοποιεί και την $f(x) = 2$.

8) Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$e^{f(x)} + f(x) = g(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g είναι «πάνω» από την γραφική παράσταση της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

iii) να λύσετε την ανίσωση $f(f(x^2 + 2x)) < f(f(x + 2))$

Λύση

i) Ισχύει $e^{f(x)} + f(x) = g(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) = e^{f(x)} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η γραφική παράσταση της g είναι «πάνω» από την γραφική παράσταση της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \xrightarrow{g} g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow e^{f(x_1)} + f(x_1) > e^{f(x_2)} + f(x_2)$ (1)

Η συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $\varphi(x) = e^x + x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Από την σχέση (1)

παίρνουμε $e^{f(x_1)} + f(x_1) > e^{f(x_2)} + f(x_2) \Leftrightarrow \varphi(f(x_1)) > \varphi(f(x_2))$ άρα $f(x_1) > f(x_2)$.

iii) Ισοδύναμα παίρνουμε:

$$f(f(x^2 + 2x)) < f(f(x + 2)) \Leftrightarrow \overset{f \uparrow}{f(x^2 + 2x)} < \overset{f \uparrow}{f(x + 2)} \Leftrightarrow x^2 + 2x < x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \\ \Leftrightarrow -2 < x < 1$$

9) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ με την ιδιότητα $f(1) \neq 0$ και $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $y = x$ το πολύ σε ένα σημείο. Να δείξετε ότι: "

i) αν η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα τότε η f είναι 1-1

ii) η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in \mathbb{R}^*$ είναι αντιστρέψιμη.

Λύση

i) Για $x = y = 1$ η σχέση $f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) \Leftrightarrow f(1) = f^2(1) \Leftrightarrow f(1) - f^2(1) = 0 \Leftrightarrow f(1)(1 - f(1)) = 0 \Leftrightarrow \overset{f(1) \neq 0}{f(1) = 1}$

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow \overset{f(x) \neq 0}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

$$\text{Άρα: } f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x)f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) \frac{1}{f(y)} = \frac{f(x)}{f(y)} \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)} \quad (1)$$

$$\text{Θεωρούμε: } f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{f(x_1)}{f(x_2)} = 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = 1 \quad (2)$$

Η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα και εφόσον $f(1) = 1$ η (2) μας δίνει: $\frac{x_1}{x_2} = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα f 1-1.

$$\text{ii) Αρκεί η } g \text{ να είναι 1-1. Έστω } x_1, x_2 \neq 0 \text{ με } g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow \frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2} \Leftrightarrow \frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{x_1}{x_2} \Leftrightarrow f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{x_1}{x_2} \quad (2)$$

Αφού η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = x$ το πολύ σε ένα σημείο και $f(1) = 1$ θα πρέπει

να ισχύει $\frac{x_1}{x_2} = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα η g είναι 1-1 κατά συνέπεια αντιστρέφεται.

Μίνι κριτήριο αξιολόγησης

Θέμα 1^ο

A. Να σημειώσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

- 1) Οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = x, g(x) = \frac{x^2}{x}$ είναι ισες. Σ Λ
- 2) Υπαρχει συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2,1), B(2,-1974)$ Σ Λ
- 3) Η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης τέμνει τον άξονα y' y το πολύ σε ένα σημείο. Σ Λ
- 4) Η συνάρτηση $f(x) = x^2 / [0, +\infty)$ είναι 1-1. Σ Λ
- 5) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+x-2}$ είναι μονοσύνολο. Σ Λ

B. i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f(x) = e^x + 1, f(x) = \ln(x-1)$

ii) Να ορίσετε (πεδίο ορισμού, τύπου) τις συναρτήσεις $f \circ g, g \circ f$. Είναι $f \circ g = g \circ f$;

Θέμα 2^ο

A) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 3 \\ 1, & -1 < x < 0 \\ x-2, & -3 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

B) Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονη συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(5,9), B(2,3)$

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(3 + f^{-1}(x^2 + 2x)) = 9$

Θέμα 3^ο

A) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + 4\alpha^2 x - (2\beta(2-\beta) - 2)x - x \ln 9, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii) Αν $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, να βρείτε τις τιμές των α, β .

iii) Αν $g(x) = f(x) + x \ln 9$ να δείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ ισχύει:

$$g(x_1) + g(x_2) = g\left(\frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}\right)$$

B) Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με f γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει

$$f(g(x) + 1974) \geq f(x) \geq f(g(x) + 1974).$$

Να βρείτε τον τύπο της g .

Θέμα 4^ο

A) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e + 1}, g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Να δείξετε ότι:

i) Η g είναι 1-1

ii) $(g \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) $g^{-1} = f$