

4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

- Καλούμε **μονώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής αx^n , όπου α είναι πραγματικός αριθμός και n ένας θετικός ακέραιος. Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.
- Καλούμε **πολυώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής :

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$
 όπου n είναι ένας φυσικός αριθμός και $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί.
 - Τα μονώνυμα $\alpha_n x^n, \alpha_{n-1} x^{n-1}, \dots, \alpha_1 x, \alpha_0$ λέγονται **όροι** του πολυωνύμου.
 - Οι αριθμοί $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ λέγονται **συντελεστές** του πολυωνύμου.
 - Ειδικότερα ο αριθμός α_0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου.
- **Βαθμό** ενός πολυωνύμου $P(x)$ ονομάζουμε τον μεγαλύτερο εκθέτη του x που εμφανίζεται στο πολυώνυμο, με την προϋπόθεση ότι ο συντελεστής του είναι διάφορος του μηδενός. (Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός)
- Δυο πολυώνυμα $P(x) = \alpha_\mu x^\mu + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $Q(x) = \beta_\nu x^\nu + \dots + \beta_1 x + \beta_0$ με $\mu \geq \nu$ θα λέμε ότι είναι **ισα** όταν ισχύουν συγχρόνως :
 $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \alpha_\nu = \beta_\nu$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} = \dots = \alpha_\mu = 0$.
- Στο πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ αν αντικαταστήσουμε το x με μια τιμή $\rho \in \mathbb{R}$, τότε ο αριθμός που προκύπτει : $P(\rho) = \kappa \in \mathbb{R}$, λέγεται **αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$** . Ειδικότερα αν ισχύει $P(\rho) = 0$, τότε ο αριθμός ρ λέγεται **ρίζα του πολυωνύμου**.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 3 σελ. 131 Α' ομάδας)

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, το πολυώνυμο

$$P(x) = (4\mu^3 - \mu)x^3 + 4\left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right)x - 2\mu + 1 \text{ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.}$$

Λύση : Το $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, όταν ισχύουν συγχρόνως :

$$\begin{aligned} & \bullet \quad 4\mu^3 - \mu = 0 \Leftrightarrow \mu(4\mu^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \text{ή} \\ 4\mu^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \mu = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \\ & \bullet \quad \mu^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \mu = \pm \frac{1}{2} \\ & \bullet \quad -2\mu + 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{2}. \text{ Η κοινή λύση των παραπάνω εξισώσεων είναι } \mu = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. (Άσκηση 4 σελ. 131 Α' ομάδας)

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha^2 - 3\alpha)x^3 + x^2 + \alpha$ και $Q(x) = -2x^3 + \alpha^2 x^2 + (\alpha^3 - 1)x + 1$ είναι ισα.

Λύση: Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ισα, όταν ισχύουν συγχρόνως :

- $\alpha^2 - 3\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ ή $\alpha = 2$
- $1 = \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$
- $0 = \alpha^3 - 1 \Leftrightarrow \alpha^3 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$
- $\alpha = 1$

Η κοινή λύση των παραπάνω εξισώσεων είναι $\alpha = 1$.

3. (Άσκηση 3 σελ. 132 Β' ομάδας)

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ , για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 + \mu x + 6$ έχει ρίζα το 1 και ισχύει $P(-2) = -12$.

Λύση:

Το 1 είναι ρίζα του $P(x) \Leftrightarrow P(1) = 0 \Leftrightarrow 2 + \lambda + \mu + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda + \mu = -8$ (1)

Επίσης : $P(-2) = -12 \Leftrightarrow 2(-2)^3 + \lambda(-2)^2 + \mu(-2) + 6 = -12 \Leftrightarrow -16 + 4\lambda - 2\mu + 6 = -12 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4\lambda - 2\mu = -2 \Leftrightarrow 2\lambda - \mu = -1$ (2)

Από (1) και (2) έχω : $\begin{cases} \lambda + \mu = -8 \\ 2\lambda - \mu = -1 \end{cases}$ προσθέτοντας κατά μέλη έχω : $3\lambda = -9 \Leftrightarrow \lambda = -3$ και
 από (1) : $-3 + \mu = -8 \Leftrightarrow \mu = -5$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- i. Η παράσταση $P(x) = x^0$ είναι πολυώνυμο.
- ii. Ένα σταθερό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.
- iii. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ και ισχύει $P(\rho) \neq 0$, τότε ο αριθμός ρ δεν είναι ρίζα του $P(x)$.
- iv. Αν τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι μη μηδενικά και έχουν βαθμούς μ και ν αντίστοιχα, τότε το πολυώνυμο $P(x)Q(x)$ έχει βαθμό $\mu + \nu$.

5. Αν οι βαθμοί των πολυωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$ είναι μ και ν αντίστοιχα, να αντιστοιχίσετε στον παρακάτω πίνακα τα πολυώνυμα που βρίσκονται στη στήλη Α με τους βαθμούς τους στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $P(x) \cdot Q(x)$	1. ν^2
Β. $[P(x)]^2$	2. 2μ
Γ. $Q(Q(x))$	3. $\mu + \nu$
Δ. $P(Q(x))$	4. $\mu\nu$

6. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

- i. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.
 - α. Αν $a_0 = 0$, τότε ο αριθμόςείναι ρίζα του $P(x)$
 - β. Αν $a_n \neq 0$, τότε ο βαθμός του $P(x)$ είναι
 - γ. Αν το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$ είναι 0, τότε ο αριθμός είναι ρίζα του $P(x)$
 - δ. Αν ο βαθμός του $P(x)$ είναι ν , τότε ο βαθμός του $P^2(x)$ είναι

- ε. Αν ο βαθμός του $P(x)$ είναι n , τότε ο βαθμός του $P(P(x))$ είναι.....
 ii. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι μηδενικού βαθμού ή το μηδενικό πολυώνυμο, τότε η μορφή του είναι
 iii. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι βαθμού 1, τότε έχει τη μορφή

7. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

- i. Αν ο σταθερός όρος ενός πολυωνύμου είναι 0, τότε το πολυώνυμο έχει ρίζα τον αριθμό:
 A. 1 B. 0 Γ. -1 Δ. 2
 ii. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $3^{\text{ου}}$ βαθμού, το $\Pi(x)$ είναι $2^{\text{ου}}$ βαθμού και ισχύει η ισότητα $P(x)=\delta(x) \Pi(x)$, τότε το $\delta(x)$ έχει βαθμό:
 A. 2 B. 1 Γ. 0
 iii. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει $x^4+3x=P(x)(2x+1)$, τότε ο βαθμός του $P(x)$ είναι:
 A. 3 B. 2 Γ. 1 Δ. 4
 iv. Το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου $P(x)=(2x-1)^{30}+x$ είναι:
 A. 1 B. 2 Γ. 3 Δ. 4

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Για ποιο λόγο οι παρακάτω παραστάσεις δεν είναι πολυώνυμα του x ;

- i. $5+2\sqrt{x}$ ii. $\eta\mu x+7$ iii. $6\cdot\frac{1}{x}+4$ iv. $5x^3+3|x|-7$

9. Να εξετάσετε ποιες από τις ακόλουθες παραστάσεις είναι μονώνυμα και ποιες πολυώνυμα :

- i. $P(x)=\frac{5}{3}x^4$ ii. $Q(x)=-2\sqrt[4]{x^7}$ iii. $A(x)=4x^{-7}$ iv. $E(x)=11x^4-3x^3$ v. $H(x)=12x^7-3x^{\frac{1}{3}}$

10. Δίνονται τα πολυώνυμα : $P(x)=4x^3+5x^2-6x+7$ και $Q(x)=x^2+2$. Να βρείτε τα πολυώνυμα:

- i. $P(x)+Q(x)$ ii. $P(x)-5Q(x)$ iii. $P(x)\cdot Q(x)$ iv. $(Q(x))^2-P(x)$

11. Να βρεθούν οι τιμές τις παραμέτρου λ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^3-4\lambda)x^4+(\lambda^2+2\lambda)x+\lambda+2$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

12. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-2\lambda)x^3+(\lambda^2-5\lambda+6)x+\frac{\lambda}{2}-1=0$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

13. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε να είναι ισα τα πολυώνυμα $P(x)=(\lambda^2-4)x^3+(\lambda^2+2\lambda)x^2-\lambda^2x+3\lambda-8$ και $Q(x)=(3\lambda+2)x^2-2\lambda x+\lambda-\lambda^2$.

