

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  και
- $f(α) \neq f(β)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $ζ$  μεταξύ των  $f(α)$  και  $f(β)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον,  $x_0 \in (α, β)$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = ζ$ .

**Μονάδες 6**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

**Μονάδες 5**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A, B$  αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της  $f$  με τη  $g$ , δηλαδή η συνάρτηση  $g \circ f$ , ορίζεται αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .

**β)** Ισχύει ότι  $|\eta\mu x| \leq |x|$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**γ)** Ισχύει  $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ .

**δ)** Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα είναι το ολικό της μέγιστο.

ε) Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[α, β]$ . Αν  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [α, β]$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

και  $h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

**B1.** Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις  $f = \frac{g}{h}$  και  $r = g \cdot h$ .

**Μονάδες 6**

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1 \quad \text{και} \quad r(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1.$$

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι  $f^{-1} = f$  (μονάδες 5), όπου  $f^{-1}$  είναι η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $r$ .

**Μονάδες 6**

**B4.** Να λύσετε την εξίσωση  $\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x)$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2x+4+e^{\lambda}, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2+4x-3+\lambda, & x \geq 2, \end{cases}$$

με  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 0$ .

**Μονάδες 5**

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη και στη συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.

**Μονάδες 6**

- Γ3.** i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα  $[0,3]$ .  
(μονάδες 4)

ii) Να βρείτε, αν υπάρχει,  $\xi \in (0,3)$  τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο  $\Gamma(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $\Delta(0, f(0))$  και  $E(3, f(3))$ .

(μονάδες 4)

**Μονάδες 8**

- Γ4.** Κινητό σημείο  $M$  ξεκινά από το σημείο  $A(2,0)$  και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα  $v=0,5$  μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν  $O$  είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία  $\hat{\omega} = \hat{AOM}$  τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο  $M$  θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

#### **ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \frac{\ln x + \alpha x}{x},$$

όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $f((0, +\infty)) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$ .

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$ .

**Μονάδες 4**

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει μοναδική ρίζα,  $x_0$ , η οποία ανήκει στο διάστημα  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

**Μονάδες 6**

- Δ3.** i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)=f(4)$  έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις  $x_1=2$  και  $x_2=4$ .

(μονάδες 3)

- ii) Να λύσετε την ανίσωση  $2^x \leq x^2$  στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .

(μονάδες 5)

**Μονάδες 8**

- Δ4.** Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}.$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες  $x = -\ln 2$  και  $x = 0$ , και περικλείεται από αυτές, τον άξονα  $x'x$  και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ .

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**



**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΤΡΙΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2024**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = 1$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln \frac{1}{x}) = 0$ .

**β)** Κάθε συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**γ)** Η συνάρτηση  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει ότι  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ .

**δ)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ ,

τότε ισχύει 
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx.$$

**ε)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = 2\ln x - 1$   
και η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = x - 2$ .

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$ .

**Μονάδες 6**

Αν  $h(x) = 2\ln(x - 2) - 1$ ,  $x > 2$ , τότε:

**B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $h$  ως προς την κυρτότητα.

**Μονάδες 6**

**B3.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφή της  $h^{-1}$  (μονάδες 4).

**Μονάδες 7**

**B4.** Αν  $h^{-1}(x) = 2 + e^{\frac{x+1}{2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = (h^{-1}(x) - 3) \cdot (x^3 - 8)$$

στο  $[-1, 2]$ .

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + \lambda x, & x < -1 \\ \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}, & x \geq -1 \end{cases}, \text{ όπου } \alpha > 1 \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 1$ .

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 2$  (μονάδες 5) και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(-1, 0)$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει:

- $|g(x) - g(y)| \leq (x - y)^2$ , για κάθε  $x, y \in (0, \frac{\pi}{2}]$
- $g(x) = f(x) \eta\mu x$ , για κάθε  $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$
- $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση  $g$  είναι σταθερή για κάθε  $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ .

(Μονάδες 4)

ii) ο τύπος της συνάρτησης  $f$  είναι  $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x}$ .

(Μονάδες 1)

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι «1-1» (μονάδες 3) και να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha) - 2}{x - \frac{\pi}{4}} + \frac{f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3}}{x - \sqrt{2}} = 0, \text{ με } \alpha \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο  $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4. i)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$H(x) = \frac{1}{2} \ln(1 - \sin x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \sin x), \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}]$$

είναι μια παράγουσα της συνάρτησης  $h(x) = \frac{\eta \mu x}{1 - \sin^2 x}$  στο  $(0, \frac{\pi}{2}]$ .  
(Μονάδες 2)

**ii)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και τις ευθείες  $y = 2$  και  $x = \frac{\pi}{2}$ .

(Μονάδες 6)  
**Μονάδες 8**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

## ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , τότε η συνάρτηση  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 6

- A2.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α,β]$  του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

Μονάδες 5

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$ .

- β)** Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

- γ)** Για κάθε συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , ισχύει ότι  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ .

- δ)** Αν η  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια «ένα προς ένα» (“1-1”) συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y=x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

- ε)** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}$  και η συνάρτηση  $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $h(x) = \ln x$ .

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f = g \circ h$ .

**Μονάδες 5**

Έστω  $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}$ ,  $x > 0$ .

**B2.** i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι  $\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$  (μονάδες 4).

**Μονάδες 8**

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

**B4.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1 + x^2)}{f(x)}$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x} + \alpha, & x \geq 1 \end{cases},$$

όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ , για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 x f(x) dx = 1.$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 0$ .

**Μονάδες 4**

**Γ2.** i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 1$  (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα  $x'Ox$  (μονάδες 4).

**Μονάδες 8**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι «ένα προς ένα» (“1-1”) (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

**Μονάδες 6**

- Γ4.** Έστω  $(\varepsilon): y = -x + 2$  η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  με  $x \geq 1$ , την ευθεία  $(\varepsilon)$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = e$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται συνάρτηση  $f: (0,2) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x - 1} = \ell \in \mathbb{R}.$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\kappa = 3$ .

**Μονάδες 4**

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς δύο ρίζες  $x_1, x_2$  με  $x_1 < 1 < x_2$  (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι  $x_1 < \frac{1}{3}$  (μονάδες 2).

**Μονάδες 6**

Στα παρακάτω ερωτήματα,  $x_1$  και  $x_2$  είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο  $M(\xi, f(\xi))$ , με  $\xi \in (0,1)$ , στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  ισούται με

$$\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}.$$

**Μονάδες 6**

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

**Δ4.** Αν επιπλέον  $F$  και  $G$  είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $(0,2)$  με  $F(x_1) = G(x_2) = 0$ , να αποδείξετε ότι:

i)  $F(x_2) + G(x_1) = 0$

(μονάδες 4)

ii) η εξίσωση

$$x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα  $(x_1, x_2)$ .

(μονάδες 5)

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**



**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ 09 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$ , για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Fermat.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις  $g \circ f$  και  $f \circ g$ , τότε οι  $g \circ f$  και  $f \circ g$  δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

**β)** Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$ .

**γ)** Εάν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $f(x_0)$ , τότε η σύνθεσή τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

**δ)** Αν η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$ , με  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f(x) = 0$ , για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**ε)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $g, h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπους

$$g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad \text{και} \quad h(x) = \ln x.$$

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f = g \circ h$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Αν  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ,  $x > 1$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι  $f^{-1} = f$  (όπου  $f^{-1}$  είναι η αντίστροφη της συνάρτησης  $f$ ).

**Μονάδες 6**

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

**B4.** Να εξετάσετε αν η εξίσωση  $f(x) = \sin x$  έχει λύση στο  $(1, +\infty)$ .

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = 0$
- $f(2) = 2$
- $f'(2) = 1$
- $f''(x) < 0$  για κάθε  $x \in [1, 2]$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$

i. έχει κοινό σημείο με την ευθεία  $(\epsilon_1): y = -x + 2$  (μονάδες 3) και

ii. εφάπτεται στην ευθεία  $(\epsilon_2): y = x$  (μονάδες 3)

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι  $\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x}$ , για κάθε  $x \in (1, 2)$ .

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι:

i.  $f(x) \geq 2x - 2$ , για κάθε  $x \in [1, 2]$ . (μονάδες 2)

ii.  $1 < \int_1^2 f(x) dx < \frac{3}{2}$ . (μονάδες 4)

**Μονάδες 6**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = \begin{cases} e^x & , x \geq 0 \\ -e^{-x} + 2 & , x < 0 \end{cases}$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της  $f$  σε σημείο  $A(x_1, f(x_1))$  με  $x_1 > 0$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων  $O(0, 0)$ , έχει εξίσωση  $y = e \cdot x$ .

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) του ερωτήματος Δ1 και η γραφική παράσταση της  $f$  έχουν, εκτός από το σημείο επαφής  $A$ , ακριβώς ένα ακόμα κοινό σημείο  $B(x_0, f(x_0))$ .

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και την εφαπτομένη της, (ε) του ερωτήματος Δ1, ανάμεσα στις ευθείες  $x = x_0$  και  $x = 1$ . Να δώσετε την απάντησή σας ως συνάρτηση του  $x_0$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Δύο κινητά ξεκίνησαν ταυτόχρονα από το σημείο  $B$  του ερωτήματος Δ2. Το ένα κινήθηκε κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $BO$ , όπου  $O$  είναι η αρχή των αξόνων, και το άλλο κινήθηκε κατά μήκος της γραφικής παράστασης της  $f$ , έτσι ώστε οι τεταγμένες των θέσεών τους να παραμένουν ίσες μεταξύ τους κάθε χρονική στιγμή. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή απόσταση ανάμεσα στα κινητά κατά τη διάρκεια της κίνησής τους;

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c,$$

όπου  $c \in \mathbb{R}$ , είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και

- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c,$$

με  $c \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε η ευθεία  $X = X_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $0 < \alpha < 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$ .

**β)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$ , παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$  και  $f'(x) \neq 0$ , για όλα τα  $x \in (0,1)$ , τότε  $f(0) \neq f(1)$ .

**γ)** Η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\phi x$  είναι παραγωγίσιμη στο

$$R_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\} \text{ και ισχύει } f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}.$$

δ) Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 1$ .

ε) Αν  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$  και η συνάρτηση  $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = \sqrt{x}$ .

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Αν  $h(x) = (x - 1)^2$ ,  $x \in [0, 1]$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  είναι "1-1" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $h^{-1}$  της  $h$  (μονάδες 6).

**Μονάδες 9**

**B3.** Έστω  $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$ ,  $x \in [0, 1]$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση: 
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x} & , \quad x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & , \quad x=1 \end{cases}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση  $\varphi$  ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο  $[0, 1]$ . (μονάδες 6)

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$ , όπου  $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . (μονάδες 4)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$  και για την παράγωγο  $f'$  της  $f$  ισχύει ότι:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & , \quad x < -1 \\ 3x^2 - 1 & , \quad x > -1 \end{cases} .$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & , \quad x \leq -1 \\ x^3 - x & , \quad x > -1 \end{cases} .$

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ( $\epsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  σε σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 > -1$ , η οποία τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο  $-2$ .

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Έστω  $y = 2x - 2$  η εξίσωση της ευθείας ( $\epsilon$ ) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο  $M(x, y)$  με  $x > 2$  κινείται κατά μήκος της ευθείας ( $\epsilon$ ). Έστω ακόμα  $E$  το εμβαδόν του τριγώνου  $MKG$ , όπου  $K$  είναι η προβολή του σημείου  $M$  στον άξονα  $x'x$  και  $G$  είναι το σημείο με συντεταγμένες  $(2, 0)$ . Τη χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία το σημείο  $M$  διέρχεται από το σημείο  $B(3, 4)$  ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $M$  είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $E$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right] .$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x) = x - \ln(3x)$$

**Δ1.** i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς δύο ρίζες  $x_1, x_2$ , με  $x_1 < 1 < x_2$ . (μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή. (μονάδες 2)

**Μονάδες 8**

Στα παρακάτω ερωτήματα,  $x_1$  και  $x_2$  είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

**Δ2.** Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και τον άξονα  $x'x$ , να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) .$$

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι:  $f(2 - x_1) < 0$ .

**Μονάδες 4**

**Δ4.** Να εξετάσετε αν η εξίσωση:  $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$  έχει λύση.

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**



**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**β)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $f(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ .

**γ)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε  $f'(x_0) = 0$ .

**δ)** Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$ .

**ε)** Η συνάρτηση  $f(x) = \ln|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x}{x-1} \text{ και}$$

$$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } g(x) = \ln x.$$

- B1.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

- B2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = g(x)$  έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(e, e^2)$ .

**Μονάδες 8**

- B3.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $\varphi = g \circ f$ .

**Μονάδες 6**

- B4.** Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο  $h(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ . Αν

$$\varphi(x) = \ln x - \ln(x-1), \quad x \in (1, +\infty),$$

να εξετάσετε αν  $\varphi = h$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- Η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta \mu x}{x} = 0.$

- $f'(x)f''(x) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- Γ1.** i. Να αποδείξετε ότι  $f(0) = 0$  και  $f'(0) = 1$  (μονάδες 4).

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 0$  (μονάδες 2).

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

**Μονάδες 4**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι «1-1» (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f^{-1}$  (μονάδες 5).

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^x, & 0 < x \leq \frac{2}{e} \end{cases}$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

**Μονάδες 6**

**Δ2.** i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της  $f$  (μονάδες 3).

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  (μονάδες 5).

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\alpha, \beta \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$  υπάρχει  $\xi \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$  τέτοιο ώστε  $f(\xi) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}$ .

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι  $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} x f(x) dx > \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ .

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ****ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**

**ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .
- Μονάδες 7**
- A2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.
- Μονάδες 4**
- A3.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;
- Μονάδες 4**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α) Ισχύει  $|ημx| < |x|$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ .
- β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  ισχύει ότι  $f(f^{-1}(x)) = x$ , για κάθε  $x \in A$ .
- γ) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .
- δ) Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .
- ε) Αν η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[α,β]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[α,β]$  μια μέγιστη τιμή,  $M$ , και μια ελάχιστη τιμή,  $m$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι  $f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-x}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να δείξετε ότι  $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 3**

**B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 6**

**B3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

**Μονάδες 9**

**B4.** Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  (μονάδες 4).

(ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \lambda$ , για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ , με  $\alpha < -3$ .

**Γ1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 6**

**Γ2.** (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο  $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$  (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό  $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$  για το οποίο ισχύει  $f'(\xi) = 0$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 6**

Γ4. Να δείξετε ότι  $f(x) \geq -1$ , για κάθε  $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\ell n x = \frac{1}{x} \quad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα,  $x_0$ , η οποία ανήκει στο  $(1, e)$ .

