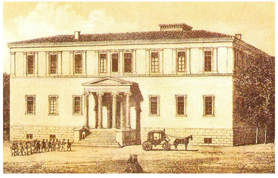
Ευθεία



Λυγάτσικας Ζήνων *

Πρότυπο Πειραματικό Γ.Ε.Λ. Βαρβακείου Σχολής

16 Μαΐου 2013

Εισαγωγή

Στόχος είναι να αξιοποιηθούν οι γνώσεις των μαθητών απο όλο το μαθηματικό syllabus όπως είναι αυτό της τριγωνομετρίας, της γεωμετρίας και φυσικά των διανυσμάτων. Η αναλυτική γεωμετρία στο επίπεδο που διδάσκεται, δεν παρουσιάζεται σαν ιδιαίτερη μαθηματική οντότητα αφού κατακερματίζεται δραματικά μέσα σε έναν κυκεώνα αυτοεπαναλαμβανόμενων και μαθηματικώς αφελών υπολογισμών. Μένει λοιπόν ένα στοιχειώδες υπολογιστικό της κομμάτι που μοιραία αναλλώνεται σε ασκήσεις χωρίς μαθηματικό περιεχόμενο ικανοποιώντας τις περισσότερες φορές την βιρτουόζικη διάθεση του καθηγητή και την αναμενόμενη απομόνωση της Γ Λυκείου.

Κατα την γνώμη μας δεν είναι επαρκώς πραγματοποιήσιμοι οι σκοποί και οι στόχοι του αναλυτικού προγράμματος απο την διδακτέα ύλη του σχολικού βιβλίου, ιδίως στις πρώτες έννοιες της ευθείας και στο σύνολο των ασκήσεων. Για να είμαστε συνεπείς, έστω και σε αυτό το μικρό κατακερματισμένο κομμάτι, θα παρουσιάσουμε την ευθεία συνεχίζοντας την χρήση των εργαλείων απο το κεφάλαιο των διανυσμάτων και των ήδη διδαχθέντων στα μαθηματικά της γενικής παιδείας. Επίσης, θεωρούμε ότι είναι παιδαγωγικά χρήσιμο να έχουμε υπόψη τον κλασικό τρόπο παρουσίασης των αρχών του $20^{ου}$ αιώνα με το πλουσιότατο περιεχόμενο αλγεβρικών και γεωμετρικών υπολογισμών, δείτε [2] και [5]. Θα δώσουμε τρείς ισοδύναμες εξισώσεις της ευθείας η οποία αντιμετωπίζετε σαν γεωμετρικός τόπος σημείων με κάποια ιδιότητα και θα δούμε ένα σαφέστερο τρόπο απόδειξης του ότι κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστά ευθεία γραμμή κάτω απο κάποιες προυποθέσεις.

Μεγάλο βάρος δίνουμε στην επίλυση των ασκήσεων. Μερικές παρουσιάζονται για πρώτη φορά στο ευρύ ελληνικό μαθητικό κοινό. Είναι οι ασκήσεις 38 σελίδα 14 και 39 σελίδα 14. Θα λέγαμε ότι θέλουν μια αντιμετώπιση διαφορετική των υπολοίπων. Για τον λόγο αυτό αποτελούν παιδαγωγικό αντικείμενο διαπραγμάτευσης.

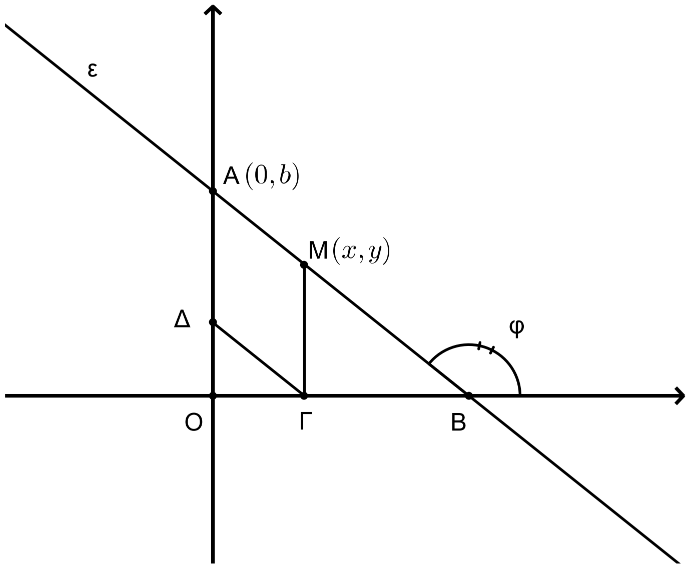
Απο την μεριά του λογισμικού χρησιμοποιούμε το Geogebra και μάλιστα το λογισμικό του Σ. Κείσογλου, δείτε [4], και το Maple.

*c:\education\ B_LYC \ligne\ cours\proposition\ligne1.tex

1 Η ευθεία γραμμή

1.1 Εξίσωση ευθείας ορισμένη απο γωνία με τον άξονα x και το σημείο που τέμνει τον y άξονα

Υποθέστε ότι γνωρίζουμε την γωνία $\widehat{\phi}$ που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x καθώς και το σημείο A του άξονα y. Έστω σημείο $M(x, y)$ της ευθείας και Γ η προβολή του στον άξονα x και $\Gamma\Delta \parallel \varepsilon$, δες σχήμα 1.



