ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΡΙΖΕΣ

Αν μια παράσταση έχει ρίζες , θα πρέπει η υπόριζη ποσότητα να είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν . Επίσης και ότι ισούται με ρίζα , πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το μηδέν .

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ







|  |
| --- |
| ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣΌποια παράσταση είναι μέσα στην ρίζα και όποια παράσταση ισούται με ρίζα οφείλει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.Δεν ισχύει γενικά η ισότητα . Για την ακρίβεια η πρόταση αυτή ισχύει μόνο όταν  ή  . |

Παραδείγματα

1ον Να λύσετε την εξίσωση .

Λύση

Πρέπει  .

Υψώνω στο τετράγωνο και έχω     η οποία είναι δεκτή .

2ον Να λύσετε την ανίσωση .

Λύση

Πρέπει  .

Υψώνω στο τετράγωνο και έχω     .

Από τις σχέσεις  και  προκύπτει ότι .

3ον Να λύσετε την ανίσωση .

Λύση

Πρέπει  .

Η ανίσωση ισχύει για κάθε , γιατί κάθε μη αρνητικός αριθμός ( η ρίζα ) , είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό.

4ον Να λύσετε την ανίσωση .

Λύση

Πρέπει  .

Η ανίσωση είναι αδύνατη γιατί κάθε μη αρνητικός αριθμός ( η ρίζα ) , είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό.

5ον Να δείξετε ότι . για κάθε μη αρνητικό αριθμό α , β .

Λύση

Αφού οι αριθμοί  , , είναι μη αρνητικοί έχω ότι  . Να σημειωθεί ότι το = ισχύει όταν οι αριθμοί α , β είναι ίσοι.

6ον Να δείξετε ότι  για κάθε θετικό αριθμό α , β .

Λύση

Η αρχική σχέση  ισοδυναμεί με την .

Αφού οι αριθμοί  , , είναι θετικοί έχω ότι  .

**Να σημειωθεί ότι το = ισχύει όταν οι αριθμοί α , β είναι ίσοι.**

Αφού οι αριθμοί  , , είναι θετικοί έχω ότι  .

 **Να σημειωθεί ότι το = ισχύει όταν οι αριθμοί α , β είναι ίσοι.**

Άρα για τους θετικούς αριθμούς α , β ισχύει , το δε = ισχύει όταν οι αριθμοί α , β είναι ίσοι .

7ον Να δείξετε ότι . για κάθε μη αρνητικό αριθμό α , β .

Λύση

Αφού οι αριθμοί  , , είναι μη αρνητικοί έχω ότι  .

 **Να σημειωθεί ότι το = ισχύει όταν οι αριθμοί α , β είναι ίσοι.**

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ 

1ον Αν  και  με , τότε η εξίσωση , είναι αδύνατη.

2ον Αν  και  με , τότε η εξίσωση , έχει μοναδική λύση την .

3ον Αν  και  με , τότε η εξίσωση , έχει μοναδική λύση την .

4ον Αν  και  με , τότε η εξίσωση , έχει δύο αντίθετες λύσεις τις .και  .

5ον Αν , τότε η εξίσωση , έχει ν φορές ρίζα το 0, ανεξάρτητη του αν το ν είναι άρτιος ή περιττός.

ΤΡΙΩΝΥΜΟ

Για την εξίσωση  , διακρίνω τις παρακάτω περιπτώσεις.

Αν  , τότε η εξίσωση λύνεται ως πρώτου βαθμού .

Αν  , τότε βασικό ρόλο παίζει η διακρίνουσα Δ :

1. Αν  , τότε η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές ρίζες , που δίνονται από τον τύπο  .
2. Αν  , τότε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα , που δίνεται από τον τύπο  .
3. Αν  , τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες .

ΤΥΠΟΙ VIETA

 Αν για την εξίσωση  με  , μου δοθεί ότι έχει ως ρίζες τα  και  , τότε από τους τύπους του Vieta , έχω ότι  και .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν μου δοθεί η εξίσωση  με  , τότε προϋπόθεση για να εφαρμόσω τους τύπους του Vieta, είναι  .

Αν μου ζητηθεί να βρω μια δευτεροβάθμια εξίσωση , η οποία να έχει ρίζες τους αριθμούς κ και λ , τότε αφού βρω το άθροισμα και το γινόμενο , δημιουργώ την εξίσωση  .

Αν έχω ότι ισχύουν  ,  και , τότε συμπεραίνω ότι για τις ρίζες  και  ισχύει  και  .

Αν έχω ότι ισχύουν  ,  και , τότε συμπεραίνω ότι για τις ρίζες  και  ισχύει  και  .

Αν έχω ότι ισχύουν  ,  και  , τότε συμπεραίνω ότι για τις ρίζες  και  ισχύει  και  , όπου  είναι η μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή ρίζα. Δηλαδή  .

Αν έχω ότι ισχύουν  ,  και  , τότε συμπεραίνω ότι για τις ρίζες  και  ισχύει  και  , όπου  είναι η μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή ρίζα. Δηλαδή  .

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Για την ανίσωση  , διακρίνω τις παρακάτω περιπτώσεις:

* Αν  , τότε η ανίσωση λύνεται ως πρώτου βαθμού .
* Αν  , τότε βασικό ρόλο παίζει η διακρίνουσα Δ .

1ον Αν  , τότε η ανίσωση έχει δύο διαφορετικές ρίζες , που δίνονται από τον τύπο  , το δε πρόσημό της δίνεται από τον πίνακα

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |   |  |
|  | + | - | + |

 όταν , ή

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |   |  |
|  | - | + | - |

 όταν .

2ον Αν  , τότε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα , που δίνεται από τον τύπο  , το δε πρόσημό της δίνεται από τον πίνακα

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  ρ |  |
|  | + | + |

 όταν , ή

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  ρ |  |
|  | - | - |

 όταν .

3ον Αν  , τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες , το δε πρόσημό της δίνεται από τον πίνακα

|  |  |
| --- | --- |
|  |   |
|  | + |

 όταν  , ή

|  |  |
| --- | --- |
|  |   |
|  | - |

όταν  .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Δίνεται το πολυώνυμο  .

Ερώτηση : Πότε το  έχει μοναδική ρίζα ;

Απάντηση : Πρέπει το  να είναι πρώτου βαθμού , δηλαδή πρέπει να ισχύει  .

 Ερώτηση : Πότε το  έχει μία διπλή ρίζα ;

Απάντηση : Πρέπει να ισχύει  .

Ερώτηση : Πότε το  έχει δύο διαφορετικές ρίζες ;

Απάντηση : Πρέπει να ισχύει 

Ερώτηση : Πότε το  έχει δύο ρίζες ;

Απάντηση : Πρέπει να ισχύει 