

1. Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε $(2x-1)P(x)=2x^3-5x^2+4x-1$
2. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ n βαθμού. Να δείξετε ότι το άθροισμα των συντελεστών του είναι ίσο με $P(1)$ ενώ ο σταθερός όρος είναι ίσος με $P(0)$.
3. Αν ο βαθμός του $P(x)$ είναι 3 και ο βαθμός του $Q(x)$ είναι 4 και ο βαθμός του $H(x)$ είναι 5 τότε να βρεθεί ο βαθμός του $F(x)=P(x) \cdot Q(x) - H(x)$
4. Αν το $P(x)$ είναι 5^{ου} βαθμού και το $\delta(x)$ είναι 3^{ου} βαθμού. Να βρεθεί ο βαθμός του πηλίκου $\pi(x)$ και του υπολοίπου $u(x)$ της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$.
5. Να βρεθούν τα κ, λ ώστε το $x^4 + \kappa x^3 - \lambda x^2 - x + \kappa + 1$ να έχει παράγοντα το $(x-1)(x+2)$.
($\kappa=1, \lambda=3$)
6. Το $P(x)$ διαιρούμενο με το $x-2$ αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με το $x+3$ αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-2)(x+3)$

Παρατηρήσεις

❖ Για να δείξουμε ότι διαιρείτε ένα πολυώνυμο $P(x)$ με το $(x-a)(x-b)$ πρέπει

1) να διαιρείτε το $P(x)$ με το $x-a$

δηλαδή πρέπει $P(a)=0$

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-a \\ \hline 0 & \pi(x) \end{array} \quad \text{οπότε } P(x)=\pi(x)(x-a) \quad (1)$$

ΚΑΙ

2) το $\pi(x)$ να διαιρείται με το $x-b$

δηλαδή πρέπει $\pi(b)=0$

οπότε $\pi(x)=(x-b)\pi_2(x)$ και από την (1) έχουμε τελικά ότι $P(x)=(x-a)(x-b)\pi_2(x)$

❖ Για να δείξουμε ότι διαιρείται ένα πολυώνυμο $P(x)$ με το $(x-a)(x-b)$ μπορούμε

επίσης να δείξουμε ότι έχει παράγοντες ξεχωριστά το $(x-a)$ και το $(x-b)$ δηλαδή ότι $P(a)=0$ και $P(b)=0$

❖ Για να έχει ένα πολυώνυμο $P(x)$ παράγοντα το $(x-r)^2$

πρέπει το $x-r$ να είναι παράγοντας του

$P(x)$ δηλαδή $P(r)=0$

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-r \\ \hline 0 & \pi(x) \end{array}$$

ΚΑΙ

μετά το $x-r$ να είναι παράγοντας του $\pi(x)$ δηλαδή $\pi(r)=0$

7. Δείξτε ότι τα πολυώνυμα $P(x)=4x^8+3x^2+1$, $Q(x)=3x^4+2x^2-x+4$, $H(x)=x^8+3x^6+2x^2+1$, $\Phi(x)=x^4+3x^2-x+5$ δεν έχουν παράγοντες μορφής $x-p$.

8. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)=ax^3-x^2+\beta x+1$ έχει παράγοντα το $x + \frac{1}{2}$ και διαιρούμενο με το

$x-2$ δίνει υπόλοιπο 15.

i) να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=1$

ii) να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

9. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x-3$ και $x-4$ δίνει αντίστοιχα πηλίκα $\pi_1(x)$ και $\pi_2(x)$ να αποδείξετε ότι $\pi_1(4) = \pi_2(3)$. (Οι διαιρέσεις δεν είναι τέλειες)

10. Να βρεθεί πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού ώστε οι διαιρέσεις του με τα $x-1$, x και $x+2$ να δίνουν υπόλοιπο 4, 3 και 13 αντίστοιχα.

11. Να βρείτε τα κ, λ ώστε το $(x-1)^2$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου $2x^3-5\mu x^2-(\mu+\lambda-1)x-2\mu-3$.