Σχήμα 1: Υπολογισμός της εξίσωσης ευθείας απο την γωνία ϕ και σημείο $A = (0, b)$ του άξονα y.

Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ έχουμε:

$$\frac{O\Delta}{O\Gamma} = \text{εφ}\widehat{O\Gamma\Delta}$$

Αλλά, $O\Gamma = x$ και $O\Delta = b - y$, άρα:

$$\begin{aligned} \frac{b-y}{x} = \text{εφ}\widehat{O\Gamma\Delta} \quad &\Leftrightarrow \quad y = -\text{εφ}\left(\widehat{O\Delta\Gamma}\right) \cdot x + b \\ &\Leftrightarrow \quad y = \text{εφ}(\widehat{\phi}) \cdot x + b \end{aligned}$$

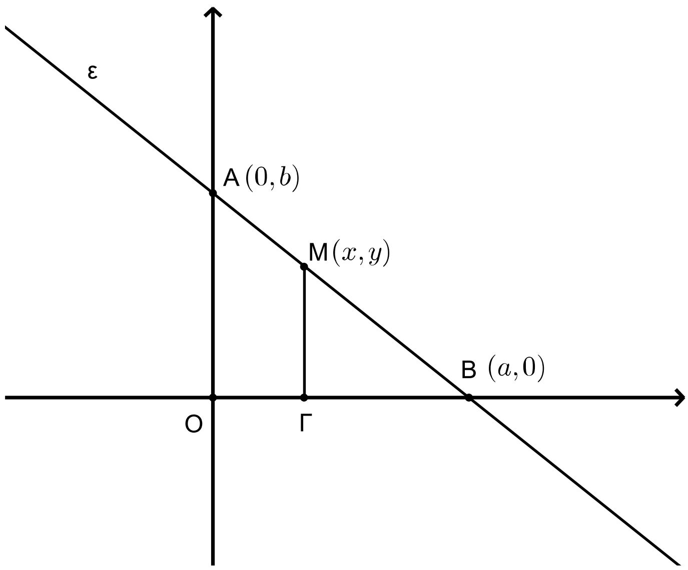
Έτσι, η πρώτη εξίσωση είναι:

$$\boxed{\mathbf{y} = \lambda \cdot x + b, \ \lambda = \text{εφ}(\widehat{\phi})} \tag{1}$$

1.2 Εξίσωση ευθείας που διέρχεται απο δύο σημεία των αξόνων y και x

Θα βρούμε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται απο τα σημεία $A(0, b)$ και $B(a, 0)$.

Απο τα όμοια τρίγωνα $OBA \approx \Gamma BA$, έχουμε:



Σχήμα 2: Υπολογισμός της εξίσωσης της ευθείας που διέρχεται απο τα σημεία A και B.

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\Gamma B}{\Gamma M} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a-x}{y}$$

Από την τελευταία εξίσωση θα πάρω:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \tag{2}$$

1.3 Εξίσωση ευθείας εφαπτομένης κύκλου ακτίνας $p > 0$ με κέντρο την αρχή των αξόνων

Υποθέστε ότι η ευθεία ε είναι εφαπτόμενη σε κύκλο (A, AB) με $p = AB$, στο σημείο B. Τότε:

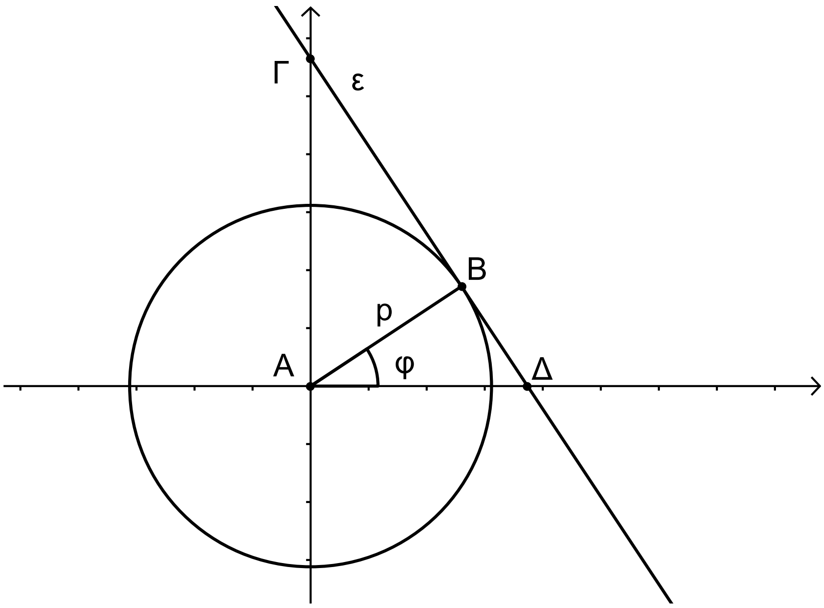
$$A\Delta = \frac{p}{\text{συν}(\phi)}; \qquad A\Gamma = \frac{p}{\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)} = \frac{AB}{\text{ημ}(\phi)}$$

Επομένως, απο την εξίσωση 2 έχουμε:

$$\frac{x\text{συν}(\phi)}{p} + \frac{y\text{ημ}(\phi)}{p} = 1$$

Άρα,

$$\boxed{\text{xσυν}(\phi) + y\text{ημ}(\phi) = p} \tag{3}$$



Σχήμα 3: Υπολογισμός εξίσωσης ευθείας αν είναι κάθετη σε ευθεία AB.

