

5. Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

Ορισμός Εσωτερικού Γινομένου

■ Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό :

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \text{συν}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$$

■ Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε ορίζουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

– Άμεσες συνέπειες του ορισμού :

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$

β) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

γ) $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

δ) $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

ε) $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$ αφού $\vec{\alpha}^2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\alpha}| \cdot \text{συν}(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) = |\vec{\alpha}|^2 \cdot 1 = |\vec{\alpha}|^2$

Αναλυτική Έκφραση Εσωτερικού Γινομένου

■ Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε :

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Ιδιότητες Εσωτερικού Γινομένου

$$\alpha) (\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$$

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε :

$$(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = (\lambda x_1, \lambda y_1) \cdot (x_2, y_2) = (\lambda x_1)x_2 + (\lambda y_1)y_2 = \lambda(x_1x_2 + y_1y_2) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$$

$$\vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = (x_1, y_1) \cdot (\lambda x_2, \lambda y_2) = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) = \lambda(x_1x_2 + y_1y_2) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$$

$$\text{Άρα } (\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$$

$$\beta) \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$$

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$, τότε :

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = (x_1, y_1) \cdot (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = x_1 \cdot (x_2 + x_3) + y_1 \cdot (y_2 + y_3) =$$

$$(x_1x_2 + x_1x_3) + (y_1y_2 + y_1y_3) = (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1x_3 + y_1y_3) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$$

$$\gamma) \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$$

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε :

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 \cdot y_2 = -x_1 \cdot x_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1.$$

Ασκήσεις

Εύρεση Εσωτερικού Γινομένου

5.1 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$, τότε να υπολογίσετε :

- α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ β) $\vec{\beta}^2$ γ) $3\vec{\alpha} \cdot (-4\vec{\beta})$
 δ) $2\vec{\alpha}(3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$ ε) $(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})(3\vec{\alpha} + 5\vec{\beta})$

5.2 Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$, τότε να υπολογίσετε :

- α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ β) $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ γ) $(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2$

5.3 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$, τότε να υπολογίσετε :

- α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ β) $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$ γ) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$ δ) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$

5.4 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\beta}| = \sqrt{12}, \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -12$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 150^\circ$, τότε να υπολογίσετε :

- α) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$
 β) το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

5.5 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 4, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = 28$, τότε να υπολογίσετε :

- α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
 β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$
 γ) το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(2\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

5.6 Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

- α) Αν τα διανύσματα είναι ομόρροπα και $|\vec{\alpha}| = 5, |\vec{\beta}| = 6$
 β) Αν τα διανύσματα είναι αντίρροπα και $|\vec{\alpha}| = 8, |\vec{\beta}| = 3$

5.7 Αν ισχύουν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 2\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, |\vec{\gamma}| = 3$, τότε να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$

5.8 Αν ισχύουν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, |\vec{\gamma}| = 3$, τότε να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$

5.9 Αν ισχύουν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - 3\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 4|\vec{\gamma}| = 4$, τότε να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$

5.10 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά ίση με 2. Αν AD το ύψος του, να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DB}$

5.11 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$ τότε :

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$

γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta})(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$ (2^ο Τράπεζα Θεμάτων)

5.12 Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O , πλευρά 4 και $\hat{A} = 60^\circ$.

Να υπολογίσετε τα γινόμενα :

α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ β) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG}$ γ) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AO}$ δ) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB}$ ε) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (2^ο Τράπεζα Θεμάτων)

Κάθετα Διανύσματα – Εύρεση Μέτρου Διανύσματος

5.13 Αν $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 6$, να βρείτε το λ ώστε τα διανύσματα

$\vec{v} = 3\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ και $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

5.14 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$.

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ ώστε να ισχύει $(\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$

5.15 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$

τότε να βρεθούν τα μέτρα $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$, $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$ και $|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|$

5.16 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ τότε :

α) Αν τα διανύσματα $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα, να βρείτε την τιμή του k

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

5.17 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ τότε :

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$

β) Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

5.18 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και

$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ τότε :

α) Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{u}$

β) Να βρείτε το μέτρο του $\vec{u}$

5.19 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $3|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 9$ και $2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 1$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$

α) Να βρείτε τα μέτρα των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

5.20 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) τον πραγματικό αριθμό λ έτσι, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $5\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους

γ) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$

5.21 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε :

α) το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β) τον πραγματικό αριθμό x ώστε να ισχύει $(\vec{\alpha} + x\vec{\beta})(\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = 12$