**Μονάδες 4**

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το  $x_0$  είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  έχει τύπο  $f(x) = (\ell n x_0) \cdot (x+1) - \ell n x - 1$ .

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0$ , το  $f(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 6**

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x \cdot e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

**Μονάδες 8**

Δ4. Έστω η συνάρτηση  $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , συνεχής, με  $f(x) > \varphi(x)$ , για κάθε  $x > 0$ . Θεωρούμε τα σημεία  $A(x, f(x))$  και  $B(x, \varphi(x))$ , με  $x > 0$ . Αν η απόσταση των σημείων  $A$  και  $B$  γίνεται ελάχιστη στο  $x = x_0$ , να δείξετε ότι το  $x_0$  είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης  $\varphi$ .

**Μονάδες 7**

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**  
**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**



**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

Αν

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε  $x$  εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ ,

να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f, g$  είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $\frac{f}{g}$  είναι το  $A \cap B$ .

**β)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε  $f'(x_0) = 0$ .

**γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , παρουσιάζει στο σημείο  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  καμπή, τότε  $f''(x_0) = 0$ .

**δ)** Για οποιαδήποτε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , ισχύει ότι  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**ε)** Κάθε συνάρτηση  $f$  που είναι συνεχής σε σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$

και η συνάρτηση  $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = \sqrt{x}$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφη της είναι η συνάρτηση  $f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ ,  $x < 0$ .

**Μονάδες 8**

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h = g \circ f^{-1}$  είναι η  $h(x) = \frac{x-1}{x}$ ,  $x < 0$ .

**Μονάδες 6**

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $h$  του ερωτήματος B2.

**Μονάδες 6**

**B4.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( e^{-h(x)} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$ , όπου  $h$  είναι η συνάρτηση του ερωτήματος B2.

**Μονάδες 5**

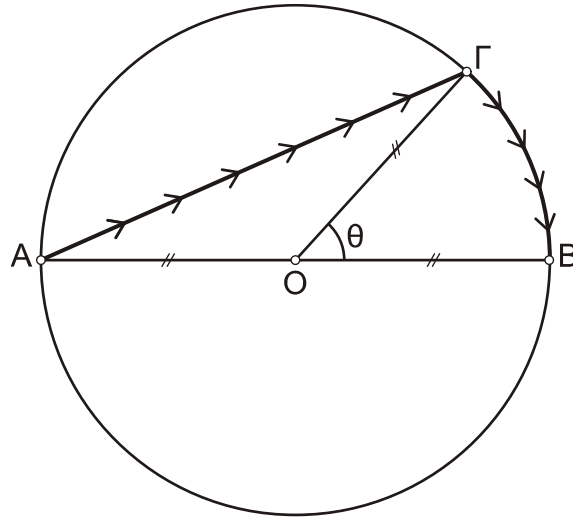
### ΘΕΜΑ Γ

Κυκλική λίμνη έχει κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R = 1 \text{ km}$ . Ένας μαθητής μπορεί να κωπηλατεί με σταθερή ταχύτητα  $v_1 = 2 \text{ km/h}$  και μπορεί να βαδίζει με σταθερή ταχύτητα  $v_2 = 4 \text{ km/h}$ .

Ο μαθητής θέλει να κάνει μια βόλτα στη λίμνη, ξεκινώντας από το σημείο  $A$  του σχήματος και καταλήγοντας στο αντιδιαμετρικό του σημείο  $B$ .

Ο μαθητής μπορεί:

- I. Να συνδυάσει κωπηλασία και βάδισμα, κωπηλατώντας ευθύγραμμα από το σημείο  $A$  σε σημείο  $\Gamma$  της περιφέρειας της λίμνης, τέτοιο ώστε η γωνία  $\widehat{BO\Gamma} = \theta$ ,  $\theta \in (0, \pi)$  και στη συνέχεια να βαδίσει κατά μήκος του τόξου  $\Gamma B$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.
- II. Να κωπηλατήσει ευθύγραμμα από το σημείο  $A$  στο σημείο  $B$  ( $\theta = 0$ ).
- III. Να βαδίσει στην περιφέρεια της λίμνης από το  $A$  στο  $B$  ( $\theta = \pi$ ).



- Γ1.** Να αποδείξετε ότι ο χρόνος (σε ώρες) που χρειάζεται, για να διανύσει την παραπάνω διαδρομή, ως συνάρτηση της γωνίας  $\theta$  (σε ακτίνια) είναι

$$t(\theta) = \frac{1}{4}\theta + \csc \frac{\theta}{2}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Δίνεται ότι σε έναν κύκλο ακτίνας  $R$  το μήκος  $S$  ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία  $\theta$  (σε ακτίνια) είναι  $S = R \cdot \theta$ .

**Μονάδες 8**

- Γ2.** Να βρείτε την τιμή της γωνίας  $\theta$  ώστε ο χρόνος της βόλτας του μαθητή να γίνεται μέγιστος.

**Μονάδες 9**

- Γ3.** Σε ποια από τις επιλογές (I), (II) ή (III) ο χρόνος μετάβασης από το σημείο A στο σημείο B είναι ο ελάχιστος δυνατός; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = e^x$

και συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = -x^2 + \alpha x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

για την οποία το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{-g(x)} + \alpha x)$  υπάρχει στο  $\mathbb{R}$ .

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -1$ .

**Μονάδες 6**

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  που διέρχεται από το σημείο  $M(-1, 0)$  είναι η ευθεία  $\varepsilon: y = x + 1$  (μονάδες 3).

Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η ευθεία  $(\varepsilon)$  εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) > g(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x-1)-x}{x-k} + \frac{f(x)-g(x)}{x-k-1} = 0, \quad k \in \mathbb{R} - \{1\}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(k, k+1)$ .

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  και
- $f(α) \neq f(β)$ ,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(α)$  και  $f(β)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (α, β)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση  $f$ , ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει  $f'(x) > 0$ ».

**α)** Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**).

(μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^{2v+1}} \right) = +\infty$ , για κάθε  $v \in \mathbb{N}$ .

**β)** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα, τότε η  $g \circ f$  ορίζεται, αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .

**γ)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  έχει άξονα συμμετρίας τον  $y'y$ .

**δ)** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

- ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση  $f$  παραγωγίζεται στο  $\mathbb{R}$  και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα  $x'x$ . Αν υπάρχει κάποιο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  της  $C_f$ , του οποίου η απόσταση από τον άξονα  $x'x$  είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι οριζόντια.

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = e^x.$$

- B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

**Μονάδες 5**

- B2.** Αν  $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ , με  $x > 0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι '1-1' και να βρείτε την αντίστροφή της.

**Μονάδες 8**

- B3.** Αν  $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ , με  $x > 1$ , να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\varphi$  ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 6**

- B4.** Αν  $\varphi$  είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x).$$

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \text{ με } \lambda > 0.$$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 1$ .

**Μονάδες 5**

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, 1)$ , η οποία σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία ίση με  $\frac{\pi}{4}$ .

**Μονάδες 6**

- Γ3.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

- Γ4.** Ένα σημείο  $M(\alpha, f(\alpha))$ , με  $\alpha \leq 0$ , κινείται στη γραφική παράσταση της  $f$ . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $M$  δίνεται από τον τύπο  $\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}$ .

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $M$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $B$ . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $B$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ , κατά την οποία το σημείο  $M$  έχει τετμημένη  $-1$ .

**Μονάδες 8****ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$ .

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (0, 1)$ , στο οποίο η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1.$$

**Μονάδες 7**

- Δ2.** Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \ln \left( \frac{1}{x - x_0} \right) \right],$$

όπου  $x_0$  το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

**Μονάδες 6**

- Δ3.** Αν  $x_0$  είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) + x = x_0$  για  $x \in (x_0, 1)$  έχει μοναδική ρίζα  $\rho$ .

**Μονάδες 5**

- Δ4.** Αν  $x_0$  είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και  $\rho$  είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι  $f(x_0) > f(\rho) (f'(k) + 1)$  για κάθε  $k \in (\rho, 1)$ .

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**  
**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**



**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f+g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:  
 $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό μέγιστο;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

**β)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$

**γ)** Για κάθε συνάρτηση  $f$ , το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της  $f$ , εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της  $f$ .

**δ)**  $(\ln |x|)' = -\frac{1}{x}$ , για κάθε  $x < 0$ .

**ε)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 + \alpha$  και  $g(x) = x + \beta$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες ισχύει  $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = \beta = -1$ .

**Μονάδες 5**

**B2.** Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

**Μονάδες 6**

**B3.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $g^{-1} \circ f$  και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $\varphi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)}$ .

**Μονάδες 6**

**B4.** Έστω η συνάρτηση  $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $f(x) + 2 \leq h(x) \leq g(x) + 2$ , για κάθε  $x \in [0, 1]$ .

i) Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$  (μονάδες 3).

ii) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h(x) + 7} - 3}{h^2(x) - 4}$  (μονάδες 5).

**Μονάδες 8**

### **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x^3$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι από το σημείο  $N(-2, f(-2))$  διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της  $f$  και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Έστω  $(\varepsilon): y = 3x - 2$  η μία από τις δύο εφαπτομένες του ερωτήματος **Γ1**. Έστω ακόμα  $(\zeta)$  ευθεία η οποία είναι παράλληλη στην  $(\varepsilon)$  και διέρχεται από το σημείο  $M(0, \alpha)$  με  $-2 < \alpha < 2$ . Να αποδείξετε ότι ανάμεσα στις ευθείες  $x = -1$  και  $x = +1$  υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής της  $(\zeta)$  με τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**Μονάδες 9**

**Γ3.** Ένα υλικό σημείο  $M(x, x^3)$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = x^3$  με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του  $x'(t) > 0$ . Το σημείο  $M$  ξεκινά από το σημείο  $N(-2, -8)$  και καταλήγει στην αρχή των αξόνων  $O$ . Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου  $M$  είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;

**Μονάδες 8**

## ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \cdot \sin^3 x + f'(x) \cdot \sin^2 x \cdot \eta\mu x - 1 = 0$ , για κάθε  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,
- $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x - \epsilon\phi x$ ,  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  είναι σταθερή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sin x}$ ,  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

Μονάδες 6

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ , το οποίο και να βρείτε.

Μονάδες 6

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 3\sqrt{2}$  στο διάστημα  $(0, \frac{\pi}{2})$  έχει ακριβώς δύο ρίζες  $\rho_1, \rho_2$ , με  $\rho_1 < \rho_2$ .

Μονάδες 6

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι  $f'(\rho_2)(4\rho_2 - \pi) > 4\sqrt{2}$ , όπου  $\rho_2$  η ρίζα του ερωτήματος **Δ3**.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

**α)** Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ ;  
(Μονάδες 2)

**β) i.** Πότε μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  έχει αντίστροφη;  
(Μονάδα 1)

**ii.** Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i)**, πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$ ;  
(Μονάδες 3)

**Μονάδες 6**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .  
Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 5**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

**α)** Για κάθε συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  με  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in A$ , ισχύει ότι η  $f$  είναι σταθερή στο  $A$ .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος  
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

**β)** Για κάθε συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , όταν υπάρχει το όριο της  $f$  καθώς το  $x$  τείνει στο  $x_0 \in A$ , τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της  $f$  στο  $x_0$ .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος  
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

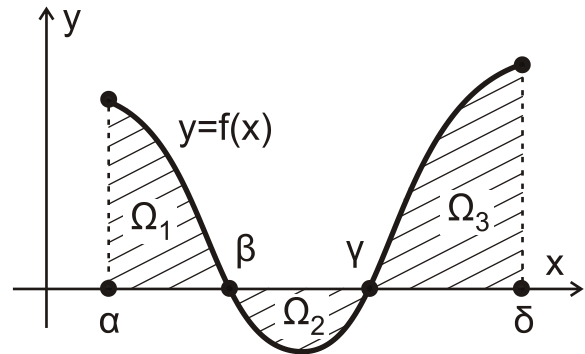
**Μονάδες 8**

**A5.** Έστω η συνάρτηση  $f$  του διπλανού σχήματος.

Αν για τα εμβαδά των χωρίων  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  και  $\Omega_3$  ισχύει ότι

$E(\Omega_1)=2$ ,  $E(\Omega_2)=1$  και  $E(\Omega_3)=3$ ,

τότε το  $\int_a^\delta f(x)dx$  είναι ίσο με:



α) 6

β) -4

γ) 4

δ) 0

ε) 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

**Μονάδες 2**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = e^{-x} + \lambda$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ , η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  την ευθεία  $y = 2$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 2$ .

**Μονάδες 3**

**B2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) - x = 0$  έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα  $(2, 3)$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

**Μονάδες 6**

**B4.** Έστω  $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$ ,  $x > 2$ . Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1. \end{cases}$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = 1$ .

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 4**

**Γ3. i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα  $x_0$ , η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

**ii.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$  είναι αδύνατη στο  $(x_0, +\infty)$ .

(Μονάδες 4)

**Μονάδες 8**

**Γ4.** Ένα σημείο  $M(x, y)$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = f(x)$ ,  $x \geq 1$ .

Τη χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία το σημείο  $M$  διέρχεται από το σημείο  $A(3, 10)$ , ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $M$  είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $\overset{\Delta}{MOK}$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ , όπου  $K(x, 0)$  και  $O(0, 0)$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$  όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και η ευθεία  $(\varepsilon): y = -x + 2$ , η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο της  $A(1, 1)$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -1$  και  $\beta = 2$ .

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την ευθεία  $(\varepsilon)$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $x = 2$ .

**Μονάδες 5**

- Δ3.** i. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) \geq -1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
(Μονάδες 3)
- ii. Να αποδείξετε ότι  $f(\lambda + \frac{1}{2}) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$ ,  
για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
(Μονάδες 5)  
**Μονάδες 8**
- Δ4.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = -x^3 - x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.  
**Μονάδες 8**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**  
**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

**Μονάδες 7**

- A2.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 4**

- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η γραφική παράσταση της  $|f|$  αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της  $f$  που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'x$  και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα  $x'x$ , των τμημάτων της γραφικής παράστασης της  $f$  που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.

**β)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , ισχύει:

$$\text{Αν } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0, \text{ τότε } f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

**γ)** Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης  $f$  μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της  $f$ .

**δ)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  για  $x$  κοντά στο  $x_0$ .

**ε)** Μια πολυωνυμική συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 10**



**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x) = x^2 + 1 \text{ και}$$

$$g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } g(x) = \sqrt{x-2}.$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g \circ f$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$  και τύπο  $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ .

**Μονάδες 5**

- B2.** Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $g \circ f$  στο  $+\infty$ .

