

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

1. Δίνεται η γραμμή: $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + \lambda(x - y) + 2\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- α. Να δείξετε ότι παριστάνει δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.
- β. Να βρείτε το λ ώστε οι ευθείες να έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία $y = x + 3$
- γ. Αν $\lambda = 4$ και $A(-1, 1)$ είναι σημείο της μιας από τις δύο παράλληλες ευθείες, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τις τετμημένες δύο σημείων Β και Γ πάνω στην άλλη παράλληλη ώστε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται να είναι ίσο με $\sqrt{2}$ τ.μ.α. .

2. Δίνονται τα πλοία με συντεταγμένες $\Pi_1(t + 2, t + 1)$ και $\Pi_2(14 - 2t, 3t - 7)$, $t \geq 0$ καθώς και το λιμάνι $\Lambda(5, 4)$.

- α. Να βρείτε τις ευθείες πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία, καθώς και το σημείο στο οποίο τέμνονται οι τροχιές τους.
- β. Να ελέγξετε αν τα δύο πλοία θα συγκρουστούν.
- γ. Να βρείτε πόσο θα απέχουν τα δύο πλοία όταν το ένα από αυτά «πιάσει» λιμάνι.
- δ. Να βρείτε πόσο κοντά στο λιμάνι Λ θα βρεθεί το πλοίο που δεν περνά από το Λ .

3. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις:
$$\begin{cases} \lambda x + (\lambda - 1)y = \lambda + 1 \\ (\lambda - 1)x + (\lambda - 2)y = \lambda + 2 \end{cases}$$

- α. Να δείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται για οποιαδήποτε τιμή του λ .
- β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου τομής των ευθειών.
- γ. Να δείξετε ότι η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το σημείο τομής των ευθειών σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες.

4. Έστω η οικογένεια γραμμών με εξίσωση: $(2a^2 + a + 1)x - (a^2 + 3)y - a + 5 = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

- α. Να δείξετε ότι παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του πραγματικού a .
- β. Να βρείτε ποια από τις ευθείες της οικογένειας περνά από το $(0, 0)$.
- γ. Να βρείτε το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες της οικογένειας.
- δ. Η ευθεία $y = 3x - 1$, ανήκει σε αυτές;
- ε. Να βρείτε αν υπάρχει ευθεία της οικογένειας παράλληλη στην $y = 2x$.
- στ. Να βρείτε αν υπάρχει ευθεία της οικογένειας που να σχηματίζει γωνία 45° με τον xx' .

5. Να βρείτε το συμμετρικό A' του σημείου $A(-3, 2)$ ως προς την ευθεία $y = -x + 4$. Στη συνέχεια να βρείτε σημείο Κ της ευθείας που να απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $B(1, -2)$. Ποιο είναι το εμβαδόν του $AA'BK$;

6. Έστω τα λιμάνια $\Lambda(0, 0)$, $M(9, 13)$ και το πλοίο «Θ.Ε.Π.Π» του οποίου οι συντεταγμένες είναι $(t + 6, 3t + 4)$, t ο χρόνος σε ώρες, $t \in [0, 4]$.

- α. Να βρείτε τη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι Λ στην αρχή της παρατήρησης καθώς και την εξίσωση κίνησής του.
- β. Να βρείτε αν το πλοίο πλησιάζει ή απομακρύνεται από το λιμάνι Λ .
- γ. Να βρείτε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι M .
- δ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του πλοίου, θεωρώντας ότι εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

ε. Να πείτε σε ποια ευθεία πορεία πρέπει να κινηθεί το πλοίο μετά την πάροδο των τεσσάρων ωρών για να κινηθεί προς το λιμάνι Λ.

στ. Αν η κίνησή του αυτή γίνει με την ίδια ταχύτητα, να βρείτε πόσες ώρες μετά θα «δέσει» στο λιμάνι Λ.

7. Έστω ορθογώνιο παρ/μο $OAB\Gamma$ με $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(\kappa, \lambda)$, $\Gamma(\mu, \nu)$, $O\Gamma=2OA$ και $\mu>0$.

α. Να δείξετε ότι $\mu=-2\nu$.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

γ. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι διαγώνιες.

δ. Ένα κινητό Μ έχει συντεταγμένες $(4-\frac{1}{2}t, \frac{2t}{3}-2)$, t σε ώρες, $t \geq 0$.

Να βρείτε από ποια κορυφή ξεκίνησε, σε ποια κατευθύνεται και πόσο χρόνο θα διαρκέσει η μετατόπισή του.

8. Τα πλοία «S1» και «S2» έχουν συντεταγμένες που δίνονται από τις σχέσεις: $S1(2t+3, 3t-5)$ και $S2(15-t, 15-2t)$, t σε ώρες, $t \in [0, 5]$.