γ) το μέτρο $|\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}|$

5.22 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) Αν για το διάνυσμα $\vec{\gamma} = k\vec{\alpha} + 6\vec{\beta}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = k$, να βρείτε :

β1) τον αριθμό k

β2) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

5.23 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 1, |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 3$

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

γ) Να βρείτε το μέτρο του $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$

5.24 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$

και $\vec{\gamma} = \frac{k}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = k$

α) Να δείξετε ότι $k = -2$

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

γ) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα

5.25 Δίνεται το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν :
 $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 5$ και $\vec{\beta} \cdot (3\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 10$. Να βρείτε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ καθώς και το μέτρο του $\vec{\beta}$

β) τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

γ) το εσωτερικό γινόμενο $(5\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})$

δ) τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|\vec{x}\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 7$

5.26 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 6, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Να βρείτε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) τον πραγματικό αριθμό k έτσι, ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{v} = k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους

γ) για $k = -12$, το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$

5.27 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = \sqrt{13}$, τότε να βρείτε το $|\vec{\beta}|$

5.28 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{8}, |\vec{\beta}| = 3$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 45^\circ$, τότε να βρείτε το $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$

5.29 Αν ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 1$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$ τότε να βρείτε το μέτρο $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

5.30 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 3, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 7$

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| = 4$

β) Να βρείτε το μέτρο $|4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}|$

5.31 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 4$ και $|4\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3$

β) Να βρείτε το μέτρο $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$

5.32 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}, (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$ τότε να βρείτε τα μέτρα $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|$

5.33 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}, (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 7$, τότε να βρείτε τα μέτρα $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|$

5.34 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}, (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$ και $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}| = 5$

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1$

β) Να βρείτε το μέτρο $|3\vec{\alpha} + 8\vec{\beta}|$

5.35 Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}, (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{6}$. Να δείξετε ότι $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 5$

5.36 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$.

Θεωρούμε και τρίγωνο ABΓ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{BG} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου ABΓ.

5.37 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 3$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$. Θεωρούμε και τρίγωνο ABΓ με $\overrightarrow{GA} = \vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{GB} = 4\vec{\alpha} - 6\vec{\beta}$, για το οποίο ισχύει $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{91}$

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| = 5$

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM

5.38 Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ABΓΔ που κατασκευάζεται με τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

αν $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 135^\circ$.

5.39 Να αποδείξετε ότι $|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{a} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2$

5.40 Αν ισχύει $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{a} + \vec{\beta}|$ τότε να αποδείξετε ότι $|\vec{a} - \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot \sqrt{3}$

5.41 Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$

Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$ ώστε να ισχύουν $\vec{x} \parallel (\vec{a} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{a} + \vec{x})$

5.42 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = 3$ $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$

Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$ ώστε να ισχύουν $\vec{x} \parallel (\vec{a} - \vec{\beta})$ και $\vec{a} \perp (\vec{\beta} + \vec{x})$

5.43 Αν για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν $|\vec{a}| = 4, |\vec{\beta}| = 5$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$

και $\vec{\gamma} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}$, τότε να υπολογίσετε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ (2^ο Τράπεζα Θεμάτων)

Γωνία Δύο Διανυσμάτων

5.44 Αν ισχύουν $|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, \vec{a} \perp \vec{\beta}$ και $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{\beta}$, να βρείτε την γωνία $(\vec{a}, \vec{u})$

5.45 Αν ισχύουν $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = 1$ και $(2\vec{a} + \vec{\beta}) \perp (3\vec{a} - 5\vec{\beta})$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{a}, \vec{\beta})$

5.46 Αν ισχύουν $|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 45^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{\beta} - \vec{a}, \vec{a})$

5.47 Αν ισχύουν $|\vec{a}| = 5, |\vec{\beta}| = 3, (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$, να βρείτε τη γωνία $(\vec{a} + \vec{\beta}, \vec{a} - \vec{\beta})$

5.48 Αν $|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\delta} = 3\vec{a} + 2\vec{\beta}$, να βρείτε την γωνία $(\vec{\beta}, \vec{\delta})$

5.49 Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{a}|$.