**Μονάδες 6**

- B3.** Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο  $x_0 = 2$  της συνάρτησης  $h: A - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $h(x) = \frac{(g \circ f)(x)}{x - 2}$ .

**Μονάδες 6**

- B4.** Έστω η συνάρτηση

$$\varphi(x) = \begin{cases} (g \circ f)(x), & x \in A \\ 1 - x^2, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση  $t(x) = \varphi(x) \cdot \eta\mu(\pi x)$  στο διάστημα  $[0, 2]$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει ότι  $f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2}$  για κάθε  $x > 0$  και της οποίας η γραφική παράσταση  $C_f$

διέρχεται από το σημείο  $M(1, 1)$ . Έστω το σημείο  $A(\frac{3}{2}, 0)$ .

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \in [0, +\infty)$ .

**Μονάδες 6**

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι το σημείο  $M$  είναι το μοναδικό σημείο της  $C_f$  που απέχει από το σημείο  $A$  τη μικρότερη απόσταση.

**Μονάδες 6**

- Γ3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $M$  και τον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 7**

- Γ4.** Δίνεται επιπλέον μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση  $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $0 < g(x) < 1$  για κάθε  $x \geq 0$ . Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = g(x)$  έχει μοναδική ρίζα  $x_0$ , η οποία ανήκει στο  $(0, 1)$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο  $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$ .

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) + f(1-x) = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  (μονάδες 2) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = 1$  ισούται με  $\frac{1}{2}$  (μονάδες 4).

**Μονάδες 6**

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 2f^2(x) dx < 1$ .

**Μονάδες 6**

- Δ4.** Να λύσετε στο διάστημα  $(0, \frac{\pi}{2})$  την εξίσωση  $f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x) = f(\epsilon\phi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x})$ .

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

- Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
- Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
- Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 7**

- A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι “1-1” είναι και γνησίως μονότονη.»

- α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)
- β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

- A3.** Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

**Μονάδες 4**

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  με  $x \in \mathbb{R}$  έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

**β)** Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

**γ)** Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$ .

**δ)** Αν η  $f$  είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$ .

**ε)** Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

- B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

**Μονάδες 8**

- B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 4**

- B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

- B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.)

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους  $x$  m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του  $x$ , είναι

$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0, 8).$$

**Μονάδες 5**

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

**Μονάδες 10**

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με  $5 \text{ m}^2$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  με  $\alpha > 1$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του  $\alpha > 1$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

**Μονάδες 3**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$ , τέτοια ώστε η συνάρτηση  $f$  να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_1$  και τοπικό ελάχιστο στο  $x_2$ .

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = f(1)$  είναι αδύνατη στο  $(\alpha, x_2)$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Αν  $\alpha = 2$  να αποδείξετε ότι :

$$\int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} \, dx > -\frac{32}{15}.$$

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ Α**

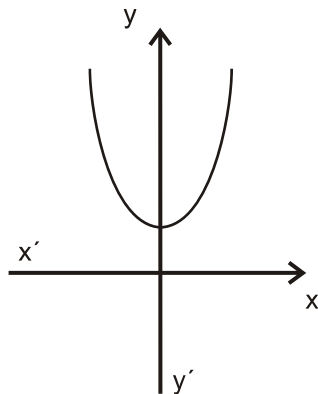
**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

**Μονάδες 7**

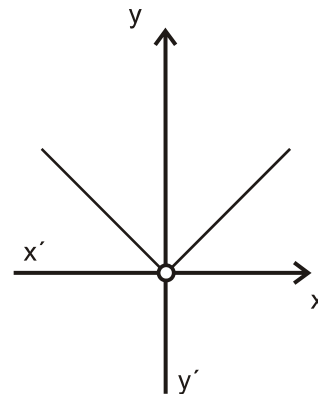
**A2.** Έστω  $A$  ένα μη κενό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ ;

**Μονάδες 4**

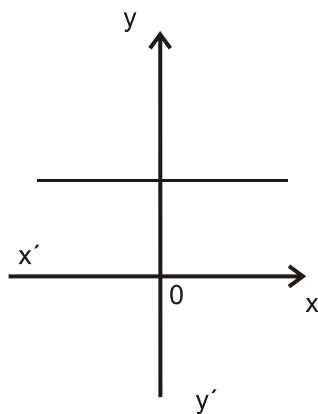
**A3.** Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g, F, G, H, T$ .



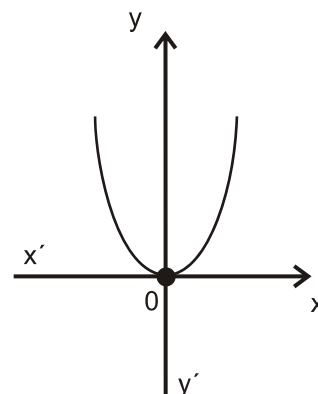
**(f)**



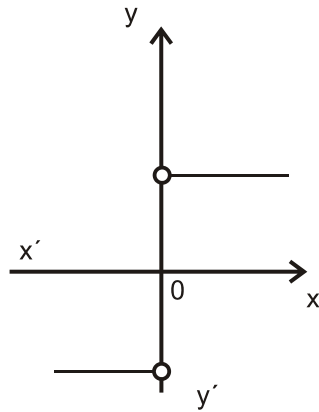
**(g)**



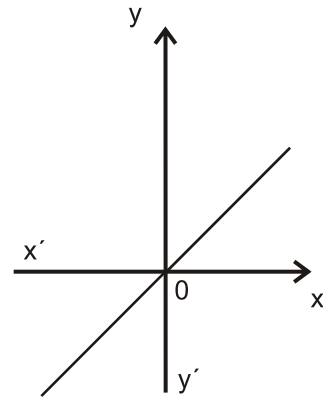
**(F)**



**(G)**



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

**Μονάδες 4**

**A4.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$ ».

- α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. (μονάδα 1)
- β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.
- β) Αν μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι '1-1', τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το  $[0, 1]$  και σύνολο τιμών το  $[2, 3]$ , τότε ορίζεται η  $f \circ g$  με πεδίο ορισμού το  $[0, 1]$  και σύνολο τιμών το  $[2, 3]$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \leq 1 \end{cases}$ .

- Β1.** Να υπολογίσετε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής.  
**Μονάδες 3**

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι  $\alpha = 1$ .

- Β2.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[\frac{1}{2}, 4]$ .  
**Μονάδες 6**

- Β3.** Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία  $y = -\frac{1}{4}x + 2018$  και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.  
**Μονάδες 7**

- Β4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$  και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.  
**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο:  $f(x) = 2 \eta \mu x - x$ .

- Γ1.** Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$  (τοπικά και ολικά).  
**Μονάδες 5**
- Γ2.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x_0 \in [0, \pi]$  η γραφική παράσταση της  $f$  και η εφαπτομένη της στο  $A(x_0, f(x_0))$  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.  
**Μονάδες 5**

- Γ3.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^{\pi} f(x) \cdot \sigma \upsilon \nu x \, dx$ .

**Μονάδες 8**



- Γ4.** α) Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$  . (μονάδες 2)
- β) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x)) \cdot \ln x]$  . (μονάδες 5)

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο:  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$  .

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$ , για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 5**

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$  είναι το διάστημα  $(0, 1)$ .

**Μονάδες 5**

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) > 2^{f(x)} - 1$ , για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 5**

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0, \text{ όπου } 0 < \alpha < 1,$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς  $x$ , μία στο διάστημα  $(0, 1)$  και μία στο διάστημα  $(1, 2)$ .

**Μονάδες 5**

- Δ5.** Αν  $F$  είναι μια αρχική συνάρτηση της  $f$  στο διάστημα  $(0, +\infty)$  με  $F(e) = e \cdot \ln 2$ , να αποδείξετε ότι  $\ln 2 < F(1) < \ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right)$ .

**Μονάδες 5**

⋮

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

- A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:  
«Κάθε συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής στο  $x_0$ , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

- A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

**Μονάδες 4**

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$ .

**β)** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A, B$  αντίστοιχα, τότε η  $g \circ f$  ορίζεται αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .

**γ)** Για κάθε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**δ)** Αν  $0 < \alpha < 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$ .

**ε)** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln x$ ,  $x > 0$  και  $g(x) = \frac{x}{1-x}$ ,  $x \neq 1$ .

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

**Μονάδες 5**

**B2.** Αν  $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ ,  $x \in (0,1)$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

**Μονάδες 6**

**B3.** Αν  $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\varphi$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 7**

**B4.** Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $\varphi$  και να τη σχεδιάσετε.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -\eta\mu x$ ,  $x \in [0, \pi]$ , και το σημείο  $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  της γραφικής παράστασης της  $f$  που άγονται από το  $A$ , τις οποίες και να βρείτε.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Αν  $(\varepsilon_1)$ :  $y = -x$  και  $(\varepsilon_2)$ :  $y = x - \pi$  είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  και τη γραφική παράσταση της  $f$ , και να

αποδείξετε ότι  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$ , όπου:

- $E_1$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και τις ευθείες  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$ , και
- $E_2$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και τον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$ .

**Μονάδες 4**

Γ4. Να αποδείξετε ότι  $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$ .

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta \mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[-1, \pi]$  και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τη γραφική παράσταση της  $g$ , με  $g(x) = e^{5x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , τον άξονα  $y'y$  και την ευθεία  $x = \pi$ .

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση  $16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$ .

Μονάδες 8

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι  $f'(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , αν για κάποιο  $x_0 \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f''(x_0) = 0$ , τότε το  $x_0$  είναι θέση σημείου καμπής της  $f$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθές, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδές. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A3.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ισχύει  $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ , τότε

α) η εξίσωση  $f(x) = 0$  δεν έχει λύση στο  $(\alpha, \beta)$ .

β) η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία λύση στο  $(\alpha, \beta)$ .

γ) η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο  $(\alpha, \beta)$ .

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο  $(\alpha, \beta)$ .

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$

στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = G(\alpha) - G(\beta)$ .

**β)** Μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$ , ώστε  $f(x_1) < f(x_2)$ .

**γ)** Αν ένα σημείο  $M(\alpha, \beta)$  ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης  $f$ , τότε το σημείο  $M'(\beta, \alpha)$  ανήκει στη γραφική παράσταση  $C'$  της  $f^{-1}$ .

**δ)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$ , αν  $f(\alpha) = f(\beta)$ , τότε υπάρχει ακριβώς ένα  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = 0$ .

**ε)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ισχύει  $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = 0$ , τότε  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  του διπλανού σχήματος με πλευρά  $2\text{cm}$ . Αν το τετράγωνο  $EZH\Theta$  έχει τις κορυφές του στις πλευρές του  $AB\Gamma\Delta$ :

**B1.** Να εκφράσετε την πλευρά  $EZ$  συναρτήσει του  $x$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου  $EZH\Theta$  δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 2$$

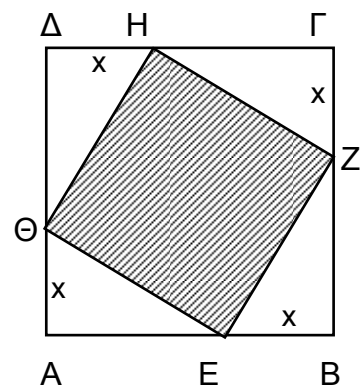
**Μονάδες 4**

**B3.** Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  το εμβαδόν του τετραγώνου  $EZH\Theta$  γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

**Μονάδες 9**

**B4.** Να εξετάσετε αν υπάρχει  $x_0 \in [0, 2]$ , για το οποίο το εμβαδόν  $f(x_0)$  του αντίστοιχου τετραγώνου  $EZH\Theta$  ισούται με  $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$ .

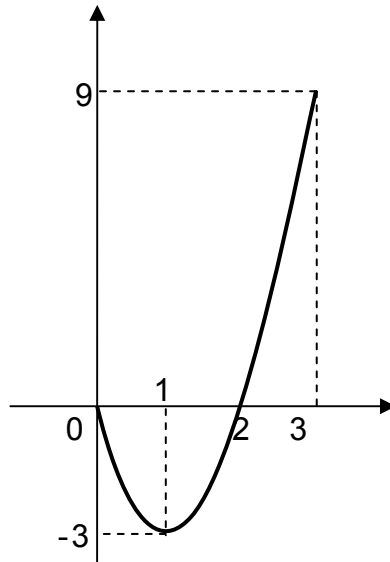
**Μονάδες 6**



**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω συνάρτηση  $f$ , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[0, 3]$ , για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της  $f'$  δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0) = 2$ ,  $f(1) = 0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της  $f'$  και των ευθειών  $x=0$  και  $x=3$  ισούται με 8 τ.μ.
- Η  $f$  δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα  $[0, 3]$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(3) = 2$ ,  $f(2) = -2$  και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)-2}$ , δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της  $f$ .

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (2, 3)$  για το οποίο δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$ .

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**Μονάδες 4**



**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} -\frac{\eta\mu x}{x} + \alpha, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 2, & x > 0. \end{cases}$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  στο διάστημα  $[0, 2]$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

**Μονάδες 2**

Αν η  $f$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

- Δ2.** Να βρείτε την τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 2**

- Δ3.** Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 8**

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι:  $\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^2 f(x) dx < \frac{3\pi}{2} - 1$ .

**Μονάδες 7**

- Δ5.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f\left(\frac{-\pi}{2} \cdot x\right) = f\left(\frac{-\pi}{2} \cdot e^{-x}\right)$  έχει μοναδική λύση στο  $(0, 1)$ .

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)**  
**ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής.

Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε το  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\alpha) - G(\beta)$ .

**β)** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**γ)** Κάθε συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , είναι σταθερή στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ .

**δ)** Μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της, η εξίσωση  $y = f(x)$  έχει ακριβώς μια λύση ως προς  $x$ .

- ε) Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α,β]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[α,β]$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- B1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της  $f$ .

**Μονάδες 6**

- B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

**Μονάδες 9**

- B3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Μονάδες 7**

- B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **B1**, **B2**, **B3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

**Μονάδες 3**

**ΘΕΜΑ Γ**

- Γ1.** Να λύσετε την εξίσωση  $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

- Γ2.** Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιούν την σχέση  $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 8**

- Γ3.** Αν  $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι κυρτή.

**Μονάδες 4**

- Γ4.** Αν  $f$  είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x + 3) - f(x)$$

όταν  $x \in [0, +\infty)$ .

**Μονάδες 9**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta \mu x \, dx = \pi$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f(\pi) = \pi$  (μονάδες 4) και  $f'(0) = 1$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 7**

**Δ2. α)** Να δείξετε ότι η  $f$  δεν παρουσιάζει ακρότατα στο  $\mathbb{R}$ . (μονάδες 4)

**β)** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . (μονάδες 2)

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x}{f(x)}$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να δείξετε ότι  $0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$ .