12. Προτάσεις Σωστού - Λάθους - Πολλαπλής Επιλογής

- ο μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν Σ. Λ.
- αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει βαθμό n και το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει βαθμό m με $n > m$ να γράψετε τους βαθμούς των παρακάτω πολυωνύμων.

$$P(x) + Q(x), \quad P(x) - Q(x), \quad P(x) \cdot Q(x), \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (\text{η διαίρεση είναι τέλεια})$$

- αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με ένα πολυώνυμο $Q(x)$ τότε κάθε διαιρέτης του $Q(x)$ διαιρεί το $P(x)$. Σ. Λ.
- το υπόλοιπο της διαίρεσης του $x^{23}-3x^7+2$ με το $x+1$ είναι το
α) 0 β) -4 γ) 4 δ) 2 ε) 1
- το υπόλοιπο της διαίρεσης του $x^{46}+3x^{28}+2$ με το $x+10^{-32}$ είναι
α) θετικός β) αρνητικός γ) μηδέν
- αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει 3 ρίζες και το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει 5 ρίζες τότε το πολυώνυμο $P(x) \cdot Q(x)$ έχει
α) 5 ρίζες β) το πολύ 8 ρίζες γ) ακριβώς 8 ρίζες δ) 3 ρίζες
ε) τουλάχιστον 8 ρίζες
- ένα πολυώνυμο με όλους τους συντελεστές αρνητικούς δεν έχει
α) θετική ρίζα β) αρνητική ρίζα γ) πραγματική ρίζα
- ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές και σταθερό όρο το a_0 τότε κάθε διαιρέτης του a_0 είναι ρίζα του πολυωνύμου Σ. Λ.
- το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x+p$ είναι το $P(p)$ Σ. Λ.
- σε μια διαίρεση πολυωνύμων που δεν είναι τέλεια αν ο διαιρέτης είναι 5 βαθμού τότε το υπόλοιπο είναι το πολύ 4 βαθμού Σ. Λ.
- Αν ο ακέραιος αριθμός p είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές τότε ο p θα διαιρεί τον σταθερό όρο a_0 Σ. Λ.

13. Να λυθεί η εξίσωση $2\sin^3 x - \eta\mu^2 x - 4\sin x - 2 = 0$

14. Στις παρακάτω προτάσεις βάλετε σε κύκλο την Σωστή Απάντηση

- Αν ένα πολυώνυμο $5^{\text{ου}}$ βαθμού διαιρείτε με ένα πολυώνυμο $3^{\text{ου}}$ βαθμού τότε το πηλίκο είναι α. ακριβώς $2^{\text{ου}}$ βαθμού β. το πολύ $2^{\text{ου}}$ βαθμού γ. ακριβώς $3^{\text{ου}}$ βαθμού δ. τουλάχιστον $3^{\text{ου}}$ βαθμού
- Σε μια διαίρεση πολυωνύμων που δεν είναι τέλεια αν ο διαιρέτης είναι $3^{\text{ου}}$ βαθμού τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης μπορεί να είναι α. ακριβώς $3^{\text{ου}}$ βαθμού β. το πολύ $2^{\text{ου}}$ βαθμού γ. ακριβώς $2^{\text{ου}}$ βαθμού δ. τουλάχιστον $2^{\text{ου}}$ βαθμού
- Αν το $P(x) = x^{10} + x^6 + 4x^4 + 5x^2 + 7$ το διαιρούμε με το $x - \rho$ τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης u είναι α. $u > 0$ β. $u < 0$ γ. $u = 0$ δ. $u \leq 0$ ε. τίποτα από όλα αυτά
- Το πολυώνυμο $P(x) = 3(x-1)^3(4x^2-3)^4 + x^3 - 5$ έχει βαθμό α. 3 β. 4 γ. 11 δ. 8 ε. τίποτα από όλα αυτά
- Αν το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ έχει ρίζα το 0 τότε για το a_0 ισχύει α. $a_0 > 0$ β. $a_0 < 0$ γ. $a_0 = 0$ δ. $a_0 = a_n$
- Αν το πολυώνυμο $P(x) = ax^3 - bx^2 + cx - d$ έχει 3 ρίζες τότε το πολυώνυμο $P(x^2)$ έχει α. 3 ρίζες β. το πολύ 6 ρίζες γ. το πολύ 3 ρίζες δ. 6 ρίζες
- Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύουν $P(1) = 1$ και $P(-2) = 0$ τότε ποίο από τα παρακάτω είναι παράγοντας του $P(x)$ α. $x+1$ β. $x-1$ γ. $x+2$ δ. $x-2$
- Το άθροισμα των συντελεστών ενός πολυωνύμου $P(x)$ είναι πάντα ίσο με α. $P(0)$ β. $P(1)$ γ. $P(-1)$
- Ο σταθερός όρος για κάθε πολυώνυμο ισούται με α. $P(0)$ β. $P(1)$ γ. $P(-1)$

15. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $P(x) = 3x^{2026} + 2x^{1024} - 1$ δεν έχει ακέραια ρίζα.

16. Να βρεθούν τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων με τύπους $F(x) = 4x^4 + 5x^2$ και $G(x) = 12x^3 - 6x$

17. Να βρείτε τα σημεία τομής

i) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $F(x) = x^4 - 6x^2 - 9x$ με τον άξονα $x'x$.

ii) των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $F(x) = 3x^3 + 2x^2$ και $g(x) = 300x + 200$

18. Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $(x+1)^6 - 7(x+1)^3 - 8 = 0$ ii) $(x^2 - x + 2)^2 - 10(x^2 - x - 5) - 49 = 0$ iii) $x^2(x+1)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$

iv) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \left(\frac{x}{x+1} + 1\right) = 36$

19. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{17}{4}x$ τέμνει την ευθεία

$\psi = \frac{3}{4}x$ σε δυο σημεία.

20. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x) = -x^3 + 7x + 6$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

21. Να βρείτε τα διαστήματα τα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x) = x^3 + x^2 - 7$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\psi = 7x$.

22. Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} \text{i)} & 4 + \sqrt{x-2} = x & \text{ii)} & \sqrt[3]{16-x^3} = 4-x & \text{iii)} & 2\sin^3 x - \eta\mu^2 x - 4\sin x - 2 = 0 & \text{iv)} & \sqrt{4-x} + \sqrt[4]{4-x} = 12 \\ \text{v)} & x^2 - 6x - 2\sqrt{x^2 - 6x + 2} = 1 & \text{vi)} & \sqrt{1-x^2} = a-2, a \in \mathbb{R} & \text{vii)} & \sqrt{1+9x^2} = \lambda - 3x, \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{viii)} & \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2 = 0 & \text{ix)} & \sqrt[4]{x^2} \sqrt[8]{x^2} = 2\sqrt{2} & \text{x)} & 2\sin^4 x + 8 = 17\eta\mu^2 x \end{aligned}$$

23. Να λυθούν οι ανισώσεις

$$\begin{aligned} \text{i)} & \sqrt{2x+1} < \sqrt{4-3x} & \text{ii)} & \sqrt{x+3} < x+5 & \text{iii)} & x-1 > \sqrt{x+1} & \text{iv)} & \sqrt{2-\sqrt{x}} > \sqrt{x+1} \end{aligned}$$

24. Τα υπόλοιπα της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με τα $x+2$ και $x-1$ είναι 11 και 2 αντίστοιχα.

- i) Ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το x^2+x-2 ;
- ii) αν $u(x)$ είναι το προηγούμενο υπόλοιπο, να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{u(x)+1} = \sqrt{3-x} + 1$
- iii) Αν $Q(x) = P(x+2019)$, ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $(x+2018)$;
- iv) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2020$ είναι ίσο με το άθροισμα των συντελεστών του $Q(x)$ **να εξεταστεί πρώτα ...**