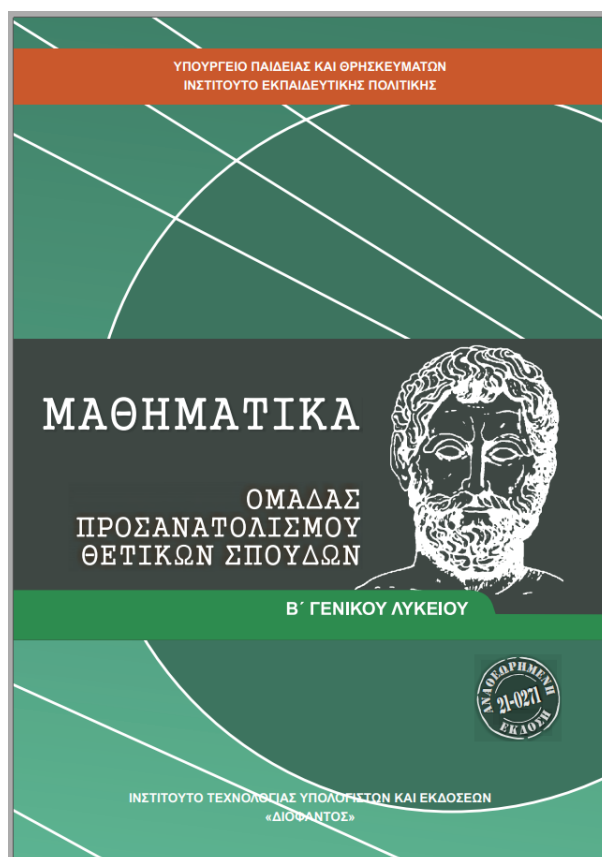


Εξεταστέα ύλη στα μαθηματικά για τις τάξεις Α', Β' και Γ'
τάξεων Γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2024-2025

Επιμέλεια: Μάκης Χατζόπουλος

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών Β' ΤΑΞΗ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



Από το σχολικό βιβλίο «Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών Β' Τάξης Γενικού Λυκείου» των Αδαμόπουλου Α., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α.

Κεφάλαιο 1ο: Διανύσματα

1.1. Η Έννοια του Διανύσματος

1.2. Πρόσθεση και Αφαίρεση Διανυσμάτων

1.3. Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα (χωρίς τις Εφαρμογές 1 και 2 όπως φαίνεται παρακάτω)

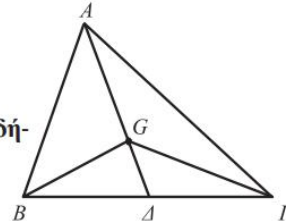
1* Να αποδειχτεί ότι:

(i) Ένα σημείο G είναι το βαρύκεντρο ενός τριγώνου

$AB\Gamma$, αν και μόνο αν ισχύει $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$ και

(ii) Αν G είναι το βαρύκεντρο του $AB\Gamma$, τότε για οποιοδήποτε

σημείο O ισχύει $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma})$.



2. Να αποδειχτεί ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν τα μέσα των απέναντι πλευρών ενός τετραπλεύρου και τα μέσα των διαγωνίων του διέρχονται από το ίδιο σημείο και διχοτομούνται από το σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1.4. Συντεταγμένες στο Επίπεδο (χωρίς την Εφαρμογή 2 που ακολουθεί την παράγραφο «Μέτρο Διανύσματος» όπως φαίνεται παρακάτω)

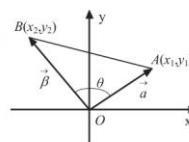
2.* Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους G του τριγώνου $AB\Gamma$, αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των κορυφών του.

ΛΥΣΗ

1.5. Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων (χωρίς την απόδειξη του τύπου της αναλυτικής έκφρασης Εσωτερικού Γινομένου και χωρίς την προβολή διανύσματος σε διάνυσμα όπως φαίνεται παρακάτω)

Αναλυτική Έκφραση Εσωτερικού Γινομένου

Θα δούμε τώρα πώς μπορούμε να εκφράσουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους. Με αρχή το O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$. Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OAB έχουμε την ισότητα



$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB)\cos\angle AOB,$$

η οποία ισχύει και στην περίπτωση που τα σημεία O, A, B είναι συνευθειακά. Όμως είναι

$$(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \quad (OA)^2 = x_1^2 + y_1^2 \quad \text{και} \quad (OB)^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Επομένως, έχουμε διαδοχικά:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(OA)(OB) \cos\angle AOB$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(OA)(OB)\cos\angle AOB$$

και επειδή $(OA)(OB)\cos\angle AOB = \vec{a} \cdot \vec{\beta}$, έχουμε τελικά:

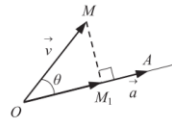
$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$$

Προβολή Διανύσματος σε Διάνυσμα

Έστω $\vec{a}, \vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{a} \neq \vec{0}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{a}$ και $\vec{OM} = \vec{v}$. Από το M φέρνουμε κάθετο στη διεύθυνση του $\vec{OA}$ και έστω M_1 το ίχνος της καθέτου.

