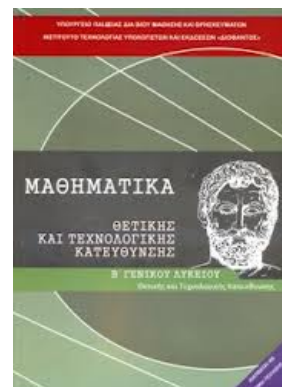


Β Λυκείου



Μαθηματικά Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών

Τράπεζα Θεμάτων Θέμα Β – Θέμα Δ

Τελευταία Ενημέρωση 16/11/2014

1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Τράπεζα Θεμάτων
Υπουργείο Παιδείας &
Θρησκευμάτων
Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Νοέμβριος 2014



Μαθηματικές
Παρουσιάσεις

<http://perikentro.blogspot.gr>

Διανύσματα

Θέμα Β – Τράπεζα Θεμάτων

Θέμα Β1 2_18556

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\pi}{3}$ και $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{a} + \vec{b}$ και $k\vec{a} + \vec{b}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του k .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{a} + \vec{b}$.

(Μονάδες 7)

Θέμα Β2 2_18558

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\vec{AB} = (-4, -6)$, $\vec{AG} = (2, -8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AM}$, όπου ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι οξεία.

(Μονάδες 10)

γ) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ επιπλέον ισχύει $A(3, 1)$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του Β και Γ.

(Μονάδες 8)

Θέμα Β3 2_18581

Έστω τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ για τα οποία: $2|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ και $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 60^\circ$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a} + \vec{b}$ και $\vec{a} - \vec{b}$

(Μονάδες 15)

Θέμα Β4 2_18598

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$ και $\vec{AG} = (1, 6)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$ να είναι κάθετα.

(Μονάδες 9)

γ) Για $\kappa = 1$ να βρείτε το διάνυσμα $\vec{BG}$.

(Μονάδες 8)

Θέμα Β5 2_18603

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ και E του επιπέδου τέτοια, ώστε $\vec{AD} = 2\vec{AB} + 5\vec{AG}$ και

$$\vec{AE} = 5\vec{AB} + 2\vec{AG}$$

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{DE}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{DE}$ και $\vec{BG}$ είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

Θέμα Β6 2_18604

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και E, Z σημεία τέτοια ώστε: $\vec{AE} = \frac{2}{5}\vec{AD}$, $\vec{AZ} = \frac{2}{7}\vec{AG}$.

α) Να γράψετε τα διανύσματα $\vec{EZ}$ και $\vec{ZB}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{AB}$ και $\vec{AD}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Z και E είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 12)

Θέμα Β7 2_18605

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$ και $\overrightarrow{OG} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$, όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BG}$.

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία A , B και G μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.

(Μονάδες 13)

Θέμα Β8 2_20050

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 7)$ και $\vec{b} = (2, 4)$.

α) Να βρεθεί η προβολή του $\vec{a}$ πάνω στο $\vec{b}$.

(Μονάδες 10)

β) Να αναλύσετε το $\vec{a}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες, η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{b}$.

(Μονάδες 15)

Θέμα Β9 2_20052

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ με $|\vec{a}| = 1$, $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{b} = 7$ και $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

α) Να υπολογίσετε τα $\vec{a}^2$ και $|\vec{b}|$.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} + 2\vec{b}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την προβολή του $\vec{a} + 2\vec{b}$ στο διάνυσμα $\vec{b}$.

(Μονάδες 10)

Θέμα Β10 2_20053

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ με $|\vec{b}| = 2|\vec{a}| = 4$ και $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{b} + 2\vec{a} = \vec{0}$.

(Μονάδες 15)

Θέμα Β11 2_20054

Θεωρούμε τα σημεία Ρ, Λ, Κ και Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$5\overrightarrow{PL} = 2\overrightarrow{PK} + 3\overrightarrow{PM}$$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

β) Για τα παραπάνω σημεία Κ, Λ και Μ να δείξετε ότι ισχύει

$$2\overrightarrow{AL} + 3\overrightarrow{BL} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$$

όπου Α και Β είναι σημεία του επιπέδου.

(Μονάδες 15)

Θέμα Β12 2_20055

Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha+1, 3)$, $B(\alpha, 4)$ και $\Gamma(-4, 5\alpha+4)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α , τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $\alpha=1$, να βρείτε αριθμό λ ώστε $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB}$

(Μονάδες 7)

Θέμα Β13 2_20056

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δυο διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

α) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{u}$.

(Μονάδες 16)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.

(Μονάδες 9)

Θέμα Β14 2_20057

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα εξής:

α) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και κατόπιν την τιμή της παράστασης

$$\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\beta})$$

(Μονάδες 10)

β) το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 15)

Θέμα Β15 2_20058

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, 3)$. Να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$.

(Μονάδες 10)

β) το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \cdot \vec{\alpha}$.

(Μονάδες 15)

Θέμα Β16 2_20059

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2 \cdot \vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v} = (x^2, x-1)$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 15)

Θέμα Β17 2_20069

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -3)$ και $\vec{b} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε την προβολή του $\vec{a}$ πάνω στο $\vec{b}$.

(Μονάδες 10)

β) Να αναλύσετε το $\vec{a}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με το $\vec{b}$.

(Μονάδες 15)

Θέμα Β18 2_20070

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν

$$3|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 9, \quad 2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 1 \text{ και } (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$$

α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.

(Μονάδες 13)

Θέμα Β19 2_20071

Θεωρούμε τα σημεία $A(1+2\alpha, 4\alpha-2)$ και $B(5\alpha+1, -\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

α) Να γράψετε το $\overline{AB}$ συναρτήσει του α και να βρείτε το α ώστε $|\overline{AB}| = 10$.

(Μονάδες 12)

β) Έστω $\alpha=2$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές με βάση την AB .

(Μονάδες 13)

Θέμα Δ – Τράπεζα Θεμάτων**Θέμα Δ1 4_18606**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = (4, -2)$ και $\vec{OB} = (1, 2)$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 4)

β) Αν $\Gamma(\alpha, \beta)$ είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B , τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\vec{AB} = (-3, 4)$ και $\vec{AG} = (\alpha - 4, \beta + 2)$

(Μονάδες 5)

ii) να αποδείξετε ότι: $4\alpha + 3\beta = 10$

(Μονάδες 6)

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα $\vec{OG}$ και $\vec{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .

(Μονάδες 10)

Θέμα Δ2 4_18609

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\vec{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$, $\vec{AG} = (3\lambda, \lambda - 1)$, όπου $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -2$, και M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{AM} = (2\lambda, \lambda)$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα $\vec{AM}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = \left(\frac{2}{\lambda}, -\lambda\right)$

(Μονάδες 8)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

(Μονάδες 10)

Θέμα Δ3 4_18616

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}| = 2, \quad |\vec{\beta}| = 1, \quad (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ \text{ και } \vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

(Μονάδες 3)

β) Αν ισχύει $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\kappa = -2$

(Μονάδες 6)

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

(Μονάδες 8)

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

Θέμα Δ4 4_18618

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες: $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ και $|\vec{u} + \vec{v}| = ||\vec{u}| - |\vec{v}||$

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$.

i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$

(Μονάδες 8)

ii) Να αποδείξετε ότι: $7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$

(Μονάδες 7)