14. Να βρεθούν οι τιμές των κ, λ, μ ώστε να είναι ισα τα πολυώνυμα $P(x)=(2\kappa-2\lambda)x^2+(\kappa+\lambda)x+(2\mu-2)$ και $Q(x)=(\mu+\lambda+1)x^2+\mu x+2\lambda$

15. Να βρείτε τα α, β, γ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x)=4x^2-2x+1$ να παίρνει τη μορφή $P(x)=\alpha x(x-3)+(\beta+2)x+\gamma-1$

16. Να προσδιοριστεί ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)=(\lambda^2+5\lambda+9)x^2+(\lambda-3)x+(\lambda^2-1)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

17. Να προσδιοριστεί, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ο βαθμός του πολυώνυμου :
 $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x^2 + (\lambda^2 + 1)x + 2$
18. Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x) = (\lambda^3 - \lambda)x^2 + (\lambda^2 + \lambda)x + \lambda^2 - 2\lambda - 3$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το $P(x)$ είναι :
 i. είναι σταθερό πολυώνυμο, ii. είναι μηδενικό πολυώνυμο, iii. έχει βαθμό μηδέν.
19. Έστω τα πολυώνυμα $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 8$ και $Q(x) = \alpha x^3 - \beta x^2 + \gamma x - \delta$. Να βρείτε τι πρέπει να ισχύει για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ώστε το πολυώνυμο $P(x) - Q(x)$ να είναι :
 i. 3^{ου} βαθμού ii. το πολύ 2^{ου} βαθμού iii. Μηδενικό πολυώνυμο.
20. Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η αριθμητική τιμή του πολυώνυμου $P(x) = (\lambda^2 + 4\lambda)x^3 - (1 + \lambda)x^2 + (3\lambda + 2)x + 3$ για $x = -2$ να είναι 5.
21. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 4, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(1 - 3x)$ έχει ρίζα τον αριθμό -1.
22. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί -3 και 2 είναι ρίζες του πολυώνυμου $P(x) = -3x^2 + 5x + 2$
23. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \kappa x^2 + (\lambda - 2)x + 6$ έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 2.
24. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο $P(x) = (2\lambda^2 - 3)x^3 + 4\lambda x^2 - (\lambda - 5)x + 2005$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.
25. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$ έχει ρίζα τον αριθμό 2 και το άθροισμα των συντελεστών του είναι 8. (Υπόδειξη : Για να βρούμε το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$, υπολογίζουμε το $P(1)$)
26. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x - 1)^{2017} - x^{2018}$. Να βρείτε :
 i. τον σταθερό όρο του $P(x)$ ii. το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$.
27. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa - 1)x^3 + \kappa x^2 - (3\kappa - \lambda)x + 3\lambda$. Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να έχει ρίζα το 2 και η αριθμητική τιμή του για $x = -1$ να είναι 6.
28. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει : $(3x - 1) \cdot P(x) = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3$.
29. Έστω το πολυώνυμο $P(x)$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι :
 $P(2x + 1) = 3P(x) + 2$ για κάθε και $P(0) = 0$. Να δείξετε ότι $P(15) = 80$.

4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

➤ **ΘΕΩΡΗΜΑ (ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ)**

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\nu(x)$, τέτοια ώστε : $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \nu(x)$ όπου το $\nu(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

Το $\Delta(x)$ λέγεται διαιρετέος, το $\delta(x)$ διαιρέτης, το $\pi(x)$ πηλίκο και το $\nu(x)$ υπόλοιπο της διαίρεσης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

A. ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

1. Να κάνετε τη διαίρεση : $(x^3 - 5x^2 + 2x - 1) : (x - 3)$ και στη συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Λύση :

Στη διαίρεση της εκφώνησης, το πολυώνυμο $\Delta(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 1$ ονομάζεται διαιρετέος ενώ το πολυώνυμο $\delta(x) = x - 3$ ονομάζεται διαιρέτης. Για να εκτελέσουμε τη διαίρεση ακολουθούμε τα εξής βήματα :

Βήμα 1 : Κάνουμε το σχήμα της διαίρεσης και γράφουμε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x . Αν λείπει κάποια δύναμη την συμπληρώνουμε με συντελεστή μηδέν.

$$x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \Big| \frac{x - 3}{}$$

Βήμα 2 : Διαιρούμε τον πρώτο όρο του διαιρετέου x^3 με τον πρώτο όρο του διαιρέτη x . Έτσι : $x^3 : x = x^2$

$$x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \Big| \frac{x - 3}{x^2}$$

Βήμα 3 : Πολλαπλασιάζουμε τον πρώτο όρο του πηλίκου x^2 με τον διαιρέτη : $x^2(x - 3) = x^3 - 3x^2$ και το γινόμενο αυτό το αφαιρούμε από τον διαιρετέο.

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \\ -x^3 + 3x^2 \\ \hline -2x^2 + 2x - 1 \end{array} \Big| \frac{x - 3}{x^2}$$

Βήμα 4 : Το πολυώνυμο $-2x^2 + 2x - 1$ είναι το πρώτο μερικό υπόλοιπο. Θεωρώντας αυτό ως νέο διαιρετέο, επαναλαμβάνουμε τα δυο προηγούμενα βήματα.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 + 2x - 1 & x - 3 \\ -x^3 + 3x^2 & \\ \hline -2x^2 + 2x - 1 & \\ 2x^2 - 6x & \\ \hline -4x - 1 & \end{array}$$

Βήμα 5 : Το πολυώνυμο $-4x - 1$ είναι το δεύτερο μερικό υπόλοιπο. Θεωρώντας αυτό ως νέο διαιρετέο, επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα βήματα. **Όταν το μερικό υπόλοιπο που θα προκύψει έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του διαιρέτη, τότε η διαίρεση σταματά.** Δηλαδή το τελικό υπόλοιπο της διαίρεσης είναι -13 και το πηλίκο $x^2 - 2x - 4$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 + 2x - 1 & x - 3 \\ -x^3 + 3x^2 & \\ \hline -2x^2 + 2x - 1 & \\ 2x^2 - 6x & \\ \hline -4x - 1 & \\ 4x - 12 & \\ \hline -13 & \end{array}$$

Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει η ταυτότητα της διαίρεσης :

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x) \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = (x - 3) \cdot (x^2 - 2x - 4) + (-13)$$

(Διαιρετέος)=(Διαιρέτης)(Πηλίκο)+(Υπόλοιπο)

2. Να κάνετε τη διαίρεση : $(2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2) : (x^2 + x)$ και στη συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Λύση :

Γράφουμε το γνωστό σχήμα της διαίρεσης

Διαιρούμε το μεγιστοβάθμιο όρο του Διαιρετέου με το μεγιστοβάθμιο όρο του διαιρέτη. Έτσι υπολογίζουμε τον πρώτο όρο του πηλίκου. Άρα :

$$\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2.$$

$2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2$	$x^2 + x$ $2x^2$
------------------------------	-------------------------

Πολλαπλασιάζουμε τον όρο που βρήκαμε στο πηλίκο με κάθε όρο του διαιρέτη (κάνουμε δηλαδή επιμεριστική ιδιότητα).

$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2 \\ - 2x^4 - 2x^3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} x^2 + x \\ \hline 2x^2 \end{array}$
--	---

Τοποθετούμε το αποτέλεσμα κάτω απ' το Διαιρετέο, αλλά **με αντίθετα πρόσημα** (επειδή εννοείται ότι αφαιρούμε το αποτέλεσμα από το Διαιρετέο). Προσέχουμε κάθε όρος να βρίσκεται ακριβώς κάτω από τον αντίστοιχο (ομοιοβάθμιο) όρο του Διαιρετέου.

$\begin{array}{r} \cancel{2x^4} + 3x^3 - x^2 + 5x - 2 \\ - \cancel{2x^4} - 2x^3 \\ \hline x^3 - x^2 + 5x - 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} x^2 + x \\ \hline 2x^2 \end{array}$
---	---

Εκτελούμε την πρόσθεση. Οι αντίθετοι όροι διαγράφονται. Έπειτα «κατεβάζουμε» και τους υπόλοιπους όρους του Διαιρετέου.

$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2 \\ - 2x^4 - 2x^3 \\ \hline x^3 - x^2 + 5x - 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} x^2 + x \\ \hline 2x^2 + x \end{array}$
---	---

Συνεχίζουμε κατά τον ίδιο τρόπο, έως ότου ο βαθμός του υπολοίπου γίνει μικρότερος από εκείνον του διαιρέτη. Τότε η διαίρεση σταματάει.

$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2 \\ - 2x^4 - 2x^3 \\ \hline x^3 - x^2 + 5x - 2 \\ - x^3 - x^2 \\ \hline - 2x^2 + 5x - 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} x^2 + x \\ \hline 2x^2 + x \end{array}$
--	---

Άρα, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης θα γράφεται:

$$\underbrace{2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2}_{\Delta(x)} = \underbrace{(x^2 + x)}_{\delta(x)} \cdot \underbrace{(2x^2 + x - 2)}_{\pi(x)} + \underbrace{7x - 2}_{\upsilon(x)}$$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ $P(x)$ ΜΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x-\rho$ (ΣΧΗΜΑ HORNER)

ΘΕΩΡΗΜΑ Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυώνυμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυώνυμου για $x=\rho$. Είναι δηλαδή $v=P(\rho)$.

