Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

Η διαδικασία με την οποία μία παράσταση, που είναι άθροισμα μετατρέπεται σε γινόμενο παράγοντων, λέγεται παραγοντοποίηση.

Οι πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης είναι οι εξής:

1) Κοινός παράγοντας

Αν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο με τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας.

Για παράδειγμα: Στην παράσταση $\alpha x-\alpha y+\alpha z$ όλοι οι όροι έχουν ως παράγοντα το α, οπότε με βάση την επιμεριστικη ιδιότητα, έχουμε: $\alpha x-\alpha y+\alpha z=\alpha(x-y+z)$

2) Ομαδοποίηση

Στην παράσταση $\alpha x+\alpha y+\beta x+\beta y$ δεν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους. Όμως αν από τους δύο πρώτους όρους βγάλουμε κοινό παράγοντα το α και από τους δύο τελευταίους το β η παράσταση γίνεται:

$\alpha(x+y)+\beta(x+y)$ και έτσι σχηματίζονται δύο καινούργιοι όροι με κοινό παράγοντα το $x+y$. Οπότε:

$$\boldsymbol{\alpha x+\alpha y+\beta x+\beta y=\alpha(x+y)+\beta(x+y)=(x+y)(\alpha+\beta)}$$

3) Διαφορά τετραγώνων

Αν εναλλάξουμε τα μέλη της ταυτότητας $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$ έχουμε:

$$\boldsymbol{\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}.$$

Σύμφωνα μ’ αυτή την ταυτότητα μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι διαφορά τετραγώνων.
Για παράδειγμα: $x^2-4=x^2-2^2=(x-2)(x+2)$.

4) Διαφορά - Άθροισμα κύβων

Αν εναλλάξουμε τα μέλη των ταυτοτήτων
$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$ και $(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3$

έχουμε: $\boldsymbol{\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}$ και $\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}$.

Σύμφωνα μ’ αυτές τις ταυτότητες, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι άθροισμα ή διαφορά κύβων. Για παράδειγμα: $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$ και $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+4)$.

5) Ανάπτυγμα τετραγώνου

Αν εναλλάξουμε τα μέλη των ταυτοτήτων:
$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ και $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ έχουμε:

$$\boldsymbol{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2} \text{ και } \boldsymbol{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}$$

Σύμφωνα μ' αυτές τις ταυτότητες μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι ανάπτυγμα τετραγώνου (τέλειο τετράγωνο). Οι παραστάσεις $(\alpha+\beta)^2$ και $(\alpha-\beta)^2$ είναι γινόμενα παραγόντων αφού $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$ και $(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)$.

Για παράδειγμα: $x^2+2x+1=x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2=(x+1)^2$ και
$x^2-4x+4=x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2=(x-2)^2$

στ) Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Είναι: $(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+\beta x+\alpha x+\alpha\beta=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$
Αν εναλλάξουμε τα μέλη της προηγούμενης ταυτότητας έχουμε

$$\boldsymbol{x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)}$$

Δηλαδή το τριώνυμο $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον προηγούμενο τύπο.
Για παράδειγμα: για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο x^2+5x+6 αναζητούμε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 5 και γινόμενο 6.
Τα ζευγάρια που έχουν γινόμενο 6 είναι $1\cdot 6$, $(-1)(-6)$, $2\cdot 3$, $-2(-3)$. Από τα ζευγάρια αυτά μόνο το ζεύγος των 2, 3 έχει άθροισμα 5. Άρα $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:**

α) $3\beta+3\beta$ β) $2x-8$ γ) $8\omega^2+6\omega$ δ) $-9x^2-6x$
ε) $8\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2$ στ) $2x^2-2xy+2x$ ζ) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha\beta$
η) $2\alpha^3-4\alpha^2+6\alpha^2\beta$ θ) $\sqrt{2}xy-\sqrt{18}y+\sqrt{8}y^2$

Λύση

α) $3\alpha+6\beta=3\cdot\alpha+3\cdot 2\beta=3(\alpha+2\beta)$

β) $2x-8=2x-2\cdot 4=2(x-4)$

γ) $8\omega^2+6\omega=2\omega(4\omega+3)$

δ) $-9x^2-6x=-3x(3x+2)$

ε) $8\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2=4\alpha\beta(2\alpha+\beta)$

στ) $2x^2-2xy+2x=2x(x-y+1)$

ζ) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha\beta=\alpha\beta(\alpha+\beta-1)$

η) $2\alpha^3-4\alpha^2+6\alpha^2\beta=2\alpha^2(\alpha-2+3\beta)$

θ) $\sqrt{2}xy-\sqrt{18}y+\sqrt{8}y^2=\sqrt{2}y\left(x-\sqrt{9}+\sqrt{4}y\right)=\sqrt{2}y\left(x-3+2y\right)$