α. Να βρείτε τις εξισώσεις κίνησης κάθε πλοίου.

β. Να βρείτε που και πότε θα συναντηθούν.

γ. Αν θεωρήσουμε ότι η κίνηση και των δύο είναι ευθύγραμμη ομαλή, να βρείτε ποιο από τα δύο κινήθηκε με τη μεγαλύτερη ταχύτητα.

Αν ένας φάρος βρίσκεται στο σημείο $\Phi(8,3)$, να δείξετε ότι σε κάποια χρονική στιγμή τα δύο πλοία βρέθηκαν σε ίση απόσταση από αυτόν και να βρείτε την απόσταση αυτή.

9. Ένας ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ έχει τις κορυφές του Α και Γ πάνω στην ευθεία $y=x$ και τις άλλες δύο πάνω στην ευθεία $y=-x$. Αν οι διαγώνιές του έχουν μήκη $AG=8\sqrt{2}$ και $B\Delta=6\sqrt{2}$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του, καθώς και τις εξισώσεις των πλευρών του.

10. Ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφή $A(1,1)$ και διαγώνιες που δίνονται από τις εξισώσεις $x+4y-12=0$ και $3x-2y-1=0$. Αν γνωρίζετε ότι η κορυφή Δ βρίσκεται στον άξονα yy' , να βρείτε:

α. Τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών του.

β. Τις εξισώσεις των πλευρών του.

γ. Την απόσταση της κορυφής Α από την πλευρά ΓΔ.

δ. Το εμβαδόν του.

11. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις:

$$(\lambda+1)x + 2\lambda y - 2 = 0 \quad \text{και} \quad (\lambda+2)x + (\lambda-5)y + 8 = 0, \text{ αντίστοιχα.}$$

α. Να βρείτε το λ ώστε οι δύο ευθείες να είναι κάθετες μεταξύ τους.

β. Για την πιο μεγάλη από τις τιμές του λ που βρήκατε, να γράψετε τις εξισώσεις των δύο ευθειών και να βρείτε το σημείο τομής τους.

γ. Η ευθεία $\psi=2$, τέμνει τις ευθείες του παραπάνω ερωτήματος και σχηματίζει τρίγωνο μαζί τους. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν.

12. Ένας Φάρος εκπέμπει φωτεινές ακτίνες που δίνονται από την οικογένεια ευθειών με εξίσωση:

$$(\lambda-1)x + (\lambda-2)y - \lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Δίνονται ακόμα οι θέσεις τριών πλοίων } A(2,2), B(3,-1) \text{ και } \Gamma(-2,3).$$

α. Να βρείτε τη θέση του φάρου Φ.

β. Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων που περνούν από τα τρία πλοία.

Βασίλης Μπακούρος

www.bakouros.gr

γ. Να βρείτε ποιο από τα πλοία Α και Β βρίσκεται πλησιέστερα στην ακτίνα που ενώνει το φάρο με το πλοίο Γ.

δ. Να βρείτε το εμβαδόν του τετράπλευρου που ορίζεται από τα τρία πλοία και το φάρο Φ.

13. Τριγώνου ΑΒΓ δίνεται η κορυφή $A(2,-1)$, η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται η πλευρά ΒΓ είναι η $x + y - 3 = 0$ και η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται η διάμεσος ΒΜ είναι η $2x + y = 0$. Να βρείτε:

α. Την κορυφή Β και την εξίσωση της πλευράς ΑΒ.

β. Την κορυφή Γ και το σημείο Μ.

γ. Την εξίσωση της πλευράς ΑΓ και το εμβαδόν του τριγώνου ΒΜΓ.

14. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 + 2xy - k(x + y + 2k) = 0, k \in \mathbb{R}^*$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων και να βρείτε τις εξισώσεις.

β. Να προσδιορίσετε την τιμή του k για τις οποίες οι ευθείες απέχουν $d = 3\sqrt{2}$.

γ. Για $k=2$, να βρείτε τη μεσοπαράλληλο των δύο παραπάνω ευθειών.

δ. Να βρείτε ποιο σημείο και ποιας από τις τρεις ευθείες είναι το πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

15. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, γνωρίζουμε ότι την κορυφή $A(1,2)$, τη διχοτόμο ΑΔ με εξίσωση $y=x+1$, την κορυφή $B(0,-1)$ και την εξίσωση της πλευράς ΒΓ που είναι η $y=2x-1$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ και το σημείο Γ.

β. Να βρείτε σημείο Ζ ώστε το ΑΒΓΖ να είναι παραλληλόγραμμο, καθώς και το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.