

1. Αν $f(x)=1+\ln x$ και $g(x)=\begin{cases} x+2 & x \leq 1 \\ 1-x^2 & x > 1 \end{cases}$ να βρείτε την $g \circ f$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -2x & x > 0 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι είναι συνάρτηση 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη της.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{για } -3 \leq x < 0 \\ x+3 & \text{για } 0 \leq x < 5 \end{cases}$

i) να σχεδιάσετε την C_f ii) να βρείτε την μονοτονία, ακρότατα και το σύνολο τιμών της.
iii) να εξετάσετε αν η f είναι 1-1

4. Εστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(f(x))^3 + f(x) = x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 και έπειτα να βρείτε την αντίστροφη της.

5. Εστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(f(x)) + (f(x))^3 = 2x + 3$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

6. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι :

$f(a+b) = f(a) + f(b)$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι

i) $f(0) = 0$ ii) $f(-x) = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

iii) αν η f έχει μοναδική ρίζα το 0, τότε η f είναι συνάρτηση 1-1 και για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$ ισχύει $f^{-1}(x+\psi) = f^{-1}(x) + f^{-1}(\psi)$.

7. i) Αν $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$, $g(x) = \sin(x)$ και $h(x) = \sqrt{x}$,
να βρείτε την συνάρτηση $f \circ (g \circ h)$.

ii) Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = 3x - 2$ και $f(x) = ax + b$ με $a, b \in \mathbb{R}$.

Να προσδιορίσετε τους a και b ώστε να ισχύει $g \circ g = f$

8. Εστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι

i) η f αντιστρέφεται ii) η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$

9. Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = [-4, 2]$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης i) $g(x) = f(5 - x^2)$. ii) $h(x) = f(1 - 2|x|)$

10. Αν $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\sqrt{x-1}$ να βρεθούν οι συναρτήσεις:

i) $g \circ f$ ii) $f \circ g$ iii) $f \circ f$ iv) $g \circ g$

- Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση $F : A \rightarrow R$ είναι 1-1 τότε χρησιμοποιούμε εναλλακτικά τους παρακάτω τρόπους

- αποδεικνύουμε ότι αν $F(x_1)=F(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$
- αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση $F(x)=\psi$, $\psi \in R$ έχει ακριβώς μια ρίζα ως προς $x \in A$
- αποδεικνύουμε ότι είναι γνησίως μονότονη
- αν μας δίνουν την γραφική της παράσταση τότε δεν πρέπει να υπάρχουν δυο σημεία της με την ίδια τεταγμένη
- αν η συνάρτηση είναι κλαδική τότε δείχνουμε ότι είναι 1-1 σε κάθε κλάδο και επιπλέον βρίσκουμε τα επιμέρους σύνολα τιμών κάθε κλάδου και διαπιστώνουμε ότι η τομή τους είναι το κενό.

- Πως βρίσκουμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης $F : A \rightarrow R$

1. διαπιστώνουμε ότι είναι αντιστρέψιμη δηλαδή ότι η F είναι 1-1
2. επιλύουμε την εξίσωση $\psi=F(x)$ ως x δηλαδή βρίσκουμε το $F^{-1}(\psi)$ και ταυτόχρονα βρίσκουμε το σύνολο τιμών της F το $F(A)$

η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $F^{-1} : F(A) \rightarrow A$

- Αν $F : A \rightarrow F(A)$ και $F^{-1} : F(A) \rightarrow A$ τότε $\psi=F(x) \Leftrightarrow x=F^{-1}(\psi)$

11. i) Αν $f : R \rightarrow R$ και $g : R \rightarrow R$ με $f(x)=2x-1$ και $(g \circ f)(x)=x^2-2x+3$ να βρείτε την συνάρτηση g .

ii) Αν είναι $f(x)=2x-3$ και $(f \circ g)(x)=4x^2-10x-1$ για κάθε $x \in R$ να βρείτε την g .

12. Έστω η συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,-2)$.

i) να βρείτε την μονοτονία της f

ii) να λύσετε την ανίσωση $f(3x-1) + 2 < 0$

iii) να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

iv) να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1})=2$

v) $f^{-1}(2)=\dots$ $f^{-1}(-2)=\dots$

vi) να λύσετε την εξίσωση $f(-2+f^{-1}(x+2))=2$

13. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφονται και να βρείτε την αντίστροφη τους συνάρτηση.

i) $f(x) = \frac{e^x + 3}{e^x}$ ii) $f(x) = \ln(2 + e^x) - x$. iii) $f(x) = \log \sqrt{3 - 10^x}$ iv) $f(x) = \sqrt{5 + \sqrt{6 - x}}$

14. Να βρείτε την συνάρτηση $g \circ f$ αν i) $f(x) = \sqrt{x+2}$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$

ii) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \frac{1}{x-3}$

15. Αν $f(x) = 2x - 1$ και $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ να βρείτε τις $g \circ f$ και $f \circ g$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right)$

i) να βρείτε το πεδίο ορισμού της

ii) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

iii) να βρείτε την f^{-1}

iv) να λύσετε την ανίσωση $f(x) > f(f(x))$

17. i) Αν $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{x}{x+1}$ να βρείτε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

ii) Αν $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \frac{1}{2x}$ να βρείτε τις $g \circ f$ και $f \circ g$.

18. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί την σχέση $f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 5$, $x \in \mathbb{R}$

i) να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii) να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x - 2) = f(2 - x)$

19. Αν $f(x) = \frac{2 \ln x - 3}{5}$ και $g(x) = 1 + \ln x$ να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την $F = f^{-1} \circ g$

20. Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $(g \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

ii) να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 - 8x + 7) = f(x - 1)$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\sqrt{2-x}$

i) να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

ii) να βρείτε την αντίστροφη f^{-1} της συνάρτησης f .

iii) να χαράξετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές τους παραστάσεις.

iv) να βρείτε τα κοινά τους σημεία.

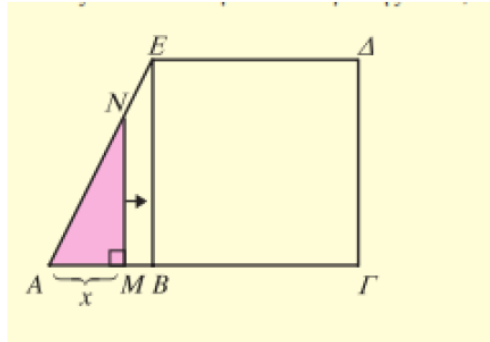
22. Να βρεθεί συνάρτηση f τέτοια ώστε i) $f(g(x)) = 12x^2 - 14x + 4$, αν $g(x) = 1 - 2x$

ii) $f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ αν $g(x) = -(x-1)^2$.

23. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) - f^2(x) + 2f(x) = x^2 - x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε την f .
25. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x - \ln x) + f(x - 1) = \ln x + 3$, $x > 0$.
Αν η f είναι γνησίως αύξουσα να λύσετε τις
i) $f(x) = 2$ ii) $f(e^x - 1) < 2$
26. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x + \psi) = f(x) + f(\psi)$, για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι
i) $f(0) = 0$ ii) η f είναι περιττή
iii) να λύσετε την εξίσωση $f(4x^2 - 2024) + f(4x^2 + 2024) = 2f(8x - 4)$
27. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $(1, +\infty)$ και ισχύει $f^2(x) - 2f(x) = e^{2x} - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
i) να βρείτε την f
ii) να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την f^{-1}
28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sqrt{x-1} + 2$
i) να μελετήσετε την μονοτονία της και τα ακρότατα
ii) να βρείτε την αντίστροφη της f αν υπάρχει
iii) να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις C_f , $C_{f^{-1}}$
29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{e}{x} + x$
i) να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
ii) να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$
30. Δίνεται η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με : $f^3(x) - \ln(x-1) = 4$ για κάθε $x > 1$
i) να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
ii) να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$
iii) να βρείτε τον τύπο της f^{-1}
31. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 2f(x) = 3 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
i) να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
ii) να δείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$
iii) αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε
α) να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f
β) να λύσετε την ανίσωση $f(e^{x-1} + \ln x) > f(2-x)$
32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + e^x$
i) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
ii) να εξετάσετε αν ορίζεται η f^{-1}
iii) να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x - 1$
iv) να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x - 1$
v) να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα
vi) να λύσετε την εξίσωση $f(2^x) + f(5^x) = f(3^x) + f(7^x)$

Στο παρακάτω σχήμα το $BΓΔΕ$ είναι τετράγωνο με πλευρά 2 και ισχύει $AB=1$, $ΑΓ=3$ και $x=AM$, το M διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $ΑΓ$.



Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που διαγράφεται δίνεται

από την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$. **(M.9)**

Δ2. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f . **(M.5)**

Δ3. Να αποδείξετε ότι f αντιστρέφεται και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων με την f . **(M.5)**

Δ4. Να προσδιορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . **(M.6)**

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

B1. Να δείξετε ότι f περιττή. **(M.4)**

B2. Να προσδιορίστε τις συναρτήσεις α) $f \circ g$, β) $g \circ f$. **(M.6)**

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και προσδιορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . **(M.10)**

B4. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{e^{2\sin x} - 1}{e^{2\sin x} + 1} = \frac{e - 1}{e + 1}$ στο $[0, \pi]$. **(M.5)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = 2\sqrt{-x}$, $g(x) = 3\ln(x+2)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f \cdot g, \frac{g}{f}$.

Μονάδες 10

γ) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$. (Πεδίο ορισμού και τύπο)

Μονάδες 10

δ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και η g γνησίως αύξουσα

Μονάδες 20

ε) i) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f^{-1} και g^{-1} .

ii) Να βρείτε τις αντίστροφες των συναρτήσεων f και g .

Μονάδες 20

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + e^x - 1$.

i. Να δείξετε ότι για κάθε y το οποίο ανήκει στο σύνολο τιμών της f , η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μοναδική λύση ως προς x .

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(\frac{1-x}{e^x}\right) + 1 = f(1) + f^{-1}(e)$.

iii. Να δείξετε ότι $\frac{f(x)}{e^x - 1} > 0$ για κάθε $x \neq 0$.