**Μονάδες 6**

### ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')**  
**ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) & ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι  $f'(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι η ευθεία  $y = \ell$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1.$

**β)** Αν  $f(x) = \ln|x|$  για κάθε  $x \neq 0$ , τότε  $f'(x) = \frac{1}{|x|}$  για κάθε  $x \neq 0$ .

**γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

**δ)** Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού  $n \geq 2$ , η οποία έχει ασύμπτωτη.

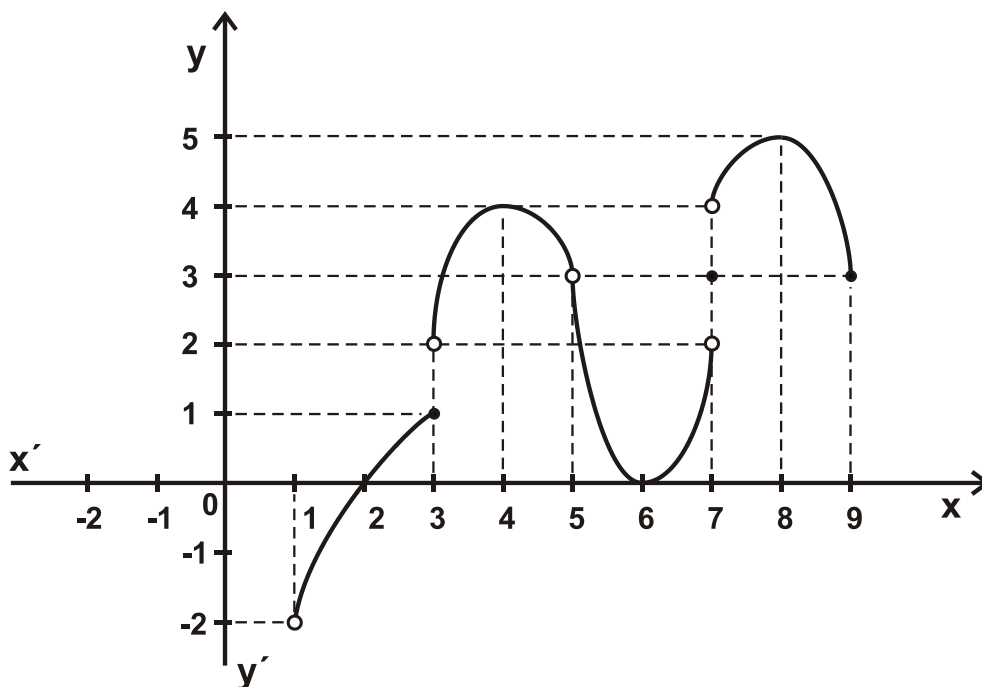
**ε)** Για κάθε συνάρτηση  $f$ , συνεχή στο  $[a, \beta]$ , ισχύει:

$$\text{αν } \int_a^\beta f(x) dx > 0, \text{ τότε } f(x) > 0 \text{ στο } [a, \beta].$$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .



**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Μονάδες 2**

**B2.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$       β)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$   
γ)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$       δ)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$       ε)  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 7**

**B3.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$       β)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$       γ)  $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 9**

**B4.** Να βρείτε τα σημεία στα οποία η  $f$  δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 3**

**B5.** Να βρείτε τα σημεία  $x_0$  του πεδίου ορισμού της  $f$  για τα οποία ισχύει  $f'(x_0) = 0$ .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 4**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^3$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  (μονάδες 4).

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει:

$$f(\eta\mu x) > f(x - \frac{1}{6}x^3).$$

**Μονάδες 9**

**Γ3.** Ένα σημείο  $M$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = x^3$ ,  $x \geq 0$  με  $x = x(t)$  και  $y = y(t)$ . Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης  $y(t)$  του  $M$  είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης  $x(t)$ , αν υποθεθεί ότι  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

**Μονάδες 4**

**Γ4.** Αν  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 f(x) g(x) dx .$$

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1 & , 0 < x < 1 \\ 1 & , x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1} & , x > 1 \end{cases}$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  (μονάδες 3) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ . (μονάδες 2)

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι το  $x_0 = 1$  είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της  $f$ .

**Μονάδες 8**

**Δ3.** i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα στο  $(0, +\infty)$ . (μονάδες 3)



ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΝΕΟ & ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ  
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ii) Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $x = x_0$ , όπου  $x_0$  η μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο  $(0, +\infty)$ , να αποδείξετε ότι

$$E = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}.$$

(μονάδες 4)

**Μονάδες 7**

- Δ4.** Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[1, +\infty)$  να αποδείξετε ότι  
 $(x + 1)F(x) > xF(1) + F(x^2)$ , για κάθε  $x > 1$ .

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α,β]$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α,β]$  και
- $f(α) \neq f(β)$ ,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(α)$  και  $f(β)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (α,β)$ , τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  και  $x_0$  ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό ελάχιστο;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν για δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορίζονται οι συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε ισχύει πάντοτε ότι  $f \circ g = g \circ f$ .

**β)** Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών  $\alpha + \beta i$  και  $\gamma + \delta i$  είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

**γ)** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $(\sin x)' = \eta \mu x$ .

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

δ) Έστω  $f$  μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[α,β]$ . Αν ισχύει ότι  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [α,β]$  και η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ .

ε) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$|z - 4| = 2|z - 1|.$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho=2$ .

**Μονάδες 7**

**B2.** Έστω  $w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$ , όπου  $z_1, z_2$  δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B1.

Να αποδείξετε ότι:

α) Ο  $w$  είναι πραγματικός και

(μονάδες 4)

β)  $-4 \leq w \leq 4$ .

(μονάδες 7)

**Μονάδες 11**

**B3.** Αν  $w = -4$ , όπου  $w$  είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος B2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$  και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές τις εικόνες  $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$  των μιγαδικών αριθμών  $z_1, z_2$  και  $z_3$ , με  $z_3 = 2iz_1$ , είναι ισοσκελές.

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Γ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα  $(0, +\infty)$ .

**Μονάδες 6**

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = \frac{e^2}{5}$$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

**Μονάδες 8**

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι

$$\int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2x f(4x)$$

για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 4**

- Γ4.** Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_{2x}^{4x} f(t) dt, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) [e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και
- $f(0) = 0$ .

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 5**

- Δ2.** α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .

(μονάδες 3)

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , την ευθεία  $y = x$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = 1$ .

(μονάδες 4)

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \left( e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln |f(x)| \right].$$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt}{x - 3} + \frac{8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt}{x - 2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(2, 3)$ .

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν η  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής  $G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$  είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$ , και
- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή  $G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f:A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1;

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε η ευθεία  $X=X_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $z \in \mathbb{C}$ , τότε  $\overline{(z^v)} = (\overline{z})^v$ , όπου  $v$  θετικός ακέραιος.

**β)** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

**γ)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$

**δ)** Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ε) Αν  $f$  είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[α,β]$  και  $G$  είναι μία παράγουσα της  $f$  στο  $[α,β]$ , τότε πάντοτε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $Z, W$  για τους οποίους ισχύουν:

- $|z - 3i|^2 - 18 = |z - 3|^2$
- $|w - i| = \operatorname{Im}(w) + 1$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $Z$  είναι η ευθεία με εξίσωση  $x - y - 3 = 0$

**Μονάδες 9**

- B2.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $W$  είναι η παραβολή με εξίσωση  $y = \frac{1}{4}x^2$

**Μονάδες 9**

- B3.** Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $Z, W$  να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου  $|Z - W|$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{x-1} - \ln x, x \in (0, +\infty)$

- Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 6**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Γ2.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g$  με

$$g(x) = \int_1^{h(x)} \sqrt{t^2 - 1} \, dt,$$

$$\text{όπου } h(x) = f(x^2 + 1) - f(2) + 1.$$

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1$$

έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες  $x_1, x_2$

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Αν για τις ρίζες  $x_1, x_2$  του ερωτήματος **Γ3** ισχύει ότι  $x_1 < x_2$ , τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (x_1, 1)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(\xi, f(\xi))$  να διέρχεται από το σημείο  $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$(x^2 - x) \cdot f'(x) + x \cdot f(x) = 1, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^x f(t) \, dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{f(t)}{t} \, dt, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

**Μονάδες 4**



**Δ3. α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = - \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{f(t)}{t} dt, \quad x \in (0, +\infty)$$

είναι κοίλη.

(μονάδες 5)

**β.** Έστω  $E$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $g$ , την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $g$  στο σημείο που η γραφική παράσταση της  $g$  τέμνει τον άξονα  $x'$  και την ευθεία  $x=3$ . Να αποδείξετε ότι  $E < 2$ .

(μονάδες 4)

**Μονάδες 9**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι

$$\int_{\frac{1}{x}}^x f(t) dt \geq \frac{1}{x} \int_{\frac{1}{x}}^x t f(t) dt, \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ωρα δυνατής αποχώρησης: 18:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 8**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) μέγιστο, το  $f(x_0)$ ;

**Μονάδες 3**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  ισχύει  $z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z)$

(μονάδες 2)

**β)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

(μονάδες 2)

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

γ) Αν μια συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

δ) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ , τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

(μονάδες 2)

ε) Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

(μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

**B1.** Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

**Μονάδες 9**

**B2.** Αν  $z_1 = 1+i$  και  $z_2 = 1-i$  είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = 3 \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{39}$$

είναι ίσος με  $-3i$

**Μονάδες 8**

**B3.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $u$  για τους οποίους ισχύει

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

όπου  $w, z_1, z_2$  οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B2.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $h$  ως προς την κυρτότητα.

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να λύσετε την ανίσωση

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$  στο  $+\infty$ , καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο  $-\infty$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Δίνεται η συνάρτηση  $\varphi(x) = e^x (h(x) + \ln 2)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $\varphi(x)$ , τον άξονα  $x'Ox$  και την ευθεία  $x = 1$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 0$  και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Δίνεται επιπλέον ότι η  $f$  είναι κυρτή.

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^{2f'(x)} f(u) du = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η  $x = 0$

(μονάδες 7)

β) Ένα υλικό σημείο  $M$  ξεκινά τη χρονική στιγμή  $t=0$  από ένα σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 < 0$  και κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = f(x)$ ,  $x \geq x_0$  με  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \geq 0$ . Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης  $x(t)$  του σημείου  $M$  είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του  $y(t)$ , αν υποθεθεί ότι  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

(μονάδες 4)

**Μονάδες 11**

**Δ3.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 (x - 2)^2, \quad x \in (0, +\infty)$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο  $x_0$  στο οποίο, όμως, η  $f$  είναι συνεχής. Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η εξίσωση  $|z - z_0| = \rho$ ,  $\rho > 0$  παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο  $K(z_0)$  και ακτίνα  $\rho$ , όπου  $z, z_0$  μιγαδικοί αριθμοί.

(μονάδες 2)

**β)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ . Ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \right)$$

(μονάδες 2)

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

γ) Αν είναι  $0 < \alpha < 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$

(μονάδες 2)

δ) Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ , τότε υποχρεωτικά  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ .

(μονάδες 2)

ε)  $\left( \int_{\alpha}^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) g'(x)$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

(μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  για τους οποίους ισχύουν:

- $w = \frac{2z-i}{2z+i}, \quad z \neq -\frac{i}{2}$
- $w$  φανταστικός

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$ , είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα

$\rho = \frac{1}{2}$ , εκτός από το σημείο  $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$  του κύκλου.

**Μονάδες 10**

**B2.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , του ερωτήματος B1, να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει  $|w| = 1$

**Μονάδες 8**

**B3.** Αν είναι  $z = \frac{1}{2}$ , τότε να αποδείξετε ότι

$$w^4 + i w^7 = 0$$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}} & , \text{ αν } x > 0 \\ 0 & , \text{ αν } x = 0 \end{cases}$$

**Γ1.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 0$

**Μονάδες 4**

**Γ2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$

**Μονάδες 7**

**Γ3.** i) Να αποδείξετε ότι, για  $x > 0$ , ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x) = f(4) \Leftrightarrow x^4 = 4^x$$

(μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^4 = 4^x$ ,  $x > 0$ , έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις  $x_1 = 2$  και  $x_2 = 4$

(μονάδες 6)

**Μονάδες 8**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (2, 4)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) \int_2^\xi f(t) dt = f(\xi) (\sqrt{2} - f(\xi))$$

**Μονάδες 6**



**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A = (0, +\infty)$$

με σύνολο τιμών  $f(A) = \mathbb{R}$ , τέτοια, ώστε

$$e^{f(x)} (f^2(x) - 2f(x) + 3) = x, \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται (μονάδες 4) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$  (μονάδες 3)

**Μονάδες 7**

Για τα ερωτήματα **Δ2** και **Δ3**, δίνεται ότι

$$f^{-1}(x) = e^x (x^2 - 2x + 3), \quad x \in \mathbb{R}$$

- Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f^{-1}$  ως προς την κυρτότητα. (μονάδες 3)  
Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f^{-1}$ , την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f^{-1}$  στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα  $y'y$ , και την ευθεία  $x=1$  (μονάδες 6)

**Μονάδες 9**

- Δ3.** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  θεωρούμε τα σημεία  $A(x, f^{-1}(x))$ ,  $B(f^{-1}(x), x)$  των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f^{-1}$  και  $f$  αντίστοιχα.

- i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f^{-1}$  και  $f$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, είναι ίσο με 1 (μονάδες 3)
- ii) Να βρείτε για ποια τιμή του  $x \in \mathbb{R}$  η απόσταση των σημείων  $A$ ,  $B$  γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

(μονάδες 6)

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[α, β]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[α, β]$ , τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

**Μονάδες 7**

- A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

**Μονάδες 4**

- A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η εξίσωση  $|z - z_0| = \rho$ ,  $\rho > 0$  παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο  $K(z_0)$  και ακτίνα  $\rho^2$ , όπου  $z, z_0$  μιγαδικοί αριθμοί.