Έτσι η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται : $P(x) = (x-\rho)\pi(x) + P(\rho)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-\rho$ είναι : $P(x) = (x-\rho)\pi(x) + v(x)$. Επειδή ο διαιρέτης $x-\rho$ είναι 1^{ου} βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι σταθερό πολυώνυμο v . Έτσι έχουμε : $P(x) = (x-\rho)\pi(x) + v$ και, αν θέσουμε $x=\rho$, παίρνουμε $P(\rho) = (\rho-\rho)\pi(\rho) + v = 0 + v = v$.

Επομένως : $P(x) = (x-\rho)\pi(x) + P(\rho)$

ΘΕΩΡΗΜΑ Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Έστω ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Τότε $P(x) = (x-\rho)\pi(x)$. Από την ισότητα αυτή για $x=\rho$ παίρνουμε $P(\rho) = (\rho-\rho)\pi(\rho) = 0$, που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

Αντιστρόφως :

Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή ισχύει $P(\rho) = 0$. Τότε από τη σχέση $P(x) = (x-\rho)\pi(x) + P(\rho)$ παίρνουμε $P(x) = (x-\rho)\pi(x)$, που σημαίνει ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ΣΧΗΜΑ HORNER

Όταν έχω να εκτελέσω μια διαίρεση ενός πολυώνυμου $P(x)$ με ένα παράγοντα της μορφής $x-\rho$, τότε χρησιμοποιώ το σχήμα Horner, ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία.

ΠΡΟΣΟΧΗ : Για ένα πολυώνυμο $P(x)$, οι ακόλουθες εκφράσεις είναι ισοδύναμες :

- «το $x-\rho$ διαιρεί το $P(x)$ »,
- «η διαίρεση του $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι τέλεια»,
- «το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$ »
- «το ρ είναι ρίζα του $P(x)$ »
- «το $P(x)$ διαιρείται με το $x-\rho$ »
- «το $x-\rho$ είναι διαιρέτης του $P(x)$ »
- «το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-\rho)$ είναι ίσο με μηδέν»

Σε κάθε περίπτωση ισχύει : $P(\rho) = 0$.

Αυτό σημαίνει ότι αν δοθεί μια από τις παραπάνω εκφράσεις, τότε θα ισχύουν συγχρόνως όλες μαζί και άμεσα συμπεραίνουμε ότι $P(\rho) = 0$.

Β. ΣΧΗΜΑ HORNER**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**

3. (Άσκηση 4 σελ.139 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκια και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων :

i. $(-x^3 + 75x - 250) : (x + 10)$ ii. $(2x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 5x - 2) : (x - 3)$

Λύση :

i.

Βήμα 1 : Κάνουμε τον πίνακα του σχήματος Horner και στην πρώτη γραμμή γράφουμε τους συντελεστές του διαιρετέου. Αν λείπει κάποια δύναμη του x , τη συμπληρώνουμε με συντελεστή μηδέν. Στο τέλος της πρώτης γραμμής, γράφουμε το ρ

-1	0	75	-250	-10

Βήμα 2 : Κατεβάζουμε τον πρώτο συντελεστή στην 1^η θέση της 3^{ης} γραμμής.

-1	0	75	-250	-10
↓				
-1				

Βήμα 3 : Πολλαπλασιάζουμε με ρ τον πρώτο αριθμό της 3^{ης} γραμμής και γράφουμε το γινόμενο στη 2^η θέση της 2^{ης} γραμμής. Στη συνέχεια προσθέτουμε τους αριθμούς της 2^{ης} στήλης και γράφουμε το άθροισμα στη 2^η θέση της 3^{ης} γραμμής.

-1	0	75	-250	-10
↓				
-1	10			
	10			

Βήμα 4 : Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για τον αριθμό που βρίσκεται στη 2^η θέση της 3^{ης} γραμμής και συνεχίζουμε μέχρι να τελειώσουν οι συντελεστές του διαιρετέου στην πρώτη γραμμή.

-1	0	75	-250	-10
↓	10	-100	250	
-1	10	-25	0	

Συντελεστές - πηλίκου υπόλοιπο

Προσοχή :

- Στη διαίρεση $P(x) : (x - \rho)$ ο βαθμός του πηλίκου είναι κατά 1 μικρότερος από τον βαθμό του $P(x)$. Επίσης αφού ο διαιρέτης $x - \rho$ είναι 1^{ου} βαθμού, το υπόλοιπο είναι ένας πραγματικός αριθμός.
- Οι αριθμοί που βρίσκονται στην 3^η γραμμή (εκτός από τον τελευταίο) παριστάνουν του συντελεστές του πηλίκου της διαίρεσης.
- Ο τελευταίος αριθμός της 3^{ης} γραμμής παριστάνει το υπόλοιπο της διαίρεσης.

Με αυτά στο μυαλό μας στη διαίρεση : $(-x^3 + 75x - 250) : (x + 10)$ ο διαιρετέος είναι 3^{ου} βαθμού, άρα το πηλίκο θα είναι 2^{ου} βαθμού με συντελεστές όπως προκύπτουν από το Horner -1, 10, -25 άρα το πηλίκο έχει τη μορφή : $\pi(x) = -x^2 + 10x - 25$ και το υπόλοιπο $\nu = 0$. Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι :

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + v(x) \Leftrightarrow -x^3 + 75x - 250 = (x+10)(-x^2 + 10x - 25) + 0$$

ii.

Εδώ γράφουμε τους συντελεστές του Διαιρετέου

Κατεβάζουμε

2 - 3 - 10 5 - 2

2 - 3 - 10 5 - 2

Πολλαπλασιάζουμε με το ρ

6

Εδώ γράφουμε το ρ

3

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε στο εξής σχήμα :

Diagram illustrating a queue structure with 6 elements. The elements are 2, -3, -10, 5, -2, and 3. The first four elements (2, -3, -10, 5) are grouped under the label $\pi(x)$. The last two elements (-2, 3) are grouped under the label $u(x)$. The element 3 is highlighted with a red box.

Το τελευταίο άθροισμα που βρήκαμε (στο πλαίσιο) είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης, δηλαδή $u = 4$. Τα υπόλοιπα επί μέρους άθροίσματα (2, 3, -1, 2) αποτελούν τους συντελεστές του πηλίκου. Προφανώς, αφού διαιρέσαμε με το $x - 3$ που είναι πρώτου βαθμού, το πηλίκο θα είναι ένα πολυώνυμο κατά ένα βαθμό μικρότερο από το Διαιρετέο. Άρα ο πρώτος όρος θα είναι ο x^3 , ο δεύτερος ο x^2 κτλ. δηλαδή θα έχουμε :

$$\pi(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2.$$

Γράφουμε τελικά:

$$\underbrace{2x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 5x - 2}_{\Delta(x)} = \underbrace{(x-3)}_{\delta(x)} \cdot \underbrace{(x^3 + 3x^2 - x + 2)}_{\pi(x)} + \underbrace{4}_{u(x)}$$

Γ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ – ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

4. (Άσκηση 6 σελ.139 Α'ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα της μορφής $x - \rho$ που δίνονται σε κάθε περίπτωση, είναι παράγοντες του $P(x)$.

i. $P(x) = x^4 - 25x^2 + 144$ $x + 3$

Λύση :

i. 1^{ος} τρόπος : Το $x + 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$ αν και μόνο αν $P(-3) = 0$.

Πράγματι $P(-3) = (-3)^4 - 25(-3)^2 + 144 = 81 - 225 + 144 = 0$.

2^{ος} τρόπος : Το $x + 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$ αν και μόνο αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) : (x + 3)$ είναι 0 δηλαδή με το σχήμα Horner :

1	0	-25	0	144	-3
↓	-3	9	48	-144	
1	-3	-16	48	0	

Όπως φαίνεται και από το σχήμα Horner το $x + 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

5. (Άσκηση 3 σελ.139 Α'ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τις τιμές του κ , για τις οποίες το $x - 1$ είναι παράγοντας του $g(x) = \kappa^2 x^4 + 3\kappa x^2 - 4$.

Λύση :

Το $x - 1$ είναι παράγοντας του $g(x)$ αν και μόνο αν $g(1) = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 + 3\kappa - 4 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1$ ή $\kappa = -4$.

Δ. ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ $P(x)$ ΕΧΕΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ (Ή ΔΙΑΙΡΕΙΤΑΙ) ΜΕ ΤΟ $(x - \alpha)(x - \beta)$ Ή ΜΕ ΤΟ $(x - \alpha)^2$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6. (Άσκηση 3 σελ.140 β'ομάδας σχολικού βιβλίου)

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2$ διαιρείται με το $(x - 1)(x - 2)$ και να βρείτε το πηλίκο.

Λύση :

Για το $P(x)$ και για $\rho = 1$ έχουμε :

2	-6	5	-3	2	1
↓	2	-4	1	-2	
2	-4	1	-2	0	

Άρα είναι : $P(x) = (x - 1)(2x^3 - 4x^2 + x - 2)$

Για το $\pi(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 2$ και για $\rho = 2$ έχουμε :

2	-4	1	-2	2
↓	4	0	2	
2	0	1	0	

Άρα είναι : $\pi(x) = (x-2)(2x^2+1)$. Οπότε τελικά $P(x) = (x-1)(x-2)(2x^2+1)$.