Το διάνυσμα $\vec{OM}_1$ λέγεται **προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{a}$** και συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{a}}\vec{v}$. Δηλαδή,

$$\vec{OM}_1 = \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{v}.$$



Αποδεικνύεται ότι η προβολή του $\vec{v}$ πάνω στο $\vec{a}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου O .

Για το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{a}$ και $\vec{v}$ έχουμε:

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot (\vec{OM}_1 + \vec{M}_1\vec{M}) = \vec{a} \cdot \vec{OM}_1 + \vec{a} \cdot \vec{M}_1\vec{M} = \vec{a} \cdot \vec{OM}_1 = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{v}$$

Επομένως:

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{v}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- 1.** Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\vec{v}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{a}$, αν

$$|\vec{a}| = \frac{1}{2}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{3} \text{ και η γωνία των διανυσμάτων } \vec{a} \text{ και } \vec{v} \text{ είναι ίση με } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

ΛΥΣΗ

- 2.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3,1)$ και $\vec{v} = (1,2)$. Να αναλυθεί το $\vec{v}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{a}$.

ΛΥΣΗ

Σημείωση: Αν και οι εφαρμογές 1 και 2 λύνονται στο σχολικό βιβλίο με τη χρήση της προβολής διανυσμάτων που είναι εκτός ύλης, ο μαθητής μπορεί να τις λύσει και με διαφορετικό τρόπο χρησιμοποιώντας γνώσεις που είναι εντός ύλης.

Κεφάλαιο 2ο: Η Ευθεία στο Επίπεδο

2.1. Εξίσωση Ευθείας

2.2. Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας (χωρίς την Εφαρμογή 2)

- 2.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(2,3)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(5\lambda-1,\lambda)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 1$. Να αποδείξετε ότι το κέντρο βάρους του τριγώνου κινείται σε μια ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

2.3. Εμβαδόν Τριγώνου (χωρίς τις αποδείξεις των τύπων της απόστασης σημείου από ευθεία και του εμβαδού τριγώνου και χωρίς την Εφαρμογή 1 όπως φαίνεται παρακάτω)

$$d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

και

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})|$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- 1.** Να αποδειχτεί ότι η απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1 : y = \lambda x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = \lambda x + \beta_2$ δίνεται από τον τύπο

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ**Κεφάλαιο 3ο: Κωνικές Τομές**

- 3.1. Ο Κύκλος (χωρίς τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου)
- 3.2. Η Παραβολή (χωρίς τις αποδείξεις του τύπου της εφαπτομένης και της ανακλαστικής ιδιότητας και χωρίς την Εφαρμογή 1 όπως φαίνεται παρακάτω)

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής M_1 διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία M_1E και η ημιευθεία M_1t , που είναι ομόρροπη της OE , όπου E είναι η εστία της παραβολής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

▼ ▲

- *1.** Έστω η παραβολή $C : y^2 = 2px$ και $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι εφαπτόμενες της παραβολής από ένα σημείο $M_0(x_0, y_0)$ με $x_0 \neq 0$. Αν M_1, M_2 είναι τα σημεία επαφής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με την παραβολή C , να αποδειχτεί ότι
- (i) Η ευθεία M_1M_2 έχει εξίσωση $yy_0 = p(x + x_0)$
 - (ii) Η ευθεία M_1M_2 διέρχεται από την εστία, αν και μόνο αν το M_0 ανήκει στη διευθετούσα της παραβολής.

- 3.3. Η Έλλειψη (χωρίς τις παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης και τις Εφαρμογές όπως φαίνεται παρακάτω)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω ο κύκλος $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$ και ένα σημείο του M_1 , του οποίου η ορθή προβολή στον άξονα $x'x$ είναι το σημείο M_2 . Πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα M_1M_2 ορίζουμε ένα σημείο M , τέτοιο, ώστε να ισχύει $\frac{(M_2M)}{(M_2M_1)} = \frac{\beta}{\alpha}$, $0 < \beta < \alpha$.

Να αποδειχτεί ότι αν το M_1 κινείται στον κύκλο, το M κινείται στην έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνονται η έλλειψη $C_1 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ο κύκλος $C_2 : x^2 + y^2 = \alpha^2$. Αν

$M_1(x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο της C_1 και $M_2(x_2, y_2)$ το σημείο του C_2 με $x_2 = x_1 \neq 0$, να αποδειχτεί ότι η εφαπτομένη ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο M_1 και η εφαπτομένη ε_2 του κύκλου C_2 στο σημείο M_2 τέμνονται πάνω στον άξονα $x'x$.

2. Έστω C η έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ και μεγάλο άξονα $2a$. Να αποδειχτεί ότι ο λόγος των αποστάσεων οποιουδήποτε σημείου $M(x, y)$ της έλλειψης από την εστία $E(\gamma, 0)$ και την ευθεία $\delta : x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$ είναι σταθερός και ίσος με την εκκεντρότητα της έλλειψης. Ομοίως, για την εστία $E'(-\gamma, 0)$ και την ευθεία $\delta' : x = -\frac{\alpha^2}{\gamma}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- 3.4. Η Υπερβολή (χωρίς την απόδειξη του τύπου των ασύμπτωτων)
 3.5. Η Εξίσωση $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$ (χωρίς τη μεταφορά αξόνων)