**β)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$

**γ)** Ισχύει ότι:  $|\eta \mu x| \leq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**δ)** Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

**ε)** Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 10**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$ , είναι κύκλος με κέντρο  $K(2,0)$  και ακτίνα  $\rho=1$  (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό  $z$  που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι  $|z| \leq 3$  (μονάδες 3)

**Μονάδες 8**

- B2.** Αν οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2$  που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης  $w^2 + \beta w + \gamma = 0$ , με  $w$  μιγαδικό αριθμό,  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , και

$$|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta = -4 \quad \text{και} \quad \gamma = 5$$

**Μονάδες 9**

- B3.** Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **B1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός  $v$  ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$|v| < 4$$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f$  παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$  και
- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 9**

**Γ2.** Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x)) = 1$$

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi x_0$$

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$
- $f(1) = 1$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x) = \int_{\alpha}^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt, \quad x \in (1, +\infty) \text{ και } \alpha > 1$$

Να αποδείξετε ότι:

**Δ1.**  $f'(1) = 0$  (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0 = 1$  (μονάδες 2).

**Μονάδες 6**

**Δ2.** η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο  $\mathbb{R}$

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \quad (\text{μονάδες 6})$$

**Μονάδες 9**

**Δ3.** η  $g$  είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha - 1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha), \quad x > 1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

**Μονάδες 10**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Ποια σημεία λέγονται *κρίσιμα σημεία* της  $f$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό  $z$  ισχύει  $|\bar{z}| = |-z|$   
(μονάδες 2)

**β)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  με την ίδια τεταγμένη.

(μονάδες 2)

**γ)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$

(μονάδες 2)

**δ)** Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις  $f, g$  παραγωγίσιμες στο  $x_0$  ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$$

(μονάδες 2)

**ε)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .

(μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  για τους οποίους η εξίσωση

$$2x^2 - |w - 4 - 3i|x = -2|z|, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει μια διπλή ρίζα, την  $x = 1$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho_1 = 1$ , καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο  $K(4,3)$  και ακτίνα  $\rho_2 = 4$

**Μονάδες 8**

- B2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

**Μονάδες 5**

- B3.** Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  του ερωτήματος B1 να αποδείξετε ότι:

$$|z - w| \leq 10 \quad \text{και} \quad |z + w| \leq 10$$

**Μονάδες 6**

- B4.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$  του ερωτήματος B1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει:

$$|2z^2 - 3z - 2z\bar{z}| = 5$$

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = \frac{1}{2}$



**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  του ερωτήματος Γ1.

**Μονάδες 4**

**Γ3.** Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f(5(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8(x^2 + 1)^2)$$

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\xi^3 - \xi} f(t) dt = -\xi(3\xi^2 - 1) f(\xi^3 - \xi)$$

**Μονάδες 8**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται συνάρτηση  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο  $[0, +\infty)$ , για την οποία ισχύουν:

- $f(x) = x + \int_1^x \left( \int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right) du$  για κάθε  $x > 0$
- $f(x) f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x > 0$  και  $f(0) = 0$

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις:

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{με } x > 0 \quad \text{και} \quad h(x) = (f'(x))^3 \quad \text{με } x \geq 0$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) f''(x) + 1 = (f'(x))^2 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

**Μονάδες 4**

**Δ2.** α. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων  $f$  και  $f'$  στο  $(0, +\infty)$

(μονάδες 4)

β. Να αποδείξετε ότι  $f'(0) = 1$

(μονάδες 3)

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Δεδομένου ότι η συνάρτηση  $g$  είναι κυρτή στο  $(0, +\infty)$ , να αποδείξετε ότι:

α.  $g(x) \geq 2 - x$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$

(μονάδες 2)

β. 
$$\int_0^1 (2 - x) f(x) dx < 1$$

(μονάδες 4)

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $h$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = 1$

**Μονάδες 8**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18:00

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 2**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

**Μονάδες 6**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $-f$  είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα  $x'x$ , της γραφικής παράστασης της  $f$

**β)** Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών  $\alpha + \beta i$  και  $\gamma + \delta i$  είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

**γ)** Αν είναι  $0 < \alpha < 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$

**δ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ε) Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

**Μονάδες 10****ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , με  $z \neq -1$ , για τους οποίους ο αριθμός  $w = \frac{z-1}{z+1}$  είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

**B1.**  $|z|=1$

**Μονάδες 7**

**B2.** Ο αριθμός  $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$  είναι πραγματικός.

**Μονάδες 6**

**B3.**  $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \leq 4$ , όπου  $z_1, z_2$  δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$

**Μονάδες 6**

**B4.** Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $u$ , για τους οποίους ισχύει  $u - ui = \frac{i}{w} - w$ ,  $w \neq 0$ , ανήκουν στην υπερβολή  $x^2 - y^2 = 1$

**Μονάδες 6****ΘΕΜΑ Γ**

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$xf(x) + 1 = e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$ . Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η  $f$  είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2f(x) = x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

**Μονάδες 8**

**Γ4.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x(\ln x) \ln(f(x))]$

**Μονάδες 5****ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  με  $A = (0, +\infty)$ , για την οποία ισχύουν:

- $f(A) = (-\infty, 0]$
- η παράγωγος της  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$ , και
- $2f(x) + \left(x + \frac{1}{x}\right)e^{f(x)} = \int_1^x e^{f(t)} f'(t) \left(t + \frac{1}{t}\right) dt + 2, \quad \text{για κάθε } x > 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση  $F(x) = \int_1^x f(t) dt, \quad x > 0$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right), \quad x > 0$

**Μονάδες 8**ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $F$  έχει μοναδικό σημείο καμπής  $\Sigma(x_0, F(x_0))$ ,  $x_0 > 0$ , το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (x_0, \beta)$  με  $\beta > x_0$ , τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $F$  στο σημείο  $M(\xi, F(\xi))$  να είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$ε: F(\beta)x - (\beta - 1)y + 2012(\beta - 1) = 0$$

**Μονάδες 6**

- Δ3.** Αν  $\beta > 1$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{[F(\beta) + (1 - \beta)f(\beta)]x^5}{x - 1} + \frac{(\beta - 1)(x + 1)^3}{x - 3} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς  $x$ , στο διάστημα  $(1, 3)$

**Μονάδες 5**

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \leq \int_1^x t f(t) dt, \quad \text{για κάθε } x > 0$$

**Μονάδες 6****ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ****ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ  
(ΟΜΑΔΑ Β΄)**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό μέγιστο;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

**β)** Μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της η εξίσωση  $f(x)=y$  έχει ακριβώς μία λύση ως προς  $x$

**γ)** Αν είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ



ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

$$\delta) \quad (\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{x | \eta\mu x = 0\}$$

$$\epsilon) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx, \text{ όπου } f', g' \text{ είναι}$$

συνεχείς συναρτήσεις στο  $[\alpha, \beta]$

**Μονάδες 10****ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  και  $w$  για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \quad (1)$$

$$|w-5\bar{w}| = 12 \quad (2)$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho = 1$

**Μονάδες 6**

**B2.** Αν  $z_1, z_2$  είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$  με  $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$  τότε, να βρείτε το  $|z_1 + z_2|$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $w$  στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του  $|w|$

**Μονάδες 6**

**B4.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \leq |z - w| \leq 4$$

**Μονάδες 6**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=(x-1)\ln x-1$ ,  $x>0$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\Delta_1=(0,1]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\Delta_2=[1,+\infty)$ . Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^{x-1}=e^{2013}$ ,  $x>0$  έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Αν  $x_1, x_2$  με  $x_1<x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0\in(x_1,x_2)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0)+f(x_0)=2012$$

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x)=f(x)+1$  με  $x>0$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x=e$

**Μονάδες 7****ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ , η οποία για κάθε  $x>0$  ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\ln x - x = - \left( \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) \cdot |f(x)|$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

**Μονάδες 10**ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ**

Αν είναι  $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$ ,  $x > 0$ , τότε:

**Δ2.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ (f(x))^2 \ln \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Με τη βοήθεια της ανισότητας  $\ln x \leq x - 1$ , που ισχύει για κάθε  $x > 0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt, \quad x > 0,$$

όπου  $\alpha > 0$ , είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x), \text{ για κάθε } x > 0 \text{ (μονάδες 4).}$$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός  $\beta > 0$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (\beta, 2\beta)$  τέτοιο ώστε:

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

**Μονάδες 4****ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ****ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ****ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x)=\sin x$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $(\sin x)' = -\eta\mu x$

**Μονάδες 10**

**A2.** Έστω μία συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της  $f$  στο  $\Delta$ .

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z=\alpha+\beta i$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ισχύει  $z-\bar{z}=2\beta$

**β)** Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) μέγιστο το  $f(x_0)$ , όταν  $f(x) \leq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$

**γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

δ) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

ε) Κάθε συνάρτηση  $f$  που είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z, w$ , οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z - i| = 1 + \operatorname{Im}(z) \quad (1)$$

$$w(\bar{w} + 3i) = i(3\bar{w} + i) \quad (2)$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι η παραβολή με εξίσωση  $y = \frac{1}{4}x^2$

**Μονάδες 7**

**B2.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $w$  είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο  $K(0,3)$  και ακτίνα  $\rho = 2\sqrt{2}$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να βρείτε τα σημεία  $A$  και  $B$  του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $z, w$  με  $z = w$ .

**Μονάδες 5**

**B4.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $KAB$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό  $u$  με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο  $\Lambda$ ,

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

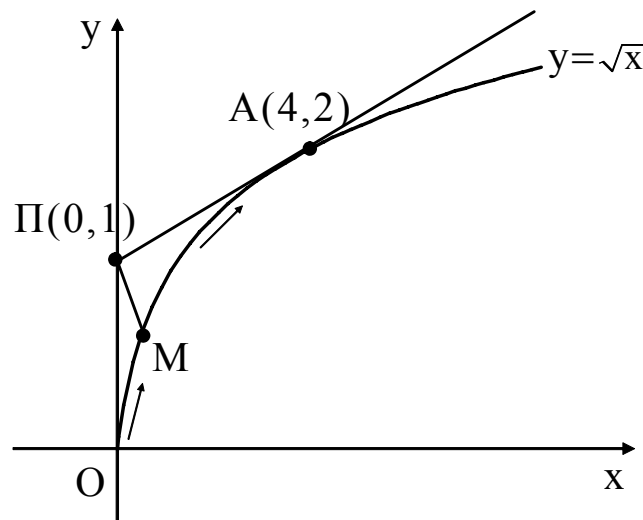
ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία  $K, A, \Lambda, B$  να είναι τετράγωνο.

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Ένα κινητό  $M$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$ . Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση  $\Pi(0,1)$  ενός συστήματος συντεταγμένων  $Oxy$  και παρατηρεί το κινητό από την αρχή  $O$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή  $t$ ,  $t \geq 0$  είναι  $x'(t) = 16 \text{ m/min}$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή  $t$ ,  $t \geq 0$  δίνεται από τον τύπο:

$$x(t) = 16t$$

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το  $A(4,2)$  και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

**Μονάδες 6**

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Γ3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α.

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή  $t_0 \in (0, \frac{1}{4})$ , κατά την οποία η απόσταση  $d=(ΠΜ)$  του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

**Μονάδες 8**

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων  $Oxy$ .

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$

ii)  $f'(0) < f(1) - f(0)$  και

iii)  $f''(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**Δ1.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0=0$ .

**Μονάδες 3**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 5**

Αν επιπλέον  $g(x)=f(x)-x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , τότε:

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η  $g$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{xg(x)}$

**Μονάδες 6**

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ4. Να αποδείξετε ότι  $\int_0^2 f(x)dx > 2$

**Μονάδες 5**

Δ5. Αν το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ , τον άξονα  $x$ ' $x$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x=0$  και  $x=1$  είναι  $E(\Omega)=e-\frac{5}{2}$ , τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 f(x)dx$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (1,2)$  τέτοιο, ώστε

$$\int_0^{\xi} f(t)dt = 2$$

**Μονάδες 6****ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.00

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**  
**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ



ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ  
(ΟΜΑΔΑ Β΄)**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι:  $f'(x_0) = 0$

**Μονάδες 10**

**A2.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ . Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z \neq 0$  ορίζουμε  $z^0 = 1$

β) Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή: αν  $x_1 \neq x_2$ , τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$  ισχύει:  $(\epsilon \phi x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

δ) Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ε) Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y=x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

**Μονάδες 10****ΘΕΜΑ Β**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$  και  $w$  με  $z \neq 3i$ , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \quad \text{και} \quad w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

- B1.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$

**Μονάδες 7**

- B2.** Να αποδείξετε ότι  $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$

**Μονάδες 4**

- B3.** Να αποδείξετε ότι ο  $w$  είναι πραγματικός αριθμός και ότι  $-2 \leq w \leq 2$

**Μονάδες 8**

- B4.** Να αποδείξετε ότι:  $|z - w| = |z|$

**Μονάδες 6****ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(0) = f(0) = 0$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \ln(e^x - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 3**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\ln(e^x - x) = \sin x$  έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , οι οποίες για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ικανοποιούν τις σχέσεις:

i)  $f(x) > 0$  και  $g(x) > 0$

ii) 
$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

iii) 
$$\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  και ότι  $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 9**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 4**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ**

**Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$F(x) = \int_1^x f(t^2) dt$$

τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  και την ευθεία με εξίσωση  $x=1$ .

**Μονάδες 7**

**ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

**Μονάδες 8**

**A2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, b]$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) μέγιστο, το  $f(x_0)$ ;

**Μονάδες 3**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f(x) = \alpha^x$ ,  $\alpha > 0$ , τότε ισχύει  $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}$

**β)** Αν ορίζονται οι συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε πάντοτε ισχύει  $f \circ g = g \circ f$

**γ)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

δ) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και ισχύει  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ ,

$$\text{τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$$

ε) Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  ισχύει  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2$  είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν

$$z_1 + z_2 = -2 \text{ και } z_1 \cdot z_2 = 5$$

**B1.** Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$

**Μονάδες 5**

**B2.** Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς  $w$  ισχύει η σχέση

$$|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$$

να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση  $(x+1)^2 + y^2 = 4$

**Μονάδες 8**

**B3.** Από τους μιγαδικούς αριθμούς  $w$  του ερωτήματος **B2** να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει

$$2 \cdot \operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w) = 0$$

**Μονάδες 6**

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**B4.** Αν  $w_1, w_2$  είναι δύο από τους μιγαδικούς  $w$  του ερωτήματος **B2** με την ιδιότητα  $|w_1 - w_2| = 4$ , να αποδείξετε ότι  $|w_1 + w_2| = 2$

**Μονάδες 6****ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3, x > 0$

**Γ1.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(0,1]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[1, +\infty)$

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες του ερωτήματος **Γ3** με  $x_1 < x_2$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιος, ώστε  $\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$   
και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $M(\xi, f(\xi))$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**Μονάδες 9**ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο  $\mathbb{R}$  με  $f(0) = 1$  και  $f'(0) = 0$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \int_0^1 f(xt) dt + x^3}{\eta\mu^3 x} = +\infty$

**Μονάδες 6**

Αν επιπλέον δίνεται ότι

$$f'(x) + 2x = 2x \cdot (f(x) + x^2), \quad x \in \mathbb{R}, \text{ τότε:}$$

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = e^{x^2} - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 8**

**Δ4.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$h(x) = \int_x^{x+2} f(t) dt, \quad x \geq 0$$

και να λύσετε στο  $\mathbb{R}$  την ανίσωση

$$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t) dt + \int_6^4 f(t) dt < 0$$

**Μονάδες 7**



ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ  
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')  
ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2010  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x)=F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και

- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 6**

**A2.** Πότε η ευθεία  $x=x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 5**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών  $\alpha + \beta i$  και  $\gamma + \delta i$  είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

β) Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

γ) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$ ,

$$\text{όπου } A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$$

δ)  $(\sin x)' = \cos x, x \in \mathbb{R}$

ε) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$

**Μονάδες 10****ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η εξίσωση  $z + \frac{2}{z} = 2$  όπου  $z \in \mathbb{C}$  με  $z \neq 0$

**B1.** Να βρείτε τις ρίζες  $z_1$  και  $z_2$  της εξίσωσης.

**Μονάδες 7**

**B2.** Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$$

**Μονάδες 6**

**B3.** Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς  $w$  ισχύει

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο.