Αυτό σημαίνει ότι το $P(x)$ διαιρείται με το $(x-1)(x-2)$ και το πηλίκο της διαίρεσης είναι το $\pi'(x) = 2x^2+1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- Στην ταυτότητα της διαίρεσης πολυωνύμων το υπόλοιπο έχει βαθμό ο οποίος είναι μικρότερος από τον βαθμό του διαιρέτη.
- Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-r$ έχει βαθμό 0.
- Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $P(r) \neq 0$, τότε το $P(x)$ δεν έχει παράγοντα το $x-r$.
- Αν η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-r$ είναι τέλεια, τότε ο αριθμός r είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- Αν ο διαιρέτης σε μια διαίρεση πολυωνύμων είναι δευτέρου βαθμού, τότε το υπόλοιπο έχει βαθμό το πολύ 1.
- Αν ο διαιρέτης σε μια διαίρεση πολυωνύμων είναι δευτέρου βαθμού, τότε το υπόλοιπο έχει τη μορφή $ax+b$.
- Αν το πηλίκο μιας διαίρεσης πολυωνύμων είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο διαιρετέος είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
- Αν ο διαιρετέος είναι 3^{ου} βαθμού και ο διαιρέτης 2^{ου} βαθμού, τότε το πηλίκο έχει μορφή $ax+b$ με $a \neq 0$.
- Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το x^2-4 , τότε $P(2)=0=P(-2)$.
- Για να έχει το $P(x)$ παράγοντα το $(x-2)(x+2)$, πρέπει $P(2)=0$ και $P(-2)=0$, όπου $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με $x-2$.
- Αν το $x-2$ δεν είναι παράγοντας του $P(x)$, τότε $P(2) \neq 0$.
- Αν $P(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το $P(x)$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $x-r$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

A. ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

6. Να γίνουν οι ακόλουθες διαιρέσεις :

- $(2x^3 + 5x^2 - 6x - 1) : (x - 1)$
- $(10x^4 + 7x^2 - 3x + 5) : (2x^2 - 1)$
- $(8x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x + 2) : (x^2 + x + 2)$

7. Ομοίως :

- $(5x^2 - 12x - 32) : (x - 4)$
- $(7x^3 - 2x^2 + 9) : (x^2 + 2)$
- $(11x^5 + 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1) : (x^2 - 3x + 5)$

Β. ΣΧΗΜΑ HORNER

8. Να βρεθεί με τη βοήθεια του σχήματος Horner, το πηλίκο, το υπόλοιπο και η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυώνυμου $\Delta(x) = 7x^4 - 5x^2 - x - 1$ με τα πολυώνυμα :
- i. $x-1$ ii. $x+2$
9. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρεθούν τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων :
- i. $(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6x - 8) : (x - 2)$ ii. $(5x^2 - 2ax - 3a^2) : (x - a)$
10. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = 3x^4 - 6x^2 + 7x + 62$. Να βρεθεί το $P(2)$ με τη βοήθεια του σχήματος Horner.

Γ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ – ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

11. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\Delta(x) = 5x^3 - 4x^2 - x + 3$ με τα πολυώνυμα :
- i. $x-2$ ii. $x+1$ iii. $2x-3$
12. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης : $(x^{2017} + 4x^{1982} - x^{1999} + 2004x + 1) : (x - 1)$
13. Να αποδείξετε ότι το $(x-2)$ είναι παράγοντας του πολυώνυμου $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 6$
14. Να βρείτε τα $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x) = (a-2)x^3 + ax^2 + 3x - 6$ να διαιρείται με το $(x+2)$.
15. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda x^3 + (2\mu - 1)x^2 + (\lambda - \mu)x + 1$. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x-1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ να είναι 4.
16. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 3x^2 + 10$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $(x-p)$.

Δ. ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ $P(x)$ ΕΧΕΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ (Ή ΔΙΑΙΡΕΙΤΑΙ) ΜΕ ΤΟ $(x - \alpha)(x - \beta)$ Ή ΜΕ ΤΟ $(x - \alpha)^2$.

17. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9$, διαιρείται με το $(x-1)(x-3)$ και να βρείτε το αντίστοιχο πηλίκο.
18. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12$, διαιρείται με το $x^2 - 4$ και να βρείτε το αντίστοιχο πηλίκο.
19. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τα οποία το $P(x) = x^3 - (\alpha + 1)x^2 + \beta x + 1$ έχει παράγοντα το $x^2 - 3x + 2$.

20. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24$ έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.
21. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 + (\mu-2)x + 3$. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x^2 + x - 2$.
22. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \lambda x^2 + \mu$. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.
23. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + (\alpha - \beta)x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + x - 6$ να έχει ρίζες τις $x = 2, x = -3$. Στη συνέχεια, για τις τιμές των α, β που βρήκατε να υπολογίσετε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x-2)(x+3)$.

Ε. Η ΔΙΑΙΡΕΣΗ $P(x) : (\alpha x + \beta), \alpha \neq 0$

24. Να αποδείξετε ότι το $2x-3$ είναι παράγοντας του $P(x) = 2x^3 + x^2 - 12x + 9$.
25. Να αποδείξετε ότι το $3x+1$ είναι παράγοντας του $P(x) = (3x+2)^{2016} + (3x)^5 - 12x - 4$.
26. Το πολυώνυμο $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + \alpha x + \beta$ έχει παράγοντα το $3x-2$, ενώ το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (2x-1)$ είναι 3. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ΣΤ. ΣΥΝΘΕΤΕΣ – ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

27. Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του $P(x)$ με τα $x-2$ και $x+3$ είναι 4 και -1 αντίστοιχα, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 + x - 6)$.
28. Αν το $(x+4)$ είναι παράγοντας του $P(x)$, να αποδείξετε ότι το $(x-3)$ είναι παράγοντας του $P(11-5x)$.
29. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - x - 6$ είναι $-4x+1$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-3$ καθώς και το υπόλοιπο με το $x+2$.
30. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης : $(x^{100} - 3x^{47} + 5x^{13} - 4x + 1) : (x^2 - 1)$.
31. Ένα πολυώνυμο $\Delta(x)$, όταν διαιρεθεί με το $\delta(x) = x^2 - 2x$ δίνει πηλίκο $\pi(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.
- Να βρεθεί ο βαθμός του $\Delta(x)$.
 - Αν επιπλέον το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης είναι $\nu(x) = -3x + 5$, να βρείτε το $\Delta(x)$.

4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 3, μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1^ο μέλος και κάνουμε παραγοντοποίηση. Στη συνέχεια εκμεταλλευόμαστε την ιδιότητα : $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \beta = 0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 146 Α' Ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

iii. $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2$

Λύση :

Έχω : $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2 \Leftrightarrow 3x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^5 - 3x^3 + 5x^4 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^3(x^2 - 1) + 5x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(3x^3 + 5x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1)(3x + 5) = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (διπλή)}$

ή

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

ή

$3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΡΙΖΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω η πολυωνυμική εξίσωση : $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ με ακεραίους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

Παρατηρήσεις – Σχόλια :

➤ Μια πολυωνυμική εξίσωση ν-οστού βαθμού έχει το πολύ ν πραγματικές ρίζες. Δηλαδή, μια εξίσωση 3^{ου} βαθμού έχει το πολύ 3 ρίζες.

➤ **Μεθοδολογία :** Για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση (3^{ου} βαθμού και πάνω), χρησιμοποιούμε το θεώρημα ακεραίων ριζών. Με τη βοήθεια του σχήματος **Horner** και τους κλασικούς τρόπους **παραγοντοποίησης**, φέρνουμε την εξίσωση σε μορφή $P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \dots \cdot P_v(x) = 0$ οπότε $P_1(x) = 0$ ή $P_2(x) = 0$ ή ... ή $P_v(x) = 0$ (Στο σχήμα Horner όλες οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι διαιρέτες του σταθερού όρου.)

(Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι όλα τα πολυώνυμα $P_1(x), P_2(x), \dots, P_v(x)$ να είναι το πολύ 2^{ου} βαθμού)

➤ **Μεθοδολογία :** Σε πιο σύνθετες μορφές κάνουμε αντικατάσταση μιας ποσότητας, ώστε να προκύψει πιο εύκολη εξίσωση.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

2. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

ii. $2x^3 + 15x^2 + 19x + 6 = 0$

Λύση :

i. Οι διαιρέτες του σταθερού όρου είναι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Παρατηρώ όμως ότι το άθροισμα των συντελεστών της εξίσωσης είναι 0, άρα η ρίζα είναι το 1.