1.4 Μια σύνθεση

Είδαμε τρείς αλγεβρικές εξισώσεις που ορίζουν ευθεία:

$$y = \lambda \cdot x + b$$
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$
$$x\text{συν}(\phi) + y\text{ημ}(\phi) = p$$

Όλες είναι πρώτου βαθμού και κάθε μια προκύπτει απο την άλλη κάνοντας κατάλληλες αντικαταστάσεις στους συντελεστές. Για παράδειγμα:

$$\lambda = -\frac{b}{a}, \qquad a = \frac{p}{\text{συν}(\phi)}, \qquad b = \frac{p}{\text{ημ}(\phi)} \tag{4}$$

Αν η ευθεία είναι κάθετη στον άξονα x στο σημείο $(\alpha, 0)$, έχει τύπο

$$x = \alpha$$

Αν η ευθεία είναι κάθετη στον άξονα y στο σημείο $(0, \beta)$, έχει τύπο

$$y = \beta$$

Η παραλληλία και η καθετότητα δύο ευθειών ε_1 και ε_2, μπορεί εύκολα να εξαχθούν με τον τρόπο που περιγράφεται στο βιβλίο, με την βοήθεια των διανυσμάτων. Έτσι:

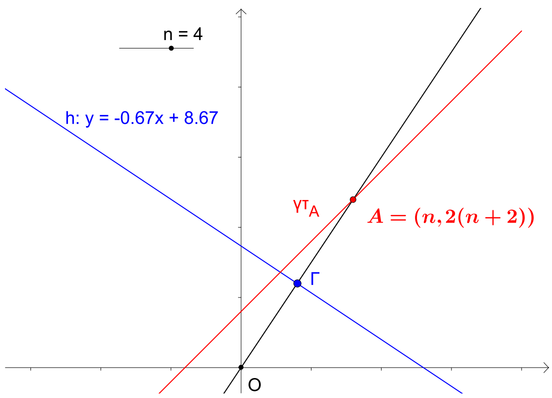
$$\boldsymbol{\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1}$$

Η εύρεση της εξίσωσης της ευθείας η οποία διέρχεται απο δύο σημεία προκύπτει απο την επίλυση του αντιστοίχου συστήματος των παραμάτρων που προσδιορίζουν την εξίσωση που θα επιλεγεί εκ των προτέρων να αναπαραστήσει αλγεβρικά την ευθεία.

1.5 Ασκήσεις

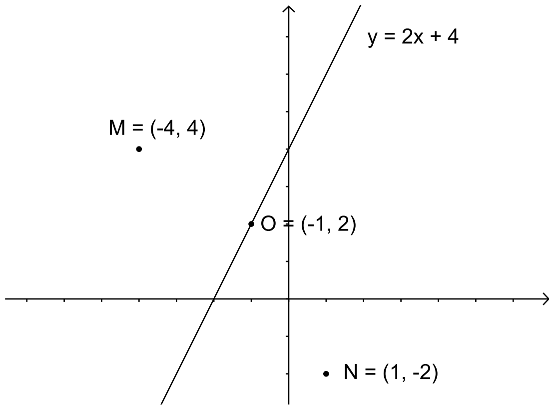
1. Οι ασκήσεις του βιβλίου σελ. 64/5 είναι επαρκείς.
2. Χαράξτε τις ευθείες $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ και $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$. Ποιά είναι η σχετική θέση των δύο ευθειών;
3. Η εξίσωση $x + \frac{1}{2}y = 3$ είναι της μορφής $x\text{συν}(\phi) + y\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = p$; Βρείτε τις παραμέτρους $p,\ \phi$.
4. Ποιά είναι η γωνία της ευθείας $\frac{1}{2}x\sqrt{3} - \frac{1}{2}y = 2$;
5. Δείξτε ότι αν οι συντελεστές των x και y μιας εξίσωσης ευθείας, (είτε της μορφής (1) είτε (2) είτε (3)) πολλαπλασιασθούν με μια σταθερά $c \neq 0$, τότε η ευθεία παραμένει η ίδια.
6. Δείξτε ότι αν μια ευθεία τέμνει τις πλευρές ενός τριγώνου σε ανάλογα τμήματα, είναι παράλληλη στην τρίτη πλευρά.
7. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν απο την αρχή των αξόνων και απο το σημείο $(2n, 2(n+2))$, με $n \in \mathbb{N}^*$. Να μοντελοποιήσετε το πρόβλημα στο Geogebra.



Σχήμα 4: Άσκηση 7.

8. Δείξτε ότι η ευθεία ταξινομεί τα σημεία του επιπέδου σε τρείς κατηγορίες. Για παράδειγμα, αν $y = 2x + 4$ η εξίσωση μιας ευθείας, τότε αν ένα σημείο $O = (-1, 2)$ ανήκει στην ευθεία θα ικανοποιεί τη σχέση $y_O = 2x_O + 4$, αν το σημείο βρίσκεται πάνω απο την ευθεία, όπως για παράδειγμα το $M = (-4, 4)$ τότε θα έχουμε $y_M > 2x_M + 4$ και αν βρίσκεται κάτω απο την

ευθεία, όπως το $N = (1, -2)$, τότε $y_N < 2x_N + 4$. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι μια ευθεία ορίζει τα θετικά σημεία τα μηδενικά σημεία και τα αρνητικά σημεία του επιπέδου σε σχέση πάντα με την θέση της. Μπορείτε να το γενικεύσετε την παρατήρηση για οποιαδήποτε ευθεία $y = ax + b$ αποδεικνύοντας τους αντίστοιχους ισχυρισμούς;



Σχήμα 5: Προσανατολισμός του επιπέδου.