**Μονάδες 7**

**B4.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $w$  του ερωτήματος **B3**, να αποδείξετε ότι  $3 \leq |w| \leq 7$

**Μονάδες 5**ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$ ,  $x\in\mathbb{R}$

**Γ1.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$ .

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[ \frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$$

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της  $f$  στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα  $\psi\psi$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 x f(x) dx$$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq x$$

$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , είναι σταθερή.

**Μονάδες 7**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+9}, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 7**

### ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.**
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ  
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Μονάδες 9**

- B.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  και  $x_0$  ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ ;

**Μονάδες 6**

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Αν  $z$  είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε για κάθε θετικό ακέραιο  $n$  ισχύει  $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

**Μονάδες 2**

- β.** Η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  το πολύ σε ένα σημείο.

**Μονάδες 2**ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

γ. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$  τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

**Μονάδες 2**

δ. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\varphi x$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$  και ισχύει

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

**Μονάδες 2**

ε. Για κάθε συνάρτηση  $f$ , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , ισχύει

$$\int f'(x) dx = f(x) + c, \quad x \in \Delta$$

όπου  $c$  είναι μια πραγματική σταθερά.

**Μονάδες 2****ΘΕΜΑ 2°**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$(2-i)z + (2+i)\bar{z} - 8 = 0$$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z = x+yi$  οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

**Μονάδες 10**ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό  $z_1$  και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό  $z_2$  οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

**Μονάδες 8**

- γ. Για τους αριθμούς  $z_1, z_2$  που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 40$

**Μονάδες 7****ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln[(\lambda+1)x^2+x+1] - \ln(x+2), \quad x > -1$$

όπου  $\lambda$  ένας πραγματικός αριθμός με  $\lambda \geq -1$

- A. Να προσδιορίσετε την τιμή του  $\lambda$ , ώστε να υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  και να είναι πραγματικός αριθμός.

**Μονάδες 5**

- B. Έστω ότι  $\lambda = -1$

- α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 10**

- β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$

**Μονάδες 6**

- γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) + \alpha^2 = 0$  έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό  $\alpha$  με  $\alpha \neq 0$

**Μονάδες 4**ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται μια συνάρτηση  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = k x e^{2x}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$f'(0) = 2f(0), \quad f'(2) = 2f(2) + 12e^4, \quad f(1) = e^2$$

όπου  $k$  ένας πραγματικός αριθμός.

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα  $[0, 2]$ .

**Μονάδες 4**

**β.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0, 2)$  τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)$$

**Μονάδες 6**

**γ.** Να αποδείξετε ότι  $k = 6$  και ότι ισχύει  $g(x) = 0$  για κάθε  $x \in [0, 2]$ .

**Μονάδες 6**

**δ.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x^3 e^{2x}$ ,  $0 \leq x \leq 2$

**Μονάδες 5**

**ε.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$$

**Μονάδες 4**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ



ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ**  
**ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')**  
**ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$  ισχύει  $f'(x)=0$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 10**

- B.** Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

**Μονάδες 2**

- β.** Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο  $x_0 \in A$ , όταν  $f(x) \geq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$

**Μονάδες 2**ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

γ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

**Μονάδες 2**

- δ. Κάθε συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 2**

- ε. Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και ισχύει  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τις ευθείες  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  και τον άξονα  $x'x$  είναι

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

**Μονάδες 2****ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- A.α.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $z$ , για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 9**

- β.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός  $z_0 = 1 - i$  έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

**Μονάδες 8**ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- B.** Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί  $w$  οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$$

όπου  $z_0$  ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1), \quad x > -1,$$

όπου  $\alpha > 0$  και  $\alpha \neq 1$

- A.** Αν ισχύει  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x > -1$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha = e$

**Μονάδες 8**

- B.** Για  $\alpha = e$ ,

- α.** να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή.

**Μονάδες 5**

- β.** να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-1, 0]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, +\infty)$

**Μονάδες 6**

- γ.** αν  $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta)-1}{\beta-1} + \frac{f(\gamma)-1}{\gamma-2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο  $(1, 2)$

**Μονάδες 6**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω  $f$  μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[0, 2]$  για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H(x) = \int_0^x t f(t) dt, \quad x \in [0, 2],$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t) dt + 3, & x \in (0, 2] \\ 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

- α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $G$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, 2]$ .

**Μονάδες 5**

- β.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $G$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(0, 2)$  και ότι ισχύει

$$G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 2$$

**Μονάδες 6**

- γ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός  $\alpha \in (0, 2)$  τέτοιος ώστε να ισχύει  $H(\alpha) = 0$ .

**Μονάδες 7**

- δ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός  $\xi \in (0, \alpha)$  τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha \int_0^\xi t f(t) dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t) dt$$

**Μονάδες 7**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ  
**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Έστω μία συνεχής συνάρτηση  $\sigma'$  ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ .  
 Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε να  
 αποδείξετε ότι  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

**Μονάδες 10**

- B.** Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του  
 Διαφορικού Λογισμού;

**Μονάδες 5**

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,  
 γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που  
 αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η  
 πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι  
 λανθασμένη.

- α.** Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν  
 είναι γνησίως μονότονες.

**Μονάδες 2**

- β.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κοίλη σ' ένα διάστημα  $\Delta$ ,  
 τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$   
 σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται κάτω από τη  
 γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο  
 επαφής τους.

**Μονάδες 2**

- γ.** Το ολοκλήρωμα  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$  είναι ίσο με το άθροισμα  
 των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

τον άξονα  $x'$  μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα  $x'$ .

**Μονάδες 2**

δ. Αν  $\alpha, \beta$  πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

**Μονάδες 2**

ε. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  και  $\ell$  ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$$

**Μονάδες 2****ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός  $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $z^2 + \beta z + \gamma = 0$ , όπου  $\beta$  και  $\gamma$  πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι  $\beta = -1$  και  $\gamma = 1$ .

**Μονάδες 9**

β. Να αποδείξετε ότι  $z_1^3 = -1$ .

**Μονάδες 8**

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού  $w$ , για τον οποίο ισχύει:

$$|w| = |z_1 - \overline{z_1}|$$

**Μονάδες 8**ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2 \ln x$ ,  $x > 0$ .

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει:  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 6**

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

γ. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)} & , \quad x > 0 \\ k & , \quad x = 0 \end{cases}$$

i. Να βρείτε την τιμή του  $k$  έτσι ώστε η  $g$  να είναι συνεχής.

**Μονάδες 6**

ii. Αν  $k = -\frac{1}{2}$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $g$  έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(0, e)$ .

**Μονάδες 7****ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[0, +\infty)$  για την οποία ισχύει  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \geq 0$ . Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0, +\infty),$$

$$h(x) = \frac{F(x)}{\int_0^x t f(t) dt}, \quad x \in (0, +\infty).$$

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

α. Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 e^{t-1}[f(t) + F(t)]dt = F(1)$

**Μονάδες 6**

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .

**Μονάδες 8**

γ. Αν  $h(1)=2$ , τότε:

i. Να αποδείξετε ότι  $\int_0^2 f(t) dt < 2 \int_0^2 tf(t)dt$

**Μονάδες 6**

ii. Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 F(t)dt = \frac{1}{2}F(1)$

**Μονάδες 5****ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.00' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ****ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ



ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A.1** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $f(x) = \ln|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

**Μονάδες 10**

- A.2** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

**Μονάδες 5**

- B.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

- α.** Αν μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  ισχύει:  
 $f^{-1}(f(x)) = x$ ,  $x \in A$  και  $f(f^{-1}(y)) = y$ ,  $y \in f(A)$

**Μονάδες 2**

- β.** Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 2**ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- γ. Όταν η διακρίνουσα  $\Delta$  της εξίσωσης  $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$  με  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  και  $\alpha \neq 0$  είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών.

**Μονάδες 2**

- δ. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει

$$f''(x) > 0$$

για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .

**Μονάδες 2**

- ε. Αν η  $f$  είναι συνεχής σε διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$  τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

**Μονάδες 2****ΘΕΜΑ 2°**

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  και  $w$  ισχύουν

$$|(i + 2\sqrt{2})z| = 6 \quad \text{και} \quad |w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$$

τότε να βρείτε:

- α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$ .

**Μονάδες 6**

- β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $w$ .

**Μονάδες 7**

- γ. την ελάχιστη τιμή του  $|w|$

**Μονάδες 6**

- δ. την ελάχιστη τιμή του  $|z - w|$

**Μονάδες 6**ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο 0.

**Μονάδες 3**

**β.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 9**

**γ.** Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης  $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$  για όλες τις πραγματικές τιμές του  $\alpha$ .

**Μονάδες 6**

**δ.** Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) ,$$

για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω  $f$  μια συνάρτηση συνεχής στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45$$

**α.** Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

**Μονάδες 8**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση  $g$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

**Μονάδες 4**

- γ. Αν για τη συνάρτηση  $f$  του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση  $g$  του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$$

και  $g(0)=g'(0)=1$ , τότε

- i. να αποδείξετε ότι  $g(x)=x^5+x^3+x+1$

**Μονάδες 10**

- ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι 1-1

**Μονάδες 3****ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.**
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.1** Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 10**

- A.2** Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού;

**Μονάδες 5**

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**Μονάδες 2**

- β.** Αν  $f, g, g'$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα  $[a, \beta]$ , τότε

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = \int_a^\beta f(x)dx \cdot \int_a^\beta g'(x)dx.$$

**Μονάδες 2**

- γ.** Αν  $f$  είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $a$  είναι ένα σημείο του  $\Delta$ , τότε

$$\left( \int_a^x f(t)dt \right)' = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

**Μονάδες 2**ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- δ. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$  όπου  $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$  και  $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$ .

**Μονάδες 2**

- ε. Έστω δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $\Delta$  και  $f'(x) = g'(x)$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε ισχύει  $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

**Μονάδες 2****ΘΕΜΑ 2°**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta \sin x, & x \geq 0. \end{cases}$$

- α. Να αποδειχθεί ότι  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$ .

**Μονάδες 8**

- β. Αν  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$  και η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 0$ , να αποδειχθεί ότι  $\alpha = \beta = 3$ .

**Μονάδες 9**

- γ. Αν  $\alpha = \beta = 3$ , να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα  $\int_0^{\pi} f(x) dx$ .

**Μονάδες 8**ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x - e \ln x, \quad x > 0.$$

- α.** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $f(x)$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(1, +\infty)$ .

**Μονάδες 10**

- β.** Να αποδειχθεί ότι ισχύει  $f(x) \geq e$  για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 7**

- γ.** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)dt + \int_2^4 f(t)dt$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1 = \alpha + \beta i$  και  $z_2 = \frac{2 - \bar{z}_1}{2 + \bar{z}_1}$ , όπου

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  με  $\beta \neq 0$ . Δίνεται επίσης ότι  $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$ .

- α.** Να αποδειχθεί ότι  $z_2 - z_1 = 1$ .

**Μονάδες 9**

- β.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $z_1$  στο μιγαδικό επίπεδο.

**Μονάδες 6**

- γ.** Αν ο αριθμός  $z_1^2$  είναι φανταστικός και  $\alpha\beta > 0$ , να υπολογισθεί ο  $z_1$  και να δειχθεί ότι

$$(z_1 + 1 + i)^{20} - (\bar{z}_1 + 1 - i)^{20} = 0.$$

**Μονάδες 10**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.1** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

**Μονάδες 8**

**A.2** Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 4**

**A.3** Πότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 3**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν  $f$  συνάρτηση συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  ισχύει  $f(x) \geq 0$  τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$  τότε  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ



ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- γ. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η σύνθεσή τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

- δ. Αν  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha$  είναι ένα σημείο του  $\Delta$ , τότε

$$\left( \int_{\alpha}^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

**Μονάδες 2**

- ε. Αν  $\alpha > 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$ .

**Μονάδες 2****ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i} \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού  $z$  ανήκει στον κύκλο με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .

**Μονάδες 9**

- β. Έστω  $z_1, z_2$  οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο

$$z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i}$$

για  $\alpha = 0$  και  $\alpha = 2$  αντίστοιχα.

- ι. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$ .

**Μονάδες 8**ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^\nu$$

για κάθε φυσικό αριθμό  $\nu$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$

όπου  $\theta \in \mathbb{R}$  μια σταθερά με  $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$ .

α. Να αποδειχθεί ότι η  $f$  παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

**Μονάδες 7**

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

**Μονάδες 8**

γ. Αν  $x_1, x_2$  είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και  $x_3$  η θέση του σημείου καμπής της  $f$ , να αποδειχθεί ότι τα σημεία  $A(x_1, f(x_1))$ ,  $B(x_2, f(x_2))$  και  $\Gamma(x_3, f(x_3))$  βρίσκονται στην ευθεία  $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ .

**Μονάδες 3**

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και την ευθεία  $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ .

**Μονάδες 7**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω  $f$  μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα  $[0, 1]$  για την οποία ισχύει  $f(0) > 0$ . Δίνεται επίσης συνάρτηση  $g$  συνεχής στο διάστημα  $[0, 1]$  για την οποία ισχύει  $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in [0, 1]$ .

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t) g(t) dt, \quad x \in [0, 1],$$

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

**α.** Ναδειχθεί ότι  $F(x) > 0$  για κάθε  $x$  στο διάστημα  $(0, 1]$ .

**Μονάδες 8**

**β.** Να αποδειχθεί ότι:

$$f(x) \cdot G(x) > F(x)$$

για κάθε  $x$  στο διάστημα  $(0, 1]$ .

**Μονάδες 6**

**γ.** Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$

για κάθε  $x$  στο διάστημα  $(0, 1]$ .