1	-2	-5	6	1
	1	-1	-6	
1	-1	-6	0	

$$\text{Άρα : } x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=-2$$

ii. Οι διαιρέτες του σταθερού όρου είναι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Όταν όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι ομόσημοι (είτε θετικοί, είτε αρνητικοί), τότε η εξίσωση δεν μπορεί να έχει θετικές ρίζες. Έτσι δοκιμάζω με όλες τις αρνητικές. Τελικά :

2	15	19	6	-1
	-2	-13	-6	
2	13	6	0	

$$\text{Άρα : } 2x^3 + 15x^2 + 19x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2 + 13x + 6) = 0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } 2x^2 + 13x + 6 = 0 \Leftrightarrow x=-6 \text{ ή } x=-\frac{1}{2}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

3. i. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές. Να βρείτε, ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι ψευδής.

- A. Αν ο ακέραιος $r \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο r είναι διαιρέτης του a_0 .
 B. Αν ο ακέραιος r δεν είναι διαιρέτης του a_0 , τότε ο r δεν είναι ρίζα της εξίσωσης.
 Γ. Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του a_0 .
 Δ. Αν ο r είναι διαιρέτης του a_0 , τότε ο r είναι ρίζα της εξίσωσης.

ii. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές. Να βρείτε, ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι ψευδής.

- A. Αν οι αριθμοί $a_0, a_1, \dots, a_n$ είναι θετικοί, τότε η εξίσωση δεν έχει θετική ρίζα.
 B. Αν οι αριθμοί $a_0, a_1, \dots, a_n$ είναι αρνητικοί, τότε η εξίσωση δεν έχει αρνητική ρίζα.
 Γ. Αν οι όροι της εξίσωσης με τις περιττές δυνάμεις του x έχουν συντελεστές αρνητικούς αριθμούς και με τις άρτιες δυνάμεις του x έχουν συντελεστές θετικούς, τότε η εξίσωση δεν έχει αρνητική ρίζα.
 Δ. Αν $a_0 \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει ρίζα το 0.
 E. Αν $a_0 + a_1 + \dots + a_n = 0$, τότε η εξίσωση έχει ρίζα το 1.

iii. Έστω η εξίσωση $x^5 - 3x^2 - \alpha x + 12 = 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Να εξετάσετε, ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι ψευδής.

A. Αποκλείεται το 5 να είναι ρίζα της εξίσωσης.

B. Αν ο ακέραιος ρ είναι ρίζα της εξίσωσης και $\rho > 7$, τότε $\rho = 12$.

Γ. Έστω $\rho \in \mathbb{Z}$ και $\rho > 4$. Αν $\rho \neq 6$ και $\rho \neq 12$, τότε ο ρ δεν είναι ρίζα της εξίσωσης.

Δ. Αν $\rho \in \mathbb{Z}$ και ο ρ είναι διαιρέτης του 12, τότε ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4. Να βρεθούν οι ακέραιες ρίζες της εξίσωσης : $x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6 = 0$.

5. Ομοίως οι εξισώσεις :

i. $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

ii. $x^3 + x^2 - 12 = 0$

iii. $2x^3 - 5x^2 = 5 - 2x$

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 5x^3 + x - 2 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

7. Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{Z}$ για τις οποίες η εξίσωση $x^3 - kx^2 + 6x + 2 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

8. Να λυθεί η εξίσωση : $(x^2 + x - 1)^2 - 3(x^2 + x + 3) + 14 = 0$

9. Να λυθεί η εξίσωση : $x^6 - 3x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

10. Να λυθεί η εξίσωση : $(x^2 + 2x - 2)^3 - 4(x^2 + 2x - 3)^2 - 23(x^2 + 2x - 4) - 24 = 0$

11. Ομοίως : i. $\frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{4}{10} = 0$ ii. $x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 2x + 1 = 0$ (Αντίστροφη εξίσωση)

12. Το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 - 20x + \mu$ έχει παράγοντα το $x + 2$, ενώ διαιρούμενο με το $x - 1$ δίνει υπόλοιπο -15 .

i. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

13. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης τη συνάρτησης : $f(x) = 5x^3 + 9x^2 - 3x - 2$ με τον άξονα $x'x$.

(Υπόδειξη : για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$)

14. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων : $f(x) = x^4 + 5x$ και $g(x) = 5x^3 + 1$

(Υπόδειξη : για να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων δυο συναρτήσεων f, g λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$)

15. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 11x - 2\alpha$ διέρχεται από το σημείο $M(-1, 6)$. Να βρείτε :

i. το $\alpha \in \mathbb{R}$. ii. τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

16. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x^3 + \alpha x^2 - 5x - \alpha - 2$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 6. Να βρείτε :
- i. το $\alpha \in \mathbb{R}$. ii. τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.
17. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$ και $g(x) = x^3 - \beta x^2 + \alpha x + 10$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $f(x)$ με το $x-1$ είναι -12 και το πολυώνυμο $g(x)$ έχει παράγοντα το $x+2$. Να βρείτε :
- i. τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ii. τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f, g .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσουμε μια πολυωνυμική ανίσωση 3^{ου} ή μεγαλύτερου βαθμού,

Βήμα 1 : μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1^ο μέλος

Βήμα 2 : κάνουμε παραγοντοποίηση (αν χρειαστεί με τη βοήθεια του σχήματος Horner), ώστε να φέρουμε την ανίσωση στη μορφή : $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$ ή $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) < 0$ (όπου οι παράγοντες $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$ είναι είτε 1^{ου} είτε 2^{ου} βαθμού)

Βήμα 3 : βρίσκουμε τις ρίζες (αν υπάρχουν) των παραγόντων $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$

Βήμα 4 : διατάσσουμε τις ρίζες σε έναν άξονα (από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη)

Βήμα 5 : κάτω από τον άξονα σχηματίζουμε πίνακα με τα πρόσημα των παραγόντων, στα διαστήματα που χωρίζεται ο άξονας από τις ρίζες.

Βήμα 6 : στην τελευταία γραμμή του πίνακα βρίσκουμε το πρόσημο του γινομένου εφαρμόζοντας τους κανόνες προσήμου :

- $(+) \cdot (+) = (+)$ $(-) \cdot (-) = (+)$
- $(+) \cdot (-) = (-)$ $(-) \cdot (+) = (-)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

18. Να λυθεί η ανίσωση : $x^3 - 3x + 2 < 0$

Λύση: Έχω $x^3 - 3x + 2 = 0$

1	0	-3	2	1
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

Άρα : $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x-1$	-		-	0	+
$x^2 + x - 2$	+	0	-	0	+
Γινόμενο	-	0	+	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^3 - 3x + 2 < 0$ τότε $x \in (-\infty, -2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

19. Να λυθούν οι ανισώσεις :

- i. $x^3 + 5x^2 - x - 5 > 0$
- ii. $x^3(x+1) - 2 > x(x-1)$
- iii. $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 < 0$

20. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση τη συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. Πότε βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$;

(Υπόδειξη : Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται **πάνω από τον** $x'x$ λύνουμε την ανίσωση $f(x) > 0$. Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται **κάτω από τον** $x'x$ λύνουμε την ανίσωση $f(x) < 0$.)

21. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση τη συνάρτησης $P(x) = 4x^5 + 12x^4 + x^3 - 18x^2 - 5x + 6$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

22. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση τη συνάρτησης $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$ δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

23. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^3 + 4x^2 + 4$.

(Υπόδειξη : Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται **πάνω από** τη C_g λύνουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$. Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται **κάτω από** τη C_g λύνουμε την ανίσωση $f(x) < g(x)$.)

24. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 - 2}$
- ii. $f(x) = \sqrt[4]{x^3 + 5x^2 + 2x - 8}$
- iii. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}}{x^3 - 6x^2 + 5x + 12}$

25. Δίνονται τα πολυώνυμα : $P(x) = x^3 + x^2 + \alpha x - 3\beta - 1$ και $Q(x) = x^3 + \beta x^2 + (\alpha - 3)x + 15$. Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$, ενώ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $x + 1$ είναι 24.

- i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -10$ και $\beta = -3$.
- ii. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $P(x) \geq 0$ και $Q(x) \leq 0$.

26. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 17x + 4\alpha$ διέρχεται από το σημείο $M(3, -36)$.

- i. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.
- ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

- iii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^3 - 7x - 36$.

27. Το πολυώνυμο : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + \alpha$ διαιρούμενο με το $2x - 1$ αφήνει υπόλοιπο 5.

- Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$
- Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $2x - 1$.
- Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 5$.

28. Το πολυώνυμο : $P(x) = 12x^3 - 8x^2 - 10x + \alpha$ έχει παράγοντα το $3x + 1$.

- Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$
- Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 3x + 1$.

29. Το πολυώνυμο : $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 - 20x + \mu$ έχει παράγοντα το $x + 2$, ενώ διαιρούμενο με το $x - 1$ αφήνει υπόλοιπο -15 .

- Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
- Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΡΙΖΑΣ ΜΕ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Για να βρούμε μια ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $P(x)=0$ με προσέγγιση δεκάτου, ενεργούμε ως εξής :

- Βρίσκουμε ένα διάστημα $(\alpha, \alpha+1)$, έτσι ώστε $P(\alpha)P(\alpha+1) < 0$ (ο α ακέραιος)
- Θεωρούμε τις τιμές $\alpha+0,1$, $\alpha+0,2$, ..., $\alpha+0,8$, $\alpha+0,9$ και εξετάζουμε για ποιο γειτονικό ζευγάρι το γινόμενο των τιμών τους είναι αρνητικό.
- Συνεχίζουμε με την ίδια διαδικασία για το ζευγάρι που βρήκαμε, στο οποίο προσθέτουμε 0,01, κι έτσι προκύπτουν 9 ενδιάμεσοι αριθμοί. Βρίσκουμε τα γειτονικά ζευγάρι που έχει αρνητικό γινόμενο τιμών, το οποίο θα έχει κοινά τα ψηφία των μονάδων και των δεκάτων. Ο αριθμός αυτός είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x)=0$ με προσέγγιση δέκατου.

Με παρόμοιο τρόπο ενεργούμε για να βρούμε μια ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $P(x)=0$ με προσέγγιση εκατοστού, χιλιοστού κτλ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

30. Αφού αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 5x^2 - 3 = 0$ έχει μια ρίζα τουλάχιστον στο διάστημα $(0,1)$, να βρείτε μια λύση της στο $(0,1)$ με προσέγγιση :

- δέκατου
- εκατοστού

4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσω μια κλασματική εξίσωση, δηλ. μια εξίσωση που έχει άγνωστο στον παρανομαστή,

Βήμα 1 : παραγοντοποιώ τους παρανομαστές και βρίσκω το ΕΚΠ τους,

Βήμα 2 : παίρνω περιορισμούς, δηλαδή $Ε.Κ.Π \neq 0$

Βήμα 3 : πολλαπλασιάζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να γίνει απαλοιφή παρανομαστών και λύνω την εξίσωση που προκύπτει,

Βήμα 4 : ελέγχω αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 153 Α' Ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

ii. $\frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$

Λύση :

Έχω : $\frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{(x-1)(x+1)}$, ΕΚΠ = $(x-1)(x+1)$

Πρέπει $(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq -1$

Έπειτα κάνω απαλοιφή παρανομαστών :

$$(x-1)(x+1) \frac{x^2}{x-1} - (x-1)(x+1) \frac{2}{x+1} = (x-1)(x+1) \frac{4}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+1) - 2(x-1) = 4 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x + 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$$

1	1	-2	-2	-1
	-1	0	2	
1	0	-2	0	

$$\text{Άρα : } x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \Leftrightarrow x=-1, \text{ Απορ.} \\ \text{ή} \\ x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}, \text{ Δεκτές} \end{cases}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΑΡΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Είναι οι εξισώσεις που περιέχουν 1 τουλάχιστον ρίζα. Για να τις λύσουμε :

Βήμα 1 : παίρνουμε τους περιορισμούς (υπόρριξη ποσότητα ≥ 0),

Βήμα 2 : βάζουμε το ένα ριζικό στο 1^ο μέλος και πηγαίνουμε όλους τους υπόλοιπους όρους στο 2^ο,

Βήμα 3 : αν στο 2^ο μέλος έχει άγνωστο τότε παίρνουμε περιορισμό και για το 2^ο μέλος ≥ 0

Βήμα 4 : υψώνουμε και τα δυο μέλη σε δύναμη ίση με την τάξη του ριζικού του 1^{ου} μέλους

Βήμα 5 : τέλος λύνουμε την εξίσωση και εξετάζουμε ποιες από τις λύσεις είναι δεκτές και ποιες απορρίπτονται.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

2. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\sqrt{4-2x}=1$

ii. $\sqrt{x+3}-x=1$

iii. $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+4}=1$

Λύση :

i. πρέπει $4-2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2$

$$\sqrt{4-2x}=1 \Leftrightarrow \sqrt{4-2x}^2=1^2 \Leftrightarrow 4-2x=1 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \text{ δεκτή}$$

ii. Έχω : $\sqrt{x+3}-x=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=x+1$

πρέπει $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ (1) και $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ (2). Από (1)&(2) ισχύει $x \geq -1$.

$$(\sqrt{x+3})^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x+3 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ (δεκτή)} \text{ ή } x=-2 \text{ (απορ.)}$$

iii. Έχω : $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+4}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+6}=\sqrt{x+4}+1$

πρέπει $2x+6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ (1) και $x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$ (2). Από (1)&(2) ισχύει $x \geq -3$.

$$(\sqrt{2x+6})^2 = (\sqrt{x+4}+1)^2 \Leftrightarrow 2x+6 = x+4+2\sqrt{x+4}+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+4} = x+1 \text{ εδώ επίσης}$$

πρέπει $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ (3). Άρα από (1), (2)&(3) ισχύει $x \geq -1$. Οπότε :

$$(2\sqrt{x+4})^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow 4(x+4) = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x=5 \text{ (δεκτή)} \text{ ή } x=-3 \text{ (απορ.)}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

➤ Μια κλασματική ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ ή $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ γράφεται ισοδύναμα

$A(x) \cdot B(x) > 0$ ή $A(x) \cdot B(x) < 0$ [όπου $B(x) \neq 0$] και αυτό γιατί το γινόμενο και το πηλίκο δυο αριθμών έχουν το ίδιο πρόσημο.

➤ Μια κλασματική ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > \Gamma(x)$ γράφεται :

$$\frac{A(x)}{B(x)} - \Gamma(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{A(x) - B(x) \cdot \Gamma(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow [A(x) - B(x) \cdot \Gamma(x)] \cdot B(x) > 0$$

και λύνεται όπως η προηγούμενη.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\text{i. } \frac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \leq 0 \quad \text{ii. } \frac{x^2+3}{x^2-5x+6} < 0 \quad \text{iii. } \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} \geq \frac{8}{x^2-1}$$

Λύση :i. Πρέπει $x^2 - 5x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq 4$

$$\text{Έχω : } \frac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2-5x+4) \leq 0$$

$$(x^2+3x)(x^2-5x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(x+3)=0 \Leftrightarrow x=0, \text{ ή } x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$$

$$\text{ή } x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=4$$

x	$-\infty$	-3		0		1		4	$+\infty$
x^2+3x	+	0	-	0	+		+		+
x^2-5x+4	+		+		+	0	-	0	+
Γινόμενο - Πηλίκο	+	0	-	0	+		-		+

Άρα επειδή θέλω $\frac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2-5x+4) \leq 0$ τότε $x \in [-3,0] \cup (1,4)$.

(Στο (1,4) είναι ανοιχτό λόγω του περιορισμού)

ii. Πρέπει $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και $x \neq 3$

$$\text{Έχω : } \frac{x^2+3}{x^2-5x+6} < 0 \Leftrightarrow (x^2+3)(x^2-5x+6) < 0$$

$$(x^2+3)(x^2-5x+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+3=0 \Leftrightarrow x^2=-3, \text{ Αδύνατη}$$

$$\text{ή } x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=3$$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
x^2+3	+		+		+
x^2-5x+6	+	0	-	0	+
Γινόμενο - Πηλίκο	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $\frac{x^2+3}{x^2-5x+6} < 0 \Leftrightarrow (x^2+3)(x^2-5x+6) < 0$ τότε $x \in (2,3)$.

(Όταν μια παράσταση είναι πάντα θετική τότε δεν επηρεάζει το πρόσημο στην τελευταία σειρά στο πινακάκι. Οπότε θα μπορούσε να παραληφτεί εντελώς.)

$$\text{iii. Έχω : } \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \quad \text{ΕΚΠ} = (x-1)(x+1)$$

Πρέπει $(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ \& } x \neq -1$. (Σε αυτό το σημείο όμως δεν κάνω απαλοιφή παρανομαστών όπως στις αντίστοιχες κλασματικές εξισώσεις, αλλά **ομώνυμα κλάσματα**. Αυτό γιατί η απαλοιφή παρανομαστών δεν επιτρέπεται στις ανισώσεις

καθώς η παράσταση με την οποία θα πολλαπλασιάσω κάθε όρο, δεν γνωρίζω αν είναι θετική ή αρνητική)

$$\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1) - 2(x-1) - 8}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2x + 2 - 8}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 6)(x^2 - 1) \geq 0$$

Έχω : $(x^2 - x - 6)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -2$ ή $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

x	$-\infty$	-2		-1		1		3	$+\infty$
$x^2 - x - 6$	+	0	-		-		-	0	+
$x^2 - 1$	+		+	0	-	0	+		+
Γινόμενο – Πηλίκο	+	0	-		+		-	0	+

Άρα επειδή θέλω $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 6)(x^2 - 1) \geq 0$ τότε
 $x \in (-\infty, -2] \cup (-1, 1) \cup [3, +\infty)$. (Στο $(-1, 1)$ είναι ανοιχτό λόγω του περιορισμού)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΑΡΡΗΤΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Είναι οι ανίσωσης που περιέχουν 1 τουλάχιστον ρίζα. Για να τις λύσουμε :

➤ **ΜΟΡΦΗ** : $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ ή $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$

Βήμα 1 : παίρνουμε τους περιορισμούς (υπόρριζες ποσότητες ≥ 0),

Βήμα 2 : βάζουμε το ένα ριζικό στο 1^ο μέλος και το άλλο στο 2^ο,

Βήμα 3 : υψώνουμε και τα δυο μέλη σε δύναμη ίση με την τάξη του ριζικού

Βήμα 4 : τέλος λύνουμε την ανίσωση και συναληθεύουμε με τους περιορισμούς.