Αν $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{\beta})$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{a}, \vec{\beta})$

5.50 Αν ισχύουν $|\vec{a}| = 1, (\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ και $(\vec{a} + \vec{\beta}) \perp (5\vec{a} - 2\vec{\beta})$

α) Να βρείτε το μέτρο του $\vec{\beta}$

β) Αν $\vec{\gamma} = -2\vec{a} + \vec{\beta}$ να βρείτε τη γωνία $\hat{\varphi} = (\vec{a}, \vec{\gamma})$

5.51 Αν ισχύουν $|\vec{a}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$, να βρείτε το $\sin(\vec{u}, \vec{v})$

5.52 Αν ισχύουν $|\vec{a}| = 1, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$, να βρείτε το $\sin(\vec{u}, \vec{v})$

5.53 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

Θεωρούμε και τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{v} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Να βρείτε :

α1) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

α2) τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε τα διανύσματα $\lambda\vec{\alpha}$ και $\lambda \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ να είναι κάθετα

α3) το γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$

α4) τα μέτρα των $\vec{u}$ και $\vec{v}$

β) Να δείξετε ότι η γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι οξεία.

5.54 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$.

Θεωρούμε και τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Να βρείτε :

α) το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β) τα μέτρα των $\vec{u}$ και $\vec{v}$

γ) το γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$

δ) το συνημίτονο της γωνίας των $\vec{u}$ και $\vec{v}$

ε) να βρεθεί το x ώστε $\vec{v} \perp \vec{w} = x\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

5.55 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 5\sqrt{3}, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$. Να βρείτε :

α) το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β) το μέτρο $|5\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\beta} - 5\vec{\alpha})$

δ) τη γωνία $(\vec{\alpha}, 2\vec{\beta} - 5\vec{\alpha})$

5.56 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε :

α) το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β) τον πραγματικό αριθμό λ ώστε τα διανύσματα $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{u} = \vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

γ) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

δ) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\gamma}, \vec{\alpha}$

5.57 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3$

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 6$

γ) Να βρείτε τις γωνίες $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$ και $(\vec{\gamma}, \vec{\beta})$. Τι παρατηρείτε για τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$;

5.58 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 5$ και $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = -46$

α) Να βρείτε το $\sin(\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})})$

β) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$

5.59 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3$ και $(3\vec{\alpha} + 7\vec{\beta}) \perp (6\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

α) Να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

β) Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ το οποίο είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$. Να βρείτε :

β₁) την τιμή του λ

β₂) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

β₃) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$

5.60 Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$.

Θεωρούμε επίσης το παραλληλόγραμμο ABΓΔ με

$\overrightarrow{AB} = 4\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AD} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ με $(A\Gamma) = 6$ και ισχύει $\overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{AB} = 36$.

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 1$ και $|\vec{\beta}| = 4$.

β) Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΔΒ.

γ) Να βρείτε την περίμετρο του ABΓΔ

δ) Να βρείτε τη γωνία $\hat{A}$ του ABΓΔ.

5.61 Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. Δίνεται επίσης το τρίγωνο ABΓ για το οποίο ισχύουν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = 4\vec{\beta}$

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM

γ) Να βρείτε την γωνία B του τριγώνου ABΓ

5.62 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$.

Έστω το τρίγωνο ABΓ για το οποίο ισχύουν $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = -3\vec{\beta}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β) Αν M μέσο της BΓ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

γ) Να βρείτε τη γωνία $(\overrightarrow{AM}, \vec{\alpha})$

5.63 Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι μοναδιαία και ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2$ να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$

5.64 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 4$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -8$.

α) Να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

β) Να δείξετε ότι $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} = \vec{0}$

5.65 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}, \vec{v} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ με $\vec{u} \perp \vec{v}, |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$
Να δείξετε ότι :

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}$

β) τα διανύσματα $\vec{u} - 3\vec{v}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και $|\vec{u} - 3\vec{v}| = 14$

5.66 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$

και $\vec{u} \parallel (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{u})$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) Να δείξετε ότι $\vec{u} = -\frac{1}{6}\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}$

γ) Να βρείτε την γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{u}$

5.67 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}, |\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$

και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ (2° Τράπεζα Θεμάτων)

Αναλυτική Έκφραση Εσωτερικού Γινομένου

5.68 Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο στις παρακάτω περιπτώσεις :

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ αν $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = (4, 5)$

β) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ αν $A(3, 1), B(2, -5), \Gamma(-4, 3), \Delta(-1, -2)$

5.69 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, \lambda)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 8, 1)$ για τα οποία

ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$. Να βρείτε :

α) τον πραγματικό αριθμό λ

β) το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

5.70 Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda - 3, 4\lambda - 1)$

και $\vec{\beta} = (-3\lambda + 9, \lambda - 3)$ να είναι κάθετα .