**Μονάδες 4**

**δ.** Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left( \int_0^x f(t) g(t) dt \right) \cdot \left( \int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt \right)}{\left( \int_0^x g(t) dt \right) \cdot x^5}.$$

**Μονάδες 7**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.1** Να αποδείξετε ότι:  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 10**

**A.2** Έστω  $f$  μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 5**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$\|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 + z_2\|.$$

**Μονάδες 2**

**β.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  και  $g(x_0) \neq 0$ , τότε η συνάρτηση  $\frac{f}{g}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

**Μονάδες 2**

**γ.** Για κάθε  $x \neq 0$  ισχύει  $[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$ .

**Μονάδες 2**ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- δ. Μια συνάρτηση  $f:A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της η εξίσωση  $f(x)=y$  έχει ακριβώς μία λύση ως προς  $x$ .

**Μονάδες 2**

- ε. Έστω  $f$  μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μία παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$ .

**Μονάδες 2****ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία της στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 9**

- β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int \frac{1}{f(x)} dx$ .

**Μονάδες 9**

- γ. Για κάθε  $x < 0$  να αποδείξετε ότι:  
 $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$ .

**Μονάδες 7****ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$ , που ικανοποιούν την ισότητα  $(4-z)^{10} = z^{10}$  και η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2 + x + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών  $z$  ανήκουν στην ευθεία  $x=2$ .

**Μονάδες 7**ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**β.** Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο τομής της με την ευθεία  $x=2$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο  $y_0=-3$ , τότε

**i.** να βρείτε το  $a$  και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

**Μονάδες 9**

**ii.** να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ , της εφαπτομένης (ε), του άξονα  $x'x$  και της ευθείας  $x = \frac{3}{5}$ .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$  με  $x > 0$ .

**α. i.** Να αποδείξετε ότι:  $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ .

**ii.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .

**Μονάδες 12**

**β.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})$ .

**Μονάδες 5**

**γ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός  $a \in (0, +\infty)$  τέτοιος ώστε  $(a+1)^a = a^{a+1}$ .

**Μονάδες 8**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1°**

**A.1** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

- Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .
- Αν  $f'(x) < 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 10**

**A.2** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 5**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$  ισχύει  $|z|^2 = z^2$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2**ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- γ. Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**Μονάδες 2**

- δ. Ισχύει ο τύπος  $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 2**

- ε. Ισχύει η σχέση

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx, \text{ όπου } f', g'$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $[\alpha, \beta]$ .

**Μονάδες 2****ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = 2 + (x-2)^2$  με  $x \geq 2$ .

- α. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1.

**Μονάδες 6**

- β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$  και να βρείτε τον τύπο της.

**Μονάδες 8**

- γ. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  με την ευθεία  $y=x$ .

**Μονάδες 4**

- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 7**ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ



ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2, z_3$  με  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  και  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ .

**Μονάδες 9**

**ii.**  $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$  και  $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$ .

**Μονάδες 8**

**β.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των  $z_1, z_2, z_3$  στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$ .

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 8**

**β.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 5**

**γ.** Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = \ln x$  στο σημείο  $A(\alpha, \ln \alpha)$  με  $\alpha > 0$  και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $h(x) = e^x$  στο σημείο  $B(\beta, e^\beta)$  με  $\beta \in \mathbb{R}$  ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός  $\alpha$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

**Μονάδες 9**

**δ.** Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $g$  και  $h$  έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

**Μονάδες 3**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A.1** Έστω η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \sqrt{x}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

**Μονάδες 9**

- A.2** Πότε μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται “1-1”;

**Μονάδες 4**

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος  $\Delta$ , στα οποία η  $f$  δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

- β.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ . Αν η  $f$  είναι κυρτή στο  $(\alpha, x_0)$  και κοίλη στο  $(x_0, \beta)$  ή αντιστρόφως, τότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Μονάδες 2**ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

- γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

**Μονάδες 2**

- δ. Αν για δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορίζονται οι  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε είναι υποχρεωτικά  $f \circ g \neq g \circ f$ .

**Μονάδες 2**

- ε. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών  $z, \bar{z}$  είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 2**

- στ. Αν η συνάρτηση  $f$  έχει παράγουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , τότε ισχύει:

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx .$$

**Μονάδες 2****ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

- α. Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$z_1 + z_2 = 4 + 4i \text{ και } 2z_1 - \bar{z}_2 = 5 + 5i ,$$

να βρείτε τους  $z_1, z_2$ .

**Μονάδες 10**

- β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  ισχύουν  $|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2}$  και  $|w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$ :

- i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί  $z, w$  έτσι, ώστε  $z = w$  και

**Μονάδες 10**

- ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του  $|z - w|$ .

**Μονάδες 5**ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ****ΘΕΜΑ 3°**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**α.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι “1-1”.

**Μονάδες 7**

**β.** Αν η γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 2005)$  και  $B(-2, 1)$ ,  
να λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$ .

**Μονάδες 9**

**γ.** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο  $M$  της  $C_f$ , στο οποίο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι κάθετη στην ευθεία  $(\varepsilon): y = -\frac{1}{668}x + 2005$ .

**Μονάδες 9****ΘΕΜΑ 4°**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005.$$

**α.** Να δείξετε ότι:

**i.**  $f(0) = 0$

**Μονάδες 4**

**ii.**  $f'(0) = 1$ .

**Μονάδες 4**ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

β. Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3.$

**Μονάδες 7**

γ. Αν επιπλέον η  $f$  είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο  $\mathbb{R}$  και  $f'(x) > f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  
να δείξετε ότι:

i.  $xf(x) > 0$  για κάθε  $x \neq 0$ .

**Μονάδες 6**

ii.  $\int_0^1 f(x) dx < f(1).$

**Μονάδες 4****ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη **10.30'** πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ****ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.1** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta .$$

**Μονάδες 9**

**A.2** Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  με  $f(\alpha) < 0$  και υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  ώστε  $f(\xi) = 0$ , τότε κατ' ανάγκη  $f(\beta) > 0$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ , τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**Μονάδες 2**ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

- γ. Αν η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  και η γραφική παράσταση της  $f$  έχει κοινό σημείο  $A$  με την ευθεία  $y = x$ , τότε το σημείο  $A$  ανήκει και στη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 2**

- δ. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

**Μονάδες 2**

- ε. Αν η  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha$  είναι ένα σημείο του  $\Delta$ , τότε ισχύει  $\left( \int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x) - f(\alpha)$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

**Μονάδες 2**

- στ. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε  $x \in \Delta$  ή είναι αρνητική για κάθε  $x \in \Delta$ , δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 2****ΘΕΜΑ 2°**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2, z_3$  με  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ .

- α. Δείξτε ότι:  $\overline{z_1} = \frac{9}{z_1}$ .

**Μονάδες 7**

- β. Δείξτε ότι ο αριθμός  $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$  είναι πραγματικός.

**Μονάδες 9**

- γ. Δείξτε ότι:  $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$ .

**Μονάδες 9**ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ****ΘΕΜΑ 3°**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = e^{\lambda x}$ ,  $\lambda > 0$ .

**α.** Δείξτε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 3**

**β.** Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η  $y = \lambda e x$ .

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής  $M$ .

**Μονάδες 7**

**γ.** Δείξτε ότι το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της  $f$ , της εφαπτομένης της στο σημείο  $M$  και του άξονα  $y'y$ , είναι

$$E(\lambda) = \frac{e - 2}{2\lambda}.$$
**Μονάδες 8**

**δ.** Υπολογίστε το  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda}$ .

**Μονάδες 7****ΘΕΜΑ 4°**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση  $2f'(x) = e^{x-f(x)}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 0$ .

**α.** Να δειχθεί ότι:  $f(x) = \ln \left( \frac{1 + e^x}{2} \right)$ .

**Μονάδες 6**

**β.** Να βρεθεί το:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t) dt}{\eta \mu x}$ .

**Μονάδες 6**ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ



ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις:

$$h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}.$$

Δείξτε ότι  $h(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση  $\int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt = \frac{1}{2008}$  έχει ακριβώς μία λύση στο  $(0, 1)$ .

**Μονάδες 6****ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη **10:30'** πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ****ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΔΕΥΤΕΡΑ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν
- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
  - $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,
- τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 9**

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 2**

- β.** Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

**Μονάδες 2**

- γ.** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού  $\mathbb{R}$  και ορίζονται οι συνθέσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

**Μονάδες 2**ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

- δ. Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

**Μονάδες 2**

- ε. Αν υπάρχει το όριο της  $f$  στο  $x_0$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}, \text{ εφόσον } f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο}$$

$x_0$ , με  $k \in \mathbb{N}$  και  $k \geq 2$ .

**Μονάδες 2**

- Γ. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και πότε σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ .

**Μονάδες 6****ΘΕΜΑ 2ο**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$ , όπου  $m \in \mathbb{R}$ ,  $m > 0$ .

- α. Να βρείτε τον  $m$  ώστε  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 13**

- β. Αν  $m = 10$ , να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = 1$ .

**Μονάδες 12****ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται μια συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  με  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  και μιγαδικός αριθμός  $z$  με  $\operatorname{Re}(z) \neq 0$ ,  $\operatorname{Im}(z) \neq 0$  και  $|\operatorname{Re}(z)| > |\operatorname{Im}(z)|$ .

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

Αν  $z + \frac{1}{z} = f(\alpha)$  και  $z^2 + \frac{1}{z^2} = f^2(\beta)$ , να αποδείξετε ότι:

**α.**  $|z| = 1$

**Μονάδες 11**

**β.**  $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$

**Μονάδες 5**

**γ.** η εξίσωση  $x^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα  $(-1, 1)$ .

**Μονάδες 9****ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} 2xf(2xt) dt .$$

**α.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$ .

**Μονάδες 7**

**β.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = e^x - (x + 1)$ .

**Μονάδες 7**

**γ.** Να αποδείξετε ότι η  $f(x)$  έχει μοναδική ρίζα στο  $[0, +\infty)$ .

**Μονάδες 5**

**δ.** Να βρείτε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**Μονάδες 6**ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2004  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι  $f'(x_0)=0$

**Μονάδες 10**

- B.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

**Μονάδες 2**

- β.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , αν και μόνο αν  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$

**Μονάδες 2**

- γ.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , τότε η συνάρτηση  $f \cdot g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g'(x_0)$$

**Μονάδες 2**ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

- δ. Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

- ε. Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

**Μονάδες 2****ΘΕΜΑ 2°**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2 \ln x$ .

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

**Μονάδες 10**

- β. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 8**

- γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Μονάδες 7****ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = e^x f(x)$ , όπου  $f$  συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και  $f(0) = f(\frac{3}{2}) = 0$ .

- α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο  $\xi \in (0, \frac{3}{2})$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = -f(\xi)$ .

**Μονάδες 8**ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

**β.** Εάν  $f(x)=2x^2-3x$ , να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 g(x)dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 8**

**γ.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha)$

**Μονάδες 9****ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $f(1)=1$ . Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ισχύει

$$g(x) = \int_1^{x^3} |z| f(t) dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1) \geq 0,$$

όπου  $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ , με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ , τότε:

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και να βρείτε τη  $g'$ .

**Μονάδες 5**

**β.** Να αποδείξετε ότι  $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$

**Μονάδες 8**

**γ.** Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι  $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$

**Μονάδες 6**

**δ.** Αν επιπλέον  $f(2)=\alpha > 0$ ,  $f(3)=\beta$  και  $\alpha > \beta$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (2,3)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0)=0$ .

**Μονάδες 6**ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2003  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μία παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι:

- α.** όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και

- β.** κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Μονάδες 10**

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

**Μονάδες 2**

- β.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό ελάχιστο της  $f$ .

**Μονάδες 2**ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ



ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

- γ. Μία συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 = x_2, \text{ τότε } f(x_1) = f(x_2) .$$

**Μονάδες 2**

- δ. Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx .$$

**Μονάδες 2**

- Γ. Πότε μία ευθεία  $x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ ;

**Μονάδες 7****ΘΕΜΑ 2ο**

- α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο  $(\Sigma)$  των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z| = 2 \quad \text{και} \quad \text{Im}(z) \geq 0 .$$

**Μονάδες 12**

- β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού  $z$  κινείται στο σύνολο  $(\Sigma)$ , τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού  $w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{4}{z} \right)$  κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 13**ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ****ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$  .

α. Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  .

**Μονάδες 5**

β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$ , όταν το  $x$  τείνει στο  $-\infty$  .

**Μονάδες 6**

γ. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$  .

**Μονάδες 6**

δ. Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$  .

**Μονάδες 8****ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) = -f(2-x) \text{ και } f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως μονότονη .

**Μονάδες 8**

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα.

**Μονάδες 8**

γ. Έστω η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$  .

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $g$  στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα  $x'x$ , σχηματίζει με αυτόν γωνία  $45^\circ$  .

**Μονάδες 9**ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 29 ΜΑΪΟΥ 2003  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 8**

- B.** Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

**Μονάδες 7**

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν  $z$  ένας μιγαδικός αριθμός και  $\bar{z}$  ο συζυγής του, τότε ισχύει  $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ .

**Μονάδες 2**

- β.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ .  
Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

- γ. Για κάθε συνάρτηση  $f$ , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Μονάδες 2**

- δ. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

**Μονάδες 2**

- ε. Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και  $f'(x_0)=0$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2****ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z=\alpha+\beta i$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $w=3z - i\bar{z}+4$ , όπου  $\bar{z}$  είναι ο συζυγής του  $z$ .

- α. Να αποδείξετε ότι  $\operatorname{Re}(w)=3\alpha-\beta+4$

$$\operatorname{Im}(w)=3\beta-\alpha.$$

**Μονάδες 6**

- β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y=x-12$ , τότε οι εικόνες του  $z$  κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y=x-2$ .

**Μονάδες 9**ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

- γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y=x-2$ , έχει το ελάχιστο μέτρο.

**Μονάδες 10****ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + x^3 + x$ .

- α. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση.

**Μονάδες 6**

- β. Να αποδείξετε ότι  $f(e^x) \geq f(1+x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

- γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(0,0)$  είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της  $f$  και της  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 5**

- δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ , τον άξονα των  $x$  και την ευθεία με εξίσωση  $x=3$ .

**Μονάδες 8****ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $[a,b]$  που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο  $(a,b)$ . Αν ισχύει  $f(a) = f(b) = 0$  και υπάρχουν αριθμοί  $\gamma \in (a,b)$ ,  $\delta \in (a,b)$ , έτσι ώστε  $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$ , να αποδείξετε ότι:

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

- α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x)=0$  στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$ .

**Μονάδες 8**

- β. Υπάρχουν σημεία  $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$  τέτοια ώστε  $f''(\xi_1) < 0$  και  $f''(\xi_2) > 0$ .