2 Η ευθεία γραμμή

2.1 Αναλυτική εξίσωση ευθείας - Εφαρμογή του εσωτερικού γινομένου

Ορισμός 2.1 *Ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{v}$ λέγεται κανονικό σε ευθεία (ε), αν η διεύθυνση του διανύσματος είνια κάθετη στην (ε).*

Θεώρημα 2.1 *Έστω ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.*

1. *Μια ευθεία με κανονικό διάνυσμα $\overrightarrow{v} = (a, b)$, με $a^2 + b^2 \neq 0$, είναι της μορφής $ax + by + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$*

2. *Έστω, $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a^2+b^2 \neq 0$, το σύνολο των σημείων των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την $ax + by + c = 0$ είναι μια ευθεία με κανονικό διάνυσμα $\overrightarrow{v} = (a, b)$.*

<u>Απόδειξη:</u>

1. Έστω ευθεία (ε) με κανονικό διάνυσμα $\overrightarrow{v} = (a, b)$. Αν $A = (x_0, y_0) \in (\varepsilon)$ και $M = (x, y)$, τότε $\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0)$.

   Αν $M \in (\varepsilon) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)a + (y - y_0)b = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ με $c = -ax_0 - by_0$.

2. Έστω (ε) το σύνολο των σημείων $M = (x, y)$ τέτοιο ώστε $ax + by + c = 0$ και σημείο $A = (x_A, y_A) \in (\varepsilon)$.

$$\begin{aligned} M = (x, y) \in (\varepsilon) &\Leftrightarrow ax + by + c = 0 = ax_A + by_A + c \\ &\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{v} \\ &\Leftrightarrow M \text{ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται απο το } A \\ &\quad\ \text{και έχει κανονικό διάνυσμα } \overrightarrow{v} \end{aligned}$$

∎

2.2 Αναλυτική εξίσωση ευθείας - Γεωμετρικές ιδιότητες

Θεώρημα 2.2 *Υποθέστε ότι A και B δύο πραγματικοί με την ιδιότητα $A^2 + B^2 \neq 0$. Τότε κάθε ευθεία μπορεί να αναπαρασταθεί απο μια εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$. Και αντιστρόφως: κάθε εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 \neq 0$, παριστά ευθεία.*

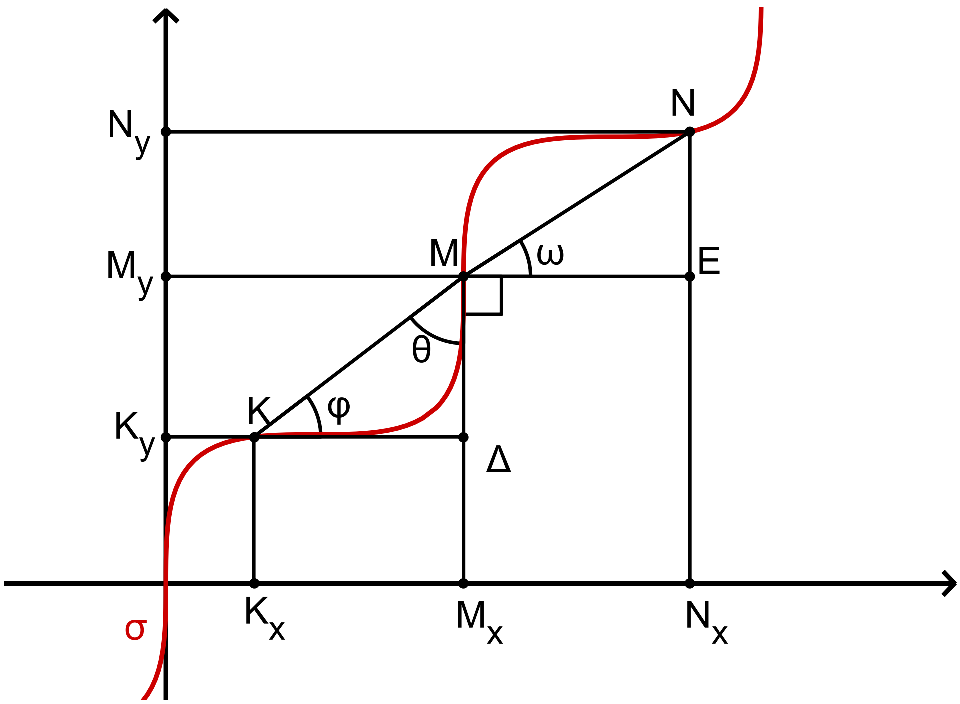
<u>Απόδειξη:</u>
Υποθέτω ότι αν $A = 0$ ή $B = 0$ το θεώρημα είναι προφανές. Θα δείξω το θεώρημα στην περίπτωση που $AB \neq 0$.

Κάθε εξίσωση της μορφής (1) - σελ. 2, (2) - σελ. 3 και (3) - σελ. 3, μπορεί να τεθεί στην μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$. Είναι εύκολο να το επαληθεύσετε.

Θα δείξω ότι αν $AB \neq 0$ τότε κάθε εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστά ευθεία.