➤ **ΜΟΡΦΗ** : $\sqrt{f(x)} > g(x)$ ή $\sqrt{f(x)} < g(x)$

Βήμα 1 : παίρνουμε τους περιορισμούς (υπόρριξη ποσότητες ≥ 0),

Βήμα 2 : βάζουμε το ένα ριζικό στο 1^ο μέλος και πηγαίνουμε όλους τους υπόλοιπους όρους στο 2^ο,

Βήμα 3 : διακρίνουμε τις περιπτώσεις : $g(x) < 0$ και $g(x) \geq 0$ και εξετάζουμε για ποιες τιμές του x ισχύουν.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

4. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $\sqrt{8-x} > \sqrt{x-2}$ ii. $\sqrt{x-3} + 5 \geq x$ iii. $\sqrt{x+4} - 7 \leq x$

Λύση:

i. Πρέπει : $\begin{cases} 8-x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 8 \text{ ή } x \in [2, 8] \text{ (1)}$

$$\sqrt{8-x} > \sqrt{x-2} \Leftrightarrow (\sqrt{8-x})^2 > (\sqrt{x-2})^2 \Leftrightarrow 8-x > x-2 \Leftrightarrow 10 > 2x \Leftrightarrow 2x < 10 \Leftrightarrow x < 5 \quad (2)$$

Από (1) και (2) ισχύει : $x \in [2,5)$

ii. Έχω : $\sqrt{x-3} + 5 \geq x \Leftrightarrow \sqrt{x-3} \geq x-5 \quad (1)$ πρέπει : $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \quad (2)$

Διακρίνω τις περιπτώσεις :

- $x-5 < 0 \Leftrightarrow x < 5 \quad (3)$ άρα από (2) και (3) $x \in [3,5)$
- $x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$ (καλύπτει τον περιορισμό (2) : $x \geq 3$). Τότε στην ανίσωση (1) και τα δυο μέλη είναι μη αρνητικά ≥ 0 άρα μπορώ να υψώσω στο τετράγωνο, έτσι έχω : $\sqrt{x-3} \geq x-5 \Leftrightarrow (\sqrt{x-3})^2 \geq (x-5)^2 \Leftrightarrow x-3 \geq x^2-10x+25 \Leftrightarrow x^2-11x+28 \leq 0$

Είναι $x^2-11x+28=0 \Leftrightarrow x=7$ ή $x=4$

x	$-\infty$	4		7	$+\infty$
$x^2-11x+28$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2-11x+28 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [4,7]$. Συναληθευοντας τη λύση αυτή με τον περιορισμό $x \geq 5$ προκύπτει ότι $x \in [5,7]$

Άρα τελικά από τις παραπάνω περιπτώσεις προκύπτει ότι η ανίσωση ισχύει αν : $x \in [3,5)$ ή $x \in [5,7]$, δηλαδή τελικά $x \in [3,7]$

iii. Έχω : $\sqrt{x+4} - 7 \leq x \Leftrightarrow \sqrt{x+4} \leq x+7 \quad (1)$ πρέπει : $x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4 \quad (2)$

Διακρίνω τις περιπτώσεις :

- $x+7 < 0 \Leftrightarrow x < -7 \quad (3)$ άρα από (2) και (3) η ανίσωση (1) είναι αδύνατη
- $x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$, τότε για $x \in [-7, -4)$ η (1) δεν ορίζεται, ενώ για $x \in [-4, +\infty)$ τα δυο μέλη της ανίσωσης (1) είναι μη αρνητικά ≥ 0 άρα μπορώ να υψώσω στο τετράγωνο, έτσι έχω : $\sqrt{x+4} \leq x+7 \Leftrightarrow (\sqrt{x+4})^2 \leq (x+7)^2 \Leftrightarrow x+4 \leq x^2+14x+49 \Leftrightarrow x^2+13x+45 \geq 0 \quad \Delta = -11$, άρα :

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2+13x+45$	+	

άρα $x^2+13x+45 \geq 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ σε συνδυασμό με τον περιορισμό $x \geq -4$ ισχύει τελικά $x \in [-4, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

5. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+2} = \frac{x}{2}$ ii. $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4}$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\frac{2x}{3x-6} - \frac{x}{2x-4} = 1 + \frac{5x-12}{12-6x}$ ii. $\frac{1}{2x^2-x} = \frac{2}{2x-1} + x^2$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\sqrt{3x-7} = 2$

ii. $\sqrt{2x+7} = x+2$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\sqrt{x-4} - 14 = 2 - x$

ii. $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x-1} = 2$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\sqrt{2+x} + \sqrt{3x-5} = 7$

ii. $\sqrt{x+32} + \sqrt{x} = 16$

iii. $\sqrt[3]{4x-1} + 4 = x$

iv. $\sqrt[3]{2x-3} = \sqrt{x-6}$

10. Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}} = \frac{4-\sqrt{x}}{2}$

11. Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$.

12. Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = \sqrt{8x+1}$

13. Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 4$

14. Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{9x^2+1} = 3x-\lambda$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

15. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu^3 x + 4\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu x + 2 = 0$

16. Να λυθεί η εξίσωση : $2\eta\mu^4 x + 5\eta\mu^3 x + 8\sigma\upsilon\nu^2 x - 17\eta\mu x - 14 = 0$

17. Να λυθεί η εξίσωση : $(x^2 - 3x - 2)^2 + (x^2 - 3x - 4)^2 - 8 = 0$

18. Να λυθεί η εξίσωση : $x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} - 6 = 0$

19. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i. $\frac{x^3 - 4x + 15}{x^2 - 9} < -3$

ii. $\frac{x^3 + 3x - 8}{x - 3} \leq 2$

iii. $\frac{3x^2 - 1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - x} > \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$

iv. $\frac{x^2}{x+1} + \frac{4}{x-1} \geq \frac{16}{x^2-1}$

20. Να λυθούν οι ανισώσεις :

- i. $\sqrt{x+1} < 3$
- ii. $\sqrt{3x-5} \leq 0$
- iii. $\sqrt{x-2} \geq \sqrt{2x+1}$

21. Να λυθούν οι ανισώσεις :

- i. $\sqrt{x+3} < x-2$
- ii. $\sqrt{x^2-8x+15} > \sqrt{x^2+x-2}-4$

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ 4^Ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2 – 22649

α) Να βρείτε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3 - 6x^2 + 11x - 2) : (x - 3)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + \lambda$ να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η διαίρεση $P(x) : (x - 3)$ να έχει υπόλοιπο 0. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 – 22680

Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = -2x^3 + \lambda^2(x^2 - 1) + \lambda(x^3 - 1) + \lambda + 9$

και $Q(x) = (\lambda + 12)x^2 + (\lambda - 2)x^3 + (\lambda^2 - 9)x$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι και τα δύο πολυώνυμα είναι 3ου βαθμού. Συμφωνείτε με την άποψη αυτή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4 – 22762

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 8x^2 + \alpha x + \beta$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $(x + 1)$ αφήνει υπόλοιπο $16 + P(1)$ και διαιρούμενο με $(x - 1)$ αφήνει υπόλοιπο $16 - P(-1)$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $P(1) = 0$ και $P(-1) = 16$. (Μονάδες 8)

β) να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -3$. (Μονάδες 9)

γ) να αποδείξετε ότι: $P(4) \cdot P(5) \cdot P(6) \cdot P(7) \neq 0$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 – 22764

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο $x^2 + 2x$ και είναι τέτοιο, ώστε $P(1) = 0$ και $P(2) = 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(x) = x^3 + x^2 - 2x$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 8$. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 2$. (Μονάδες 9)

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2 – 22640

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 12$.

- α) Να δικαιολογήσετε γιατί το διώνυμο $x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$. (Μονάδες 13)
β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 – 22641

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 11x + 30$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το 5.

- α) Να υπολογίσετε την τιμή του α . (Μονάδες 12)
β) Για $\alpha = -4$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22642

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 11x + 30$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι η τιμή του για $x = 1$ είναι 16.

- α) Να υπολογίσετε την τιμή του α . (Μονάδες 12)
β) Αν $\alpha = -4$ και το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x) = 0$, να προσδιορίσετε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22643

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς 0, 1 και 3.

- α) Να δείξετε ότι $\beta = -4$, $\gamma = 3$ και $\delta = 0$. (Μονάδες 15)
β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2 – 22644

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2 x^3 - 4\lambda x + 3$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x - 1$. (Μονάδες 10)
β) Αν $\lambda = 3$ να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 – 22645

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^4 - x^3 + \alpha x^2 - 5x + 6$ διέρχεται από το σημείο $M(-2, 0)$,

- α) να αποδείξετε ότι $\alpha = -14$. (Μονάδες 12)
β) να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22646

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$.