5.71 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2x - 1, x + 1)$ και $\vec{\beta} = (x + 1, 2x + 3)$. Να βρεθεί το $x \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα να είναι κάθετα .

5.72 Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (1, 6)$

α) Να βρείτε τις τιμές του κ ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ να είναι κάθετα .

β) Για $\kappa = 1$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{B\Gamma}$

5.73 Δίνονται τα σημεία $A(3, 2), B(7, -4)$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε να είναι $\widehat{AMB} = 90^\circ$

5.74 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, \lambda)$ και $\vec{\beta} = (-3, 4 - \lambda)$ για τα οποία

ισχύουν $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (13\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})$

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ

β) Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού μ , το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (\mu, \mu - 8)$

5.75 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 4), B(-2, -1)$ και $\Gamma(5, 7)$ και σημείο M

ώστε να ισχύει $\overrightarrow{M\Gamma} = 2\overrightarrow{BM}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$

γ) Να βρείτε σημείο K του άξονα $x'x$ ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AK} \perp \overrightarrow{AB}$

5.76 Αν $\vec{\alpha} = (3, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, -1)$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

5.77 Αν $\vec{\alpha} = (4, 3)$ και $\vec{\beta} = (7, -1)$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

5.78 Αν $\vec{\alpha} = (0, 2)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

5.79 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -7)$ και $\vec{\beta} = (-3, \lambda)$.

Αν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 135^\circ$, να βρείτε το λ .

5.80 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -\sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (2, 2\sqrt{3})$

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

γ) Αν $\vec{x} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{y} = -4\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ να βρείτε τα μέτρα τους και να δείξετε ότι είναι κάθετα μεταξύ τους.

5.81 Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(1, 2)$, $B(-2, 1)$ και $\Gamma(3, 6)$. Να βρείτε τη γωνία A.

5.82 Αν $A(4, 1)$, $B(8, 2)$ και $\Gamma(1, 3)$, να δείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}$ είναι αμβλεία.

5.83 Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\overrightarrow{AB} = (-4, -6)$ και $\overrightarrow{AG} = (2, -8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της διαμέσου $\overrightarrow{AM}$

β) Να δείξετε ότι η γωνία A είναι οξεία

γ) Αν $A(3, 1)$ να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B και Γ

5.84 Θεωρούμε τα σημεία A, B, Γ για τα οποία ισχύουν

$\overrightarrow{AB} = (-1, 4)$ και $\overrightarrow{AG} = (3, 6)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο και να βρείτε αν η γωνία A του τριγώνου είναι οξεία ή αμβλεία.

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM

5.85 Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(\lambda - 1, -1)$, $B(\lambda, 2)$ και $\Gamma(7, -\lambda)$.

Αν ισχύει $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BG} = -15$, να βρείτε :

α) τον πραγματικό αριθμό λ

β) τη γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου ABΓ

5.86 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

με $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (7, -1)$ και $3\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (8, -19)$. Να βρείτε :

α) τις συντεταγμένες των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

β) τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

5.87 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, -4)$, $\vec{\beta} = (4, x)$

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε τα διανύσματα να είναι κάθετα

β) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

γ) Να βρεθεί το διάνυσμα που είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$ και έχει διπλάσιο μέτρο από το $\vec{\alpha}$

5.88 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{\beta} = (2\sqrt{3}, -2)$. Να υπολογίσετε :

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

γ) τον πραγματικό αριθμό κ έτσι, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\kappa \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους

δ) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

5.89 Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 2, |\vec{\alpha}| - 1)$ το οποίο δεν είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$, καθώς και τα διανύσματα $\vec{\beta} = (2, 6)$ και $\vec{\gamma} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 5$

β) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$

γ) Θεωρούμε διάνυσμα $\vec{v}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις $(\vec{v} + \vec{\beta}) \parallel \vec{\gamma}$ και $(\vec{v} + \vec{\gamma}) \perp \vec{\beta}$. Να βρείτε:

γ1) Τις συντεταγμένες του $\vec{v}$

γ2) Την προβολή του $\vec{v}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$

5.90 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-3, 4)$, $\vec{\beta} = (8, 6)$

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

β) Να βρείτε τα μέτρα των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

δ) Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το $\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{j}$ να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$

5.91 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ και $\vec{\epsilon}$ ώστε

$|\vec{\alpha}| = 4, |\vec{\beta}| = 5, \vec{\gamma} = (1, -2), \vec{\delta} = (1, 3), \vec{\epsilon} = (4, -3)$ και επιπλέον

ισχύει $(3\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 3$.