Η εξίσωσή μας γράφεται σαν: $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{\Gamma}{B}$ ή εν συντομία: $y = \alpha x + \beta$. Υποθέτουμε τρία σημεία K, M και N του γεωμετρικού τόπου (σ) της καμπύλης που παριστά η $Ax + By + \Gamma = 0$. Άρα,

$$\begin{cases} y_K = \alpha x_K + \beta \\ y_M = \alpha x_M + \beta \\ y_N = \alpha x_N + \beta \end{cases} \tag{5}$$



Σχήμα 6: Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων της $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι ευθεία.

Ας υποθέσουμε μια διάταξη των σημείων K, M και N του γεωμετρικού τόπου, (σ), της συνάρτησης $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι τέτοια ώστε $x_K < x_M < x_N$. Τότε, η διάταξη αυτή μεταφέρεται και στις τεταγμένες των σημείων: $y_K < y_M < y_N$. Αν θεωρήσουμε μια άλλη διάταξη των σημείων θα πάρουμε μια ανάλογη διάταξη στις τετμημένες και τεταγμένες. Επίσης, απο τις εξισώσεις 5, έχουμε ότι:

$$\frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{y_M - y_K}{x_M - x_K}$$

ή

$$\frac{NE}{ME} = \frac{M\Delta}{K\Delta} \Leftrightarrow \text{εφ}(\phi) = \text{εφ}(\omega) \Leftrightarrow \phi = \omega$$

Εύκολα διαπυστώνουμε ότι: $\widehat{KMN} = \omega + \theta + 90^o = 90^o + 90^o = 180^o$ που σημαίνει ότι τα σημεία K, M και N είναι συνευθειακά.

Ας δούμε λίγο το τελευταίο αποτέλεσμα. Δείξαμε ότι οποιοδήποτε σημείο σε ενδιάμεση θέση των K και N, ανήκει στην ευθεία που διέρχεται απο τα K και N. Η επιλογή του ενδιάμεσου σημείου δεν εξαρτάται καθόλου απο τα σημεία K και N. Έτσι, οποιοδήποτε σημείο του τόπου (σ) ανήκει στην ευθεία KN. Άρα, ο γεωμετρικός τόπος (σ) είναι ευθεία. ■

3 Αποστάσεις, Εμβαδά

Δίδεται ευθεία $\epsilon: \; Ax+By+\Gamma=0,\; A^2+B^2\neq 0$, και σημείο $M=(x_0,y_0)$. Η απόσταση του σημείου M απο την ευθεία είναι:

$$d(M,\epsilon)=\frac{\Big|Ax_0+By_0+\Gamma\Big|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται απο τον τύπο:

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\Big|det\big(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\big)\Big|$$

3.1 Ασκήσεις

Ένα μεγάλο μέρος των ασκήσεων προυποθέτει την χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού, ιδίως όταν στην άσκηση εμπλέκεται πραγματική παράμετρος.

1. Οι ασκήσεις του βιβλίου καλύπτουν μια αλγεβρική πολυπλοκότητα πράξεων που ανταποκρίνεται στον μέσο μαθητή.

2. Σ'ενα τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(-3,3), Β(1,5) και Γ(3,3). Να βρεθούν:

   (α') οι εξισώσεις των πλευρών,

   (β') οι εξισώσεις των υψών,

   (γ') οι εξισώσεις των διαμέσων,

   (δ') οι εξισώσεις των μεσοκαθέτων,

   (ε') οι εξισώσεις των διχοτόμων,

   (ϝ') οι συντετεγμένες του έγκεντρου και

   (ζ') οι συντεταγμένες του περίκεντρου.

3. Έστω τα σημεία $A(0,\sqrt{3})$, $B(0,-\sqrt{3})$, $\Gamma(3,-2\sqrt{3})$ και $\Delta(3,2\sqrt{3})$.

   (α') Δείξτε ότι τα $AB\Gamma\Delta$ σχηματίζουν τραπέζιο συμμετρικό με άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$.

   (β') Δείξτε ότι η γωνία $\widehat{\Gamma B\Delta}$ είναι ορθή.

   (γ') Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου περί το $AB\Gamma\Delta$.

4. Σ' ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(-1,-5)$. Οι εξισώσεις του ύψους και της διχοτόμου που άγονται απο διαφορετικές κορυφές είναι $x-3y-4=0$ και $x+y+8=0$ αντίστοιχα. Να βρεθούν οι κορυφές του τριγώνου.

5. Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι οι διαγώνιες διχοτομούνται. Είναι γνωστή η κλασσική απόδειξη της Ευκλείδιας γεωμετρίας. Θέλουμε να κάνουμε την απόδειξη με την βοήθεια της αναλυτικής γεωμετρίας και συγκεκριμμένα της εξίσωσης της ευθείας.

   (α΄) Τοποθετήστε την κορυφή A στην αρχή ενός ορθοκανονικού συστήματος έτσι ώστε: η κορυφή $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$, $\Delta = (d_1, d_2)$.

   (β΄) Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

   (γ΄) Βρείτε το σημείο τομής των ευθειών $A\Gamma$ και $B\Delta$ και επαληθεύστε ότι είναι το μέσο των ευθ. τμημάτων $A\Gamma$ και $B\Delta$.

6. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$(\epsilon) : \ (\lambda + 2)x + (\lambda - 1)y - 2\lambda - 1 = 0$$

   να σχηματίζει τρίγωνο με τις ευθείες $(\epsilon_1) : \ y = x$ και $(\epsilon_2) : \ 3x - 2y - 1 = 0$.