- α) Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $3x^2 - 4x + 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης. (Μονάδες 15)
β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2 – 22647

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$.

- α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2 – 22648

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 5x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x - 2$ είναι ίσο με -4 , να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha = -2$ και $\beta = 6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 – 22681

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$ και $P(2) = 18$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$.
(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$.
(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \leq 0$.
(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2 – 22682

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (k - 6)x^2 - 7x + k$.

α) Να βρείτε για ποια τιμή του $k \in \mathbb{R}$, το 2 είναι ρίζα του $P(x)$.
(Μονάδες 12)

β) Αν $k = 6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22683

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$.

α) Αν γνωρίζετε ότι η τιμή του πολυωνύμου για $x = 1$ είναι ίση με 10 και $P(2) = 10$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(Μονάδες 12)

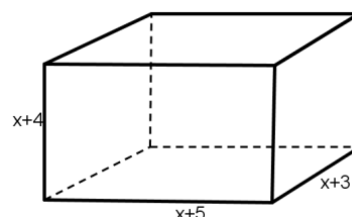
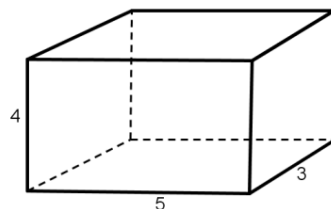
β) Αν $\alpha = -5$ και $\beta = 8$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 10$.
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22684

Μια εταιρεία κατασκευάζει κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3cm, 4cm και 5cm. Ένας νέος πελάτης ζήτησε από την εταιρεία να κατασκευάσει κουτιά με όγκο 120 cm^3 , δηλαδή διπλάσιο από εκείνον που κατασκευάζει.

Η εταιρεία αποφάσισε να κατασκευάσει τα κουτιά που ζήτησε ο πελάτης της, αυξάνοντας τις διαστάσεις του αρχικού κουτιού κατά σταθερό ακέραιο μήκος x .

α) Να αποδείξετε ότι το x θα είναι λύση της εξίσωσης $x^3 + 12x^2 + 47x - 60 = 0$.



(Ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ δίνεται από τον τύπο: $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$).

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο x λύνοντας την εξίσωση που δίνεται στο ερώτημα α).
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 – 22685

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha^3 + 2)x^3 + x^2 + 1$ και $Q(x) = 3\alpha x^3 + x^2 + 1$, όπου α θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το α ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.
(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha = 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 – 22686

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + \lambda$.

α) Αν $P(-1) = 6$, να δείξετε ότι $\lambda = 1$.

(Μονάδες 11)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 2 – 22687

Το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 1)x^4 - 2(\lambda - 1)x^3 + 2\lambda x^2 + \lambda + 1$ είναι 3ου βαθμού.

α) Να δείξετε ότι $\lambda = -1$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το $P(x)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις ρίζες του $P(x)$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 – 22688

Το πολυώνυμο $P(x)$ αν διαιρεθεί με το $(x - 2)$ δίνει πηλίκο και υπόλοιπο τον πραγματικό αριθμό u .

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

β) Αν $P(1) = 10$, να βρείτε το u .

(Μονάδες 9)

γ) Αν $u = 10$, να βρείτε το $P(x)$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4°

ΘΕΜΑ 4 – 22734

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 30 \text{ cm}^2$ του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 1 cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y ικανοποιούν τις σχέσεις: $y = \frac{60}{x}$ και $(x+1)^2 = x^2 + y^2$.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $2x^3 + x^2 - 3600 = 0$.

(Μονάδες 4)

γ) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 15, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

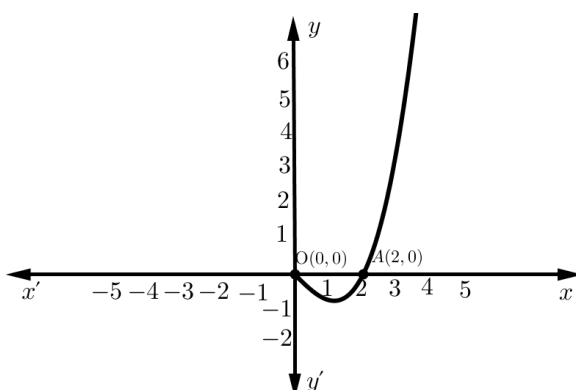
(Μονάδες 12)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο (με διαφορετικά μήκη πλευρών από αυτά που προσδιορίσατε στο ερώτημα γ)) το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 – 22759

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης



$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \gamma x + \delta, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } \gamma, \delta \text{ πραγματικές}$$

σταθερές.

α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να αποδείξετε ότι $\gamma = -1$ και $\delta = 0$.

(Μονάδες 5)

β) Θεωρώντας τώρα δεδομένο ότι

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x, \quad x \in \mathbb{R} :$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5)

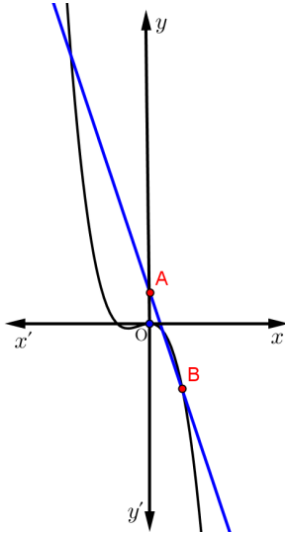
ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$. (Μονάδες 5)

iii. Να επαληθεύσετε ότι $f(1) = -\frac{3}{4}$ και, στη συνέχεια, να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = -\frac{3}{4}$

και $f(x) = \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 – 22777



Στο σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^3 - x^2$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$ και $B(1, -2)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

(Μονάδες 7)

β) Αν η ευθεία έχει εξίσωση $y = -3x + 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $-x^3 - x^2 < -3x + 1$.

(Μονάδες 9)

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4 – 22766

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa^2 - 1)x^4 + \frac{1}{2}(\kappa + 1)x^3 + (\kappa - 1)x^2 - 3\kappa x + \lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 3ου βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$ είναι ίσο με -4 .

(Μονάδες 7)

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 1$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 4 = x^2 - 1$.

(Μονάδες 7)

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{(x-1)^2 \cdot (x+2)} \geq 1$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 – 22769

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x + 1$ είναι ίσο με -6 , να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Αν $\alpha = -5$ και $\beta = 1$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^3\omega + 5\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 3 = 0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 – 22772

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 + \kappa x^2 + x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, όταν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το $x + 2$. (Μονάδες 7)

β) Για $\kappa = -7$ και $\lambda = 6$ να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 9)

γ) Για $\kappa = -7$ και $\lambda = 6$ να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x-5} \geq 0$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 – 22773

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 7x + \alpha + 5$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 και ότι έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β . (Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$, να λύσετε:

i. την ανίσωση $P(x) \geq 0$. (Μονάδες 8)

ii. την εξίσωση $\sqrt{P(x)} = x - 1$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 – 22774

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha^3 x^2 - \alpha^2 x - \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x - \alpha)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 7)

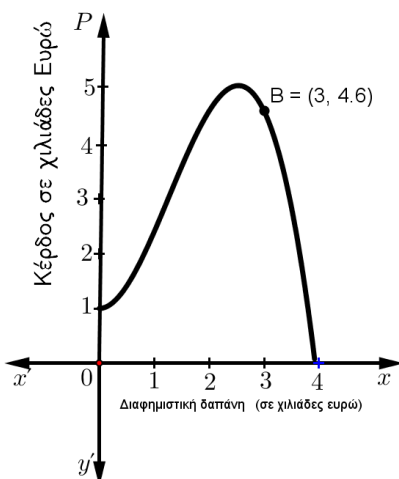
β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το $(x - \alpha)$ διαιρεί το $P(x)$. (Μονάδες 6)

γ) Αν $\alpha = -1$, τότε:

i. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$. (Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $(x+1) \cdot P(x) \leq 0$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 – 22775



Μια εταιρεία εκτίμησε ότι το κέρδος της P (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός συγκεκριμένου προϊόντος ήταν:

$P(x) = -0.5x^3 + 1.9x^2 + 1$, $0 \leq x \leq 4$ όπου x είναι η διαφημιστική δαπάνη (σε χιλιάδες ευρώ). Για αυτό το προϊόν, ξόδεψε για διαφήμιση 3 χιλιάδες ευρώ και το κέρδος της ήταν 4,6 χιλιάδες ευρώ.

α) i. Να χρησιμοποιήσετε την παραπάνω γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ για να εκτιμήσετε ένα άλλο ποσό x που θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση η εταιρεία ώστε να έχει το ίδιο κέρδος. (Μονάδες 5)

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του ερωτήματος i. (Μονάδες 10)

β) Πόσα χρήματα πρέπει να δαπανήσει η εταιρεία για διαφήμιση, ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ; (Μονάδες 10)