α) Να βρείτε τα μέτρα των $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζουν

β) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 10$

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

δ) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\epsilon}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$

5.92 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ (2^ο Τράπεζα Θεμάτων)

5.93 Δίνονται τα σημεία $A(1, 2), B(3, 4)$ και $\Gamma(5, -2)$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ και να δείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή

β) Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{BG}$

γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{BG}$ σαν γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{AM}$ (2^ο Τράπεζα Θεμάτων)

5.94 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (3, -2)$

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha}(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x, y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$ (2^ο Τράπεζα Θεμάτων)

5.95 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$ και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$. Να βρείτε :

- α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$
 β) τους αριθμούς x ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = (3, 4)$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα
 γ) τους αριθμούς x ώστε τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{v}$ είναι συγγραμμικά
 (2^ο Τράπεζα Θεμάτων)

5.96 Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda - 2, \lambda - 3)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε :
 i) τα σημεία A, B, Γ να είναι κορυφές τριγώνου
 ii) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$
 β) Για $\lambda = -2$ να βρείτε :
 i) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$
 ii) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (4^ο Τράπεζα Θεμάτων)

Προβολή Διανύσματος σε Διάνυσμα

5.97 Αν $\vec{\alpha} = (2, 3)$ και $\vec{\beta} = (-1, 4)$, να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$

5.98 Αν $\vec{\alpha} = (1, 3)$ και $\vec{\beta} = (9, 7)$, να βρείτε την προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$

5.99 Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ να βρείτε την προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$

5.100 Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ να βρείτε την προβολή του $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$

5.101 Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και κάθετα, να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$

5.102 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, -3)$, $B(-3, 0)$ και $\Gamma(4, 4)$. Αν $A\Delta$ το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{B\Delta}$

5.103 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (4, 3)$ και $\vec{\beta} = (-8, 6)$

- α) Να δείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αμβλεία
 β) Να βρείτε το μήκος της προβολής του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$

5.104 Αν $\vec{\alpha} = (4, 3)$ και $\vec{\beta} = (-1, -3)$, να υπολογίσετε το μέτρο $|\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})|$

5.105 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 7)$ και $\vec{\beta} = (2, 4)$

- α) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$
 β) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$

5.106 Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (1, 5)$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha} = (1, -1)$

5.107 Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta} = (1, 2)$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha} = (-1, 1)$

5.108 Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 8$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(x \cdot \vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 5 \cdot \vec{\alpha}$,
να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός x .

5.109 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \frac{2}{3} \vec{\beta}$ και $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \frac{3}{4} \vec{\alpha}$.

α) Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = \frac{2\sqrt{2}}{3} |\vec{\beta}|$

β) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

5.110 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$ και $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ αν ισχύει $(\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})$

γ) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (3, -1)$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha} = (-1, 2)$.

Τυπολόγιο στα Διανύσματα

1. Μέσο Τμήματος

α. Οι συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB είναι: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

β. Αν O σημείο αναφοράς τότε ισχύει $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$

2. Τμήμα με γνωστά τα άκρα

α. Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$ είναι $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

β. Η απόσταση του A από το B είναι $(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

3. Μέτρο και Συντελεστής Διεύθυνσης διανύσματος

α. Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$ τότε το μέτρο του είναι: $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

β. Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του είναι $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{y}{x}$

γ. Η γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα x'x είναι $\epsilon\phi\omega = \lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{y}{x}$

4. Παράλληλα Διανύσματα

α. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$

β. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$.

Αν $\lambda > 0$ τα διανύσματα είναι ομόρροπα και $\lambda < 0$ αντίρροπα

γ. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}}$

δ. Τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν $\vec{AB} \parallel \vec{BG}$

5. Κάθετα Διανύσματα

α. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

β. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} \lambda_{\vec{\beta}} = -1$

6. Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

α. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

β. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ όπου $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$

γ. Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα τότε και μόνο τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$

δ. Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα τότε και μόνο τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$

7. Γωνία δύο Διανυσμάτων

α. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι: $\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|}$

β. Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα $\Leftrightarrow \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1 \Leftrightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0^\circ$

γ. Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα $\Leftrightarrow \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 180^\circ$