7. Έστω $H(2, -1)$ το ορθόκεντρο και $\Theta(3, 2)$ το βαρύκεντρο ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με $A(5, 4)$. Να βρεθεί η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$.

8. Δίδονται οι ευθείες: $(\epsilon) : \ (\lambda^2 + 1)x + (\lambda^2 - 1)y - \lambda = 0$ και $(\zeta) : \ (\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y - \lambda^2 = 0$. Να αποδειχθεί ότι, αν οι ευθείες (ϵ) και (ζ) έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο τότε αυτό κινείται σε μια ευθεία.

9. Αν $S : \ ax + by + c = 0$ και $S' : \ a'x + b'y + c' = 0$ είναι οι εξισώσεις δύο ευθειών, και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}*$ τότε η εξίσωση

$$\lambda S + \mu S' = 0$$

   αναπαριστά μια εξίσωση που διέρχεται απο το σημείο τομής των δύο ευθειών.

10. Η ευθεία $y - 3 = \lambda(x - 2)$ διέρχεται απο το σημείο $A(2, 3)$. Για ποιά τιμή του λ διέρχεται απο το σημείο $B(5, -1)$.

11. Να βρείτε σημείο της ευθείας $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$ που έχει τετμημένη διπλάσια της τεταγμένης του.

12. Ένα τμήμα έχει άκρα τα $A(2, 3)$ και $B(3, t)$. Πως πρέπει να επιλέξουμε το t ώστε το μέσο του AB να ανήκει στην ευθεία $2x - 3y + 1 = 0$; (ΑΠΑΝΤΗΣΗ : t=1)

13. (α΄) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $\Gamma(-11, -2)$ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

    (β΄) Τα σημεία $A(2, 3)$, $B(5, -1)$, $\Gamma(6, \lambda)$ είναι συνευθειακά. Ποιά είναι η τιμή του λ;

14. Να βρείτε ποιά ευθεία διέρχεται απο το $A(2, 3)$ και απέχει απο την αρχή των αξόνων απόσταση 2. (ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Οι ευθείες $x = 2$ και η $y = \frac{5}{12}x + \frac{13}{6}$).

15. Η εξίσωση $(2x + 3y - 3) + (\varrho + 1)(x - y - 2) = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε $\varrho \in \mathbb{R}$ που διέρχεται απο σταθερό σημείο. Ποιό είναι αυτό; (ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το $A(\frac{9}{5}, -\frac{1}{5})$).

16. Έστω οι αριθμοί α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $A(\alpha, \alpha^2)$, $B(\beta, \beta^2)$, $\Gamma(\gamma, \gamma^2)$ είναι ίσο με $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

17. Θεωρώ τις ευθείες

$$(\lambda-1)x+\lambda y+8=0, \quad (\epsilon_1)$$

$$\lambda x+3y+1-2\lambda=0, \quad (\epsilon_2)$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α') Να βρείτε για ποιές τιμές του λ οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι κάθετες. (Σχολικό βιβλίο σελ. 69 ασκ. Α5).

(β') i. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται για κάθε τιμή του λ.

ii. Να αποδείξετε ότι αν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται στο σημείο $M(\alpha, \beta)$ τότε ισχύει:

$$\alpha^2+3\beta^2+3\alpha\beta-9\alpha+\beta+16=0$$

18. Αν οι ευθείες $\lambda x-(\lambda^2+1)y=2$ και $(\lambda^2+2)x-(\lambda^2+1)(\lambda-2)y=\lambda-3$ τέμνονται στον άξονα $y'y$, να βρείτε την τιμή του λ.

19. Δίνεται η οικογένεια ευθειών με εξίσωση

$$(\lambda^2+1)x-\lambda^2 y-2=0, \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad (Q_\lambda)$$

(α') Να βρεθεί το σταθερό σημείο (M) απο το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες της οικογένειας.

(β') Υπάρχει ευθεία της οικογένειας που είναι κάθετη στην ευθεία $(\epsilon_1): \ x-3y=7$;

(γ') Να βρεθεί (αν υπάρχει) η ευθεία της οικογένειας Q_λ που σχηματίζει με την ευθεία $y=-x$ γωνία 45^o.

(δ') Μια άλλη οικογένεια ευθειών έχει εξίσωση

$$\lambda^{2009}x+(\lambda^{2008}+1)y-2=0, \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad (S_\lambda)$$

Να εξετάσετε αν οι δύο οικογένειες Q_λ και S_λ έχουν κοινή ευθεία.

20. Μια ευθεία (ϵ) τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$.

(α') Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας. (Δες Σχολικό βιβλίο σελ. 65 ασκ. 5Β).

(β') Αν $\alpha+\beta=\alpha\beta$ να δείξετε ότι η ευθεία (ϵ) διέρχεται απο σταθερό σημείο.

21. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(2,3)$, $B(-4,0)$ και $\Gamma(2\lambda-1, \lambda+2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α') Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της κορυφής Γ.

(β') Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερό.

22. Δίδονται οι ευθείες $(\epsilon): \ (\mu-3)x+(\mu-1)y+3=0$ και $(\sigma): \ (\mu-1)x+(2\mu+1)y+3\mu=0$ $\mu \in \mathbb{R}$.

(α') Να αποδειχθεί ότι οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν ευθείες για κάθε πραγματική τιμή του μ.