**Μονάδες 9**

- γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Μονάδες 8****ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μετά την 10.30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ****ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΔΕΥΤΕΡΑ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2002  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Αν  $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$  και  $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$  είναι δύο μιγαδικοί σε τριγωνομετρική μορφή, τότε να αποδείξετε ότι:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

**Μονάδες 15**

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [a, b]$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**Μονάδες 2**

**γ.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα  $[a, b]$ , στο οποίο η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

**Μονάδες 2**ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

δ. Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[α,β]$  και σημείο  $x_0 \in [α,β]$  στο οποίο η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι  $f'(x_0)=0$ .

**Μονάδες 2**

ε. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[α,β]$  και υπάρχει  $x_0 \in (α, β)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0)=0$ , τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει  $f(α) \cdot f(β) < 0$ .

**Μονάδες 2****ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 10**

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f^{-1}(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

**Μονάδες 5**

γ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x) dx$

**Μονάδες 10**ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ



ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ****ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , με τύπο

$$f(x) = \frac{|x-z|^2 - |x+\bar{z}|^2}{x^2 + |z|^2}$$

όπου  $z$  συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός  $z = \alpha + \beta i$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , με  $\alpha \neq 0$ .

α. Να βρείτε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**Μονάδες 8**

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ , εάν  $|z+1| > |z-1|$ .

**Μονάδες 9**

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της  $f$ .

**Μονάδες 8****ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω η συνάρτηση  $f$ , ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

και  $f(0) = 2f'(0) = 1$ .

α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f$ .

**Μονάδες 12**

β. Αν  $g$  είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα  $[0,1]$ , να δείξετε ότι η εξίσωση

$$2x - \int_0^x \frac{g(t)}{1+f^2(t)} dt = 1$$

έχει μία μοναδική λύση στο διάστημα  $[0,1]$ .

**Μονάδες 13**ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2002  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[α, β]$ .  
Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[α, β]$ , τότε να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

**Μονάδες 12**

- B.1.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \eta \mu x$ . Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει

$$f'(x) = \sigma \nu x.$$

**Μονάδες 8**

- B.2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $[α, β]$  και συνεχής στο  $(α, β)$ , τότε η  $f$  παίρνει πάντοτε στο  $[α, β]$  μία μέγιστη τιμή.

**Μονάδα 1**

- β.** Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

**Μονάδα 1**ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

- γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

**Μονάδα 1**

- δ. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , τότε

$$\int f(x) dx = xf(x) - \int xf'(x) dx.$$

**Μονάδα 1**

- ε. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδα 1****ΘΕΜΑ 2ο**

Έστω  $z$  ένας μιγαδικός αριθμός και  $f(v) = i^v z$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$ .

- α. Να δείξετε ότι  $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$ .

**Μονάδες 7**

- β. Αν  $|z| = \rho$  και  $\text{Arg}(z) = \theta$ , να δείξετε ότι

$$f(13) = \rho \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right].$$

**Μονάδες 8**

- γ. Αν  $|z| = 2$  και  $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$ , να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $0$ ,  $z$  και  $f(13)$ .

**Μονάδες 10**ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ****ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .

Δίνεται ότι η σύνθεση της  $f$  ο  $g$  είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η  $g$  είναι 1-1.

**Μονάδες 7**

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$  έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

**Μονάδες 18****ΘΕΜΑ 4ο**

α. Έστω δύο συναρτήσεις  $h, g$  συνεχείς στο  $[a, b]$ .

Να αποδείξετε ότι αν  $h(x) > g(x)$  για κάθε  $x \in [a, b]$ , τότε

$$\text{και} \quad \int_a^b h(x) dx > \int_a^b g(x) dx.$$

**Μονάδες 2**

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$ , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0.$$

ι) Να εκφραστεί η  $f'$  ως συνάρτηση της  $f$ .

**Μονάδες 5**

ιι) Να δείξετε ότι  $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$ , για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 12**

ιιι) Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τις ευθείες  $x = 0$ ,  $x = 1$  και τον άξονα  $x'$ , να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1).$$

**Μονάδες 6**ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2001  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ .  
Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής:

$$G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και

- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή:

$$G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6,5

**A.2.** Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

α.  $\int_a^b \lambda f(x) dx = \dots$

β.  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \dots$

γ.  $\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \dots$

όπου  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  και  $f, g$  συνεχείς συναρτήσεις στο  $[a, b]$

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

- B.1.** Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει  $f''(x)=6x+4$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και η γραφική της παράσταση στο σημείο της  $A(0,3)$  έχει κλίση 2.

Μονάδες 6,5

- B.2.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

α.  $\int_0^1 (e^x + x) dx$

Μονάδες 2

β.  $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}} dx$

Μονάδες 2

γ.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x) dx$

Μονάδες 2

**ΘΕΜΑ 2ο**

- α.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$|z+16|=4|z+1|$$

Μονάδες 9

- β.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$|z-1|=|z-i|$$

Μονάδες 9

- γ.** Να τρέψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς που επαληθεύουν συγχρόνως τις σχέσεις των ερωτημάτων (α) και (β).

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ****ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x + \alpha, & x \leq 1 \\ (1 - e^{-x+1}) \ln(x-1), & x \in (1, 2] \end{cases}$$

όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ .**α.** Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-x+1}}{x - 1}$$

Μονάδες 7

**β.** Να βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0=1$ .

Μονάδες 11

**γ.** Για  $\alpha=-1$  να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $A(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$ .

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ 4ο**Έστω μια πραγματική συνάρτηση  $f$ , συνεχής στο  $(0, +\infty)$  για την οποία ισχύει:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{tf(t)}{x^2} dt \quad \mu\epsilon \quad x > 0$$

**α.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$ .

Μονάδες 3

**β.** Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης  $f$  είναι:

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}, \quad x > 0$$

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

|         |
|---------|
| Γ' ΤΑΞΗ |
|---------|

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

Μονάδες 4

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=1$ ,  $x=e$ .

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ



ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.1.** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2$ . Να αποδείξετε ότι:  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .

Μονάδες 7,5

- A.2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$  ισχύει:

α.  $|z|^2 = z \bar{z}$

β.  $|z^2| = z^2$

γ.  $|z| = -|\bar{z}|$

δ.  $|z| = |\bar{z}|$

ε.  $|i \bar{z}| = |z|$

Μονάδες 5

- B.1.** Αν  $z_1 = 3 + 4i$  και  $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ , να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

| Στήλη Α                | Στήλη Β |
|------------------------|---------|
| 1. $ z_1 \cdot z_2 $   | α. 4    |
| 2. $ z_1^2 $           | β. 2    |
| 3. $ z_2 ^2$           | γ. 25   |
| 4. $-\overline{ z_1 }$ | δ. -5   |
| 5. $ i z_2 $           | ε. -2   |
|                        | στ. 5   |
|                        | ζ. 10   |

Μονάδες 7,5

**B.2.** Αν για το μιγαδικό αριθμό  $z$  ισχύει  $|z| = 1$ , να δείξετε ότι  $\overline{z} = \frac{1}{z}$ .

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ 2ο**Έστω  $f$  μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 3 \\ \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

α. Αν η  $f$  είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι  $a = -1/9$ .

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(4, f(4))$ .

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

- γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=1$  και  $x=2$ .

Μονάδες 9

**ΘΕΜΑ 3ο**

Για μια συνάρτηση  $f$ , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$ , ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου  $\beta, \gamma$  πραγματικοί αριθμοί με  $\beta^2 < 3\gamma$ .

- α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

- β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

- γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο ανοικτό διάστημα  $(0,1)$ .

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω μια πραγματική συνάρτηση  $f$ , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i)  $f(x) \neq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

ii)  $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt) dt$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Έστω ακόμη  $g$  η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

α. Να δείξετε ότι ισχύει  $f'(x) = -2xf^2(x)$

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι σταθερή.

Μονάδες 4

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης  $f$  είναι:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Μονάδες 4

δ. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x) \eta \mu 2x)$ .

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΔΕΥΤΕΡΑ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ :  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A1.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ .

Μονάδες 4

- A2.** Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8,5

- B1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η  $f'$  είναι πάντοτε συνεχής στο  $x_0$ .  
**β.** Αν η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .  
**γ.** Αν η  $f$  έχει δεύτερη παράγωγο στο  $x_0$ , τότε η  $f'$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

Μονάδες 4,5

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

**B2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης A και δίπλα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο  $x_0$ .

| Στήλη A<br>συναρτήσεις                        | Στήλη B<br>εφαπτόμενες |
|-----------------------------------------------|------------------------|
| α. $f(x)=3x^3, \quad x_0=1$                   | 1. $y=-2x+\pi$         |
| β. $f(x)=\eta\mu 2x, \quad x_0=\frac{\pi}{2}$ | 2. $y=\frac{1}{4}x+1$  |
| γ. $f(x)=3 x , \quad x_0=0$                   | 3. $y=9x-6$            |
| δ. $f(x)=\sqrt{x}, \quad x_0=4$               | 4. $y=-9x+5$           |
|                                               | 5. δεν υπάρχει         |

Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(z)=\frac{2z+i}{z-2i}, z \in \mathbb{C}$  με  $z \neq -2i$ ,  
όπου  $\bar{z}$  ο συζυγής του  $z$ .

**α.** Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών:

$$w_1=f(9-5i)$$

Μονάδες 6

$$w_2=\left[\frac{\sqrt{2}}{3}f(9-5i)\right]^{2004}$$

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

- β. Θεωρούμε τον πίνακα  $M = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} |w_1| & 0 \\ 0 & -|w_1| \end{bmatrix}$   
 όπου  $|w_1|$  το μέτρο του μιγαδικού αριθμού  $w_1$   
 του ερωτήματος α.

*Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση.*

Ο γραμμικός μετασχηματισμός  $T$  με πίνακα  $M$  είναι:

Α. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$   
 και γωνία  $\theta = \frac{\pi}{4}$

Β. συμμετρία ως προς τον άξονα  $x'x$

Γ. συμμετρία ως προς τον άξονα  $y'y$

Δ. συμμετρία ως προς την ευθεία  $y=x$

Ε. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων

Ο και λόγο  $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

Μονάδες 5

- γ. Αν  $M$  ο πίνακας του ερωτήματος β, τότε να βρεθεί ο πίνακας  $X$  ώστε να ισχύει:

$$MX=K$$

όπου  $K$  είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$  και γωνία  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Μονάδες 8

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ****ΘΕΜΑ 3ο**

Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα  $[0,1]$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0,1)$ . Αν  $f(0)=2$  και  $f(1)=4$ , να δείξετε ότι:

**α.** η ευθεία  $y=3$  τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0,1)$ .  
Μονάδες 7

**β.** υπάρχει  $x_1 \in (0,1)$ , τέτοιο ώστε

$$f(x_1) = \frac{f(1/5) + f(2/5) + f(3/5) + f(4/5)}{4}$$

Μονάδες 12

**γ.** υπάρχει  $x_2 \in (0,1)$ , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(x_2, f(x_2))$  να είναι παράλληλη στην ευθεία  $y=2x+2000$ .

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ 4ο**

Τη χρονική στιγμή  $t=0$  χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, t \geq 0$$

όπου  $\alpha$  και  $\beta$  είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος  $t$  μετράται σε ώρες. Η μέγιστη

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ



ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

|         |
|---------|
| Γ' ΤΑΞΗ |
|---------|

τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

**α.** Να βρείτε τις τιμές των σταθερών  $\alpha$  και  $\beta$ .

Μονάδες 15

**β.** Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2000  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** α) Πότε ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός ονομάζεται γραμμικός;

Μονάδες 2,5

β) Αν  $M(x,y)$  σημείο του επιπέδου,  $\vec{u}=(\alpha,\beta)$  δεδομένο διάνυσμα και  $M'(x',y')$  η εικόνα του  $M$  στην παράλληλη μεταφορά κατά το διάνυσμα  $\vec{u}$ , να βρείτε τα  $x',y'$  συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου  $M$  και του διανύσματος  $\vec{u}$ .

Μονάδες 5

γ) Είναι η παράλληλη μεταφορά γραμμικός μετασχηματισμός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

**B1.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το μετασχηματισμό της στήλης I και δίπλα τον αριθμό της στήλης II που αντιστοιχεί στον πίνακα του μετασχηματισμού.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

| Στήλη I                                      | Στήλη II                                           |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| $T_1$ : «συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$ » | 1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $T_2$ : «στροφή κατά γωνία $\pi/2$ »         | 2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ |
|                                              | 3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ |

Μονάδες 3

**B2.** Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό  $T$  με πίνακα  $A = A_1A_2 - A_2A_1$ , όπου  $A_1, A_2$  οι πίνακες των μετασχηματισμών  $T_1, T_2$  αντιστοίχως, του ερωτήματος **B1**.

α) Να δείξετε ότι ο  $T$  είναι κανονικός μετασχηματισμός.

Μονάδες 4,5

β) Να βρείτε την εικόνα της ευθείας  $\varepsilon: 2x - y + 5 = 0$  μέσω του μετασχηματισμού  $T$ .

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ 2ο**

**A.** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός  $z = \frac{5+i}{2+3i}$

α) Να γράψετε τον  $z$  στη μορφή  $a + \beta i$ ,  $a, \beta \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 4

β) Να γράψετε τον  $z$  στην τριγωνομετρική του μορφή.

Μονάδες 5

Στις ερωτήσεις γ), δ) να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό του θέματος και της κάθε ερώτησης και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ**

γ) Αν  $\theta = \text{Arg}z$ , τότε ο μιγαδικός αριθμός  $iz$  έχει όρισμα:

A.  $\frac{\pi}{4} - \theta$     B.  $\frac{\pi}{2} + \theta$     Γ.  $\theta - \frac{\pi}{2}$     Δ.  $\pi + \theta$

Μονάδες 3

δ) Το  $z^4$  είναι ίσο με:

A. 4    B.  $4i$     Γ.  $-4i$     Δ. -4

Μονάδες 3

**B.** Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών  $z$ , για τους οποίους ισχύει:

$$\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1.$$

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16 & , \quad 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2) \ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1) e^{5-x} & , \quad x \geq 5 \end{cases}$$

**A.** Να βρεθούν τα,  $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$ .

Μονάδες 6

**B.** Να βρεθούν τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 5$ .

Μονάδες 10

**Γ.** Για τις τιμές των  $\alpha, \beta$  του ερωτήματος **B** να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

Μονάδες 9

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**Γ' ΤΑΞΗ****ΘΕΜΑ 4ο**

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω  $f(t)$  η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο  $t$  από τη χορήγησή του, όπου  $t \geq 0$ . Αν ο ρυθμός μεταβολής της  $f(t)$  είναι

$$\frac{8}{t+1} - 2$$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση  $f(t)$ .

Μονάδες 6

β) Σε ποια χρονική στιγμή  $t$ , μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;

Μονάδες 6

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή  $t = 8$  υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή  $t = 10$  η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται  $\ln 11 \cong 2,4$ ).

Μονάδες 13

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