(β') Ποιά είναι η τιμή του μ έτσι ώστε οι ευθείες (ϵ) και (σ) να είναι πράλληλες;

23. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $x^2 + y^2 - 2xy - 3x + 3y + 2 = 0$.

24. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ του οποίου η κορυφή A έχει συντεταγμένες $(1, 3)$ και οι διχοτόμοι των γωνιών B και Γ έχουν αντίστοιχα εξισώσεις: $x = 3$ και $y = x - 1$.

25. *(Άσκηση: Σύνθετα 3 σελ. 218 βιβλίου Γεωμετρίας)*
Στις πλευρές $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α παίρνουμε τα σημεία Z και H αντίστοιχα, ώστε: $Z\Gamma = H\Delta = \frac{\alpha}{4}$.

(α') Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AZ και BH τέμνονται κάθετα σε σημείο K.

(β') Να υπολογισθούν τα μήκη των τμημάτων AK, AH και KH.

(γ') Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AKH\Delta$.

Υπόδειξη: Αφού κάνετε την γεωμετρική απόδειξη, βρείτε την καταλληλότερη θέση να τοποθετήσετε το σχήμα σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και απαντήσετε χρησιμοποιώντας αποτελέσματα της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Ποιά απο τις δύο αποδείξεις είναι οικονομικότερη;

26. Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Αν I μέσο της BA, Λ μέσο της $B\Gamma$, K μέσο της BI και $BH \perp I\Gamma$, αποδείξτε ότι $HK \perp H\Lambda$.
Υπόδειξη: Αφού λύσετε την άσκηση γεωμετρικά, να μεταφερθεί το σχήμα σε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων έτις ώστε να λυθεί με αναλυτική γεωμετρία. Ποιά απο τις 2 αποδείξεις φαίνεται οικονομικότερη; Που υστερεί η μια έναντι της άλλη;

27. Να βρείτε τις τιμές των $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ευθείες: $(\epsilon) :\ x + \mu y + 1 = 0$ και $(\sigma) :\ 2\mu x + 2y + \lambda = 0$, είναι παράλληλες και η απόσταση τους είναι ίση με $2\sqrt{2}$.

28. (Θεώρημα Μενελάου) Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία K, L και M των AB, $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα έτσι ώστε να ισχύει:

$$\overrightarrow{AK} = \kappa\overrightarrow{KB},\ \ \overrightarrow{B\Lambda} = \lambda\overrightarrow{\Lambda\Gamma},\ \ \overrightarrow{\Gamma M} = \mu\overrightarrow{MA}$$

Να αποδείξτε ότι τα σημεία K, Λ και M είναι συνευθειακά αν και μόνο αν $\kappa \cdot \lambda \cdot \mu = -1$

29. Να βρείτε το σημείο M της ευθείας $(\epsilon) :\ x + y - 4 = 0$ ώστε αν $A(3, 3)$ και $B(0, 2)$ να είναι $(\widehat{MA, MB}) = 45^o$.

(Οι ρίζες $1, 2, 4, -1$ του πολυωνύμου $2x^4 - 12x^3 + 14x^2 + 12x - 16$, να βρεθούν με το σχήμα Horner. Αποκλείστε τις ρίζες 1 και 2.)

30. Δίδεται ευθεία $(\varepsilon) :\ x + y + 1 = 0$ και σημείο $M(1, 2)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών τετραγώνου που έχει σημείο τομής των διαγωνίων το M και μια πλευρά του βρίσκεται στην (ε).

31. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$ του οποίου η κορυφή A έχει συντεταγμένες $(3,6)$ και οι διάμεσοι BE και ΓZ έχουν εξισώσεις: $(BE):\ x-4y+3=0$ και $(\Gamma Z):\ 4x+5y-23=0$.

32. (α') Να αποδείξετε ότι η απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών

$$(\epsilon):\ \alpha x+\beta y+\gamma_1=0 \qquad (\sigma):\ \alpha x+\beta y+\gamma_2=0$$

είναι $\dfrac{|\gamma_1-\gamma_2|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

(β') Να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των παραλλήλων

$$\begin{aligned}(\zeta_1) &: 5x-12y-65 = 0\\ (\zeta_2) &: 5x-12y+26 = 0\end{aligned}$$

(γ') Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες (ζ_1) και (ζ_2).

33. Δίδονται $(\epsilon):\ x+y+1=0$, $(\epsilon_1):\ x+3y+3=0$ και $(\epsilon_2):\ 2x-y-1=0$. Να προσδιορισθεί σημείο M της ευθείας (ϵ), έτσι ώστε ο αριθμός $d^2(M,\epsilon_1)+d^2(M,\epsilon_2)$ να γίνει ελάχιστος.

34. Τριγώνου $AB\Gamma$ δίνονται η κορυφή $A(1,2)$ και οι εξισώσεις $x-3y+1=0$ και $2x+10y-6=0$ δύο διαμέσων του. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$.

35. (α') Δίδεται η ευθεία $(\epsilon):\ Ax+By+\Gamma=0$. Δείξτε ότι:

i. Αν $A=0$ και $B+\Gamma=0$ τότε η (ϵ) είναι οριζόντια ευθεία.

ii. Αν $A,\ B>0$ και $\Gamma<0$ η (ϵ) διέρχεται απο το 1^o τεταρτημόριο.

iii. Αν $A>0$ και $B,\ \Gamma<0$ τότε η (ϵ) δεν διέρχεται απο το 2^o τεταρτημόριο.

(β') Έστω η εξίσωση $x^2-2\lambda x-y^2-4\lambda y-3\lambda^2=0 \quad (Q_\lambda)$.

i. Δείξτε ότι η εξίσωση (Q_λ) παριστά ευθείες κάθετες μεταξύ τους για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου τομής των ευθειών για τις διάφορες τιμές του λ.

iii. Αν μια ευθεία της οικογενείας (Q_λ) με θετικό συντελεστή διέρχεται απο το (-3,0) να βρεθεί η αντίστοιχη τιμή λ_0 της μεταβλητής λ. Δείξτε ότι για την ανωτέρω τιμή λ_0 οι ευθείες της οικογένειας (Q_{λ_0}) είναι συμμετρικές ως προς την $x=-1$.

Έστω (ϵ_1) και (ϵ_2) δύο ευθείες της οικογένειας (Q_{λ_0}) με θετικό συντελεστή και αρνητικό συντελεστή αντίστοιχα.

iv. Να βρεθούν οι παράλληλες ευθείες στις (ϵ_1) και (ϵ_2) που βρίσκονται σε απόσταση $3\sqrt{2}$ απο αυτές. Έστω (δ_1) η παράλληλη στην (ϵ_1) που δεν διέρχεται απο το 2^o τεταρτημόριο και (δ_2) η παράλληλη στην (ϵ_2) που διέρχεται απο το 1^o τεταρτημόριο.

v. Οι ευθείες $(\epsilon_1),\ (\epsilon_2),\ (\delta_1)$ και (δ_2) τέμνονται προφανώς ανά δύο. Τί είδος παραλληλόγραμμο σχηματίζουν;

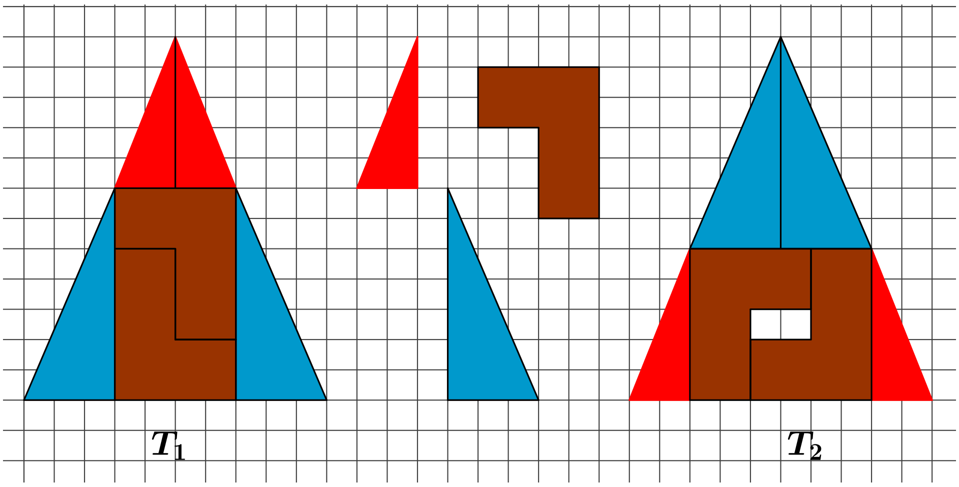
36. Να αποδείξετε ότι αν οι ευθείες $A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$, $A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$ σχηματίζουν γωνία ϕ τότε ισχύει:

$$\text{συν}\phi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

37. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\alpha x + \beta y = \gamma$, $\beta x + \alpha y = \gamma$ με $\alpha\beta \neq 0$ τέμνονται σε σημείο της ευθείας $y = x$ και είναι συμμετρικές ως προς αυτή.

38. (Το Τρίγωνο του Curry). Στο σχήμα βλέπετε την διαμέριση ενός τριγώνου 60 τμ σε δύο σχήματα T_1 και T_2 το οποία έχουν σχηματισθεί διατάσσοντας διαφορετικά τα ίδια κομμάτια. Στην δεύτερη διάταξη T_2 του σχήματος 7, υπάρχει ένα κενό δύο μικρών τετραγώνων. Πώς θα δικαιολογούσατε το φαινόμενο;

    Υπόδειξη: Σημεία που φαίνονται να είναι συνευθειακά, δεν είναι.



Σχήμα 7: Το τρίγωνο του Curry.

39. ⨀⨀ Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο P στο εσωτερικό του. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P έτσι ώστε οι αποστάσεις του σημείου απο τις τρείς πλευρές AB, $A\Gamma$ και $B\Gamma$ να είναι μήκη πλευρών τριγώνου.

Αναφορές

[1] Αδαμόπουλος Λ, Βισκαδουράκης Β. κ.αλ. *Μαθηματικά Β Ταξη Γενικού Λυκείου, Θετική και Τεχνολογική κατ/νση*, ΟΕΔΒ.

[2] Casey, J., *A treatise on the analytical geometry of the point line, circle and conic sections*, Hodges F. and Co. Dublin, London, 1983.

[3] Curriculum, Maths Seconde, - 2^e France, Hachette, et alli

[4] Κείσογλου Σ., *Μαθηματικά με το Geogebra, Β' Λυκείου, Βιβλίο Καθηγητή και Τετράδιο Μαθητή.*

[5] Ray, J., *Treatise on Analytic Geometry*, Wilson, Hinkle and Co. 1869.