2. **Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:**

α) $x(\alpha-\beta)+y(\alpha-\beta)$ β) $\alpha(x+y)+\beta(x+y)$

γ) $(3x-1)(x-2)-(x+4)(x-2)$ δ) $\alpha^2(\alpha-2)-3(\alpha-2)$

ε) $4x(x-1)-x+1$ στ) $2x^2(x-3)-6x(x-3)^2$

Λύση

α) $x(\alpha-\beta)+y(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(x+y)$

β) $\alpha(x+y)+\beta(x+y)=(x+y)(\alpha+\beta)$

γ) $(3x-1)(x-2)-(x+4)(x-2)=(x-2)\left[(3x-1)-(x+4)\right]=$

$=(x-2)(3x-1-x-4)=(x-2)(2x-5)$

δ) $\alpha^2(\alpha-2)-3(2-\alpha)=\alpha^2(\alpha-2)-3\left[-(\alpha-2)\right]=\alpha^2(\alpha-2)+3(\alpha-2)=(\alpha-2)(\alpha^2+3)$

ε) $4x(x-1)-x+1=4x(x-1)-(x-1)=(x-1)(4x-1)$

στ) $2x^2(x-3)-6x(x-3)^2=2x(x-3)\left[x-3(x-3)\right]=2x(x-3)(x-3x+9)=2x(x-3)(9-2x)$

3. i) **Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:**

α) x^2+x β) $2y^2-5y$ γ) $\omega(\omega-3)-2(3-\omega)$ δ) $\alpha(3\alpha+1)-4\alpha$

ii) **Να επιλύσετε τις εξισώσεις:**

α) $x^2+x=0$ β) $2y^2=5y$ γ) $\omega(\omega-3)-2(3-\omega)=0$ δ) $\alpha(3\alpha+1)=4\alpha$

Λύση

i) α) $x^2+x=x(x+1)$

β) $2y^2-5y=y(2y-5)$

γ) $\omega(\omega-3)-2(3-\omega)=\omega(\omega-3)+2(\omega-3)=(\omega-3)(\omega+2)$

δ) $\alpha(3\alpha+1)-4\alpha=\alpha\left[(3\alpha+1)-4\right]=\alpha(3\alpha+1-4)=\alpha(3\alpha-3)=\alpha\cdot3\cdot(\alpha-1)=3\alpha(\alpha-1)$

ii) α) $x^2+x=0$ ή $x(x+1)=0$ άρα $x=0$ ή $x+1=0$ δηλαδή $x=0$ ή $x=-1$

β) Είναι $2y^2=5y$ ή $2y^2-5y=0$ ή $y(2y-5)=0$ άρα $y=0$ ή $2y-5=0$

δηλαδή $y=0$ ή $2y=5$

άρα $y=0$ ή $y=\frac{5}{2}$

γ) Εχουμε $\omega(\omega-3)-2(3-\omega)=0$ ή $\omega(\omega-3)+2(\omega-3)=0$ ή $(\omega-3)(\omega+2)=0$ άρα

$\omega-3=0$ δηλαδή $\omega=3$ ή $\omega+2=0$ ή $\omega=-2$.

δ) Είναι $\alpha(3\alpha+1)=4\alpha$ ή $\alpha(3\alpha+1)-4\alpha=0$ και σύμφωνα με το (i) ερώτημα γίνεται

$3\alpha(\alpha-1)=0$ άρα $\alpha=0$ ή $\alpha-1=0$ δηλαδή $\alpha=1$

4. **Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:**

α) $x^2+xy+\alpha x+\alpha y$ β) x^3-x^2+x-1 γ) $x^3-5x^2+4x-20$

δ) $2x^3-3x^2+4x-6$ ε) $4x^2-8x-\alpha x+2\alpha$ στ) $9\alpha\beta-18\beta^2+10\beta-5$

ζ) $12x^2-8xy-15x+10y$ η) $x^3+\sqrt{2}x^2+x+\sqrt{2}$ θ) $\sqrt{6}x^2+2\sqrt{2}x-\sqrt{3}x-2$

Λύση

α) $x^2+xy+\alpha x+\alpha y=x(x+y)+\alpha(x+y)=(x+y)(x+\alpha)$

β) $x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+1)$

γ) $x^3-5x^2+4x-20=x^2(x-5)+4(x-5)=(x-5)(x^2+4)$

δ) $2x^3-3x^2+4x-6=x^2(2x-3)+2(2x-3)=(2x-3)(x^2+2)$

ε) $4x^2-8x-\alpha x+2\alpha=4x(x-2)-\alpha(x-2)=(x-2)(4x-\alpha)$

στ) $9\alpha\beta-18\beta^2+10\beta-5\alpha=9\beta(\alpha-2\beta)+5(2\beta-\alpha)=$
$9\beta(\alpha-2\beta)-5(\alpha-2\beta)=(\alpha-2\beta)(9\beta-5)$

ζ) $12x^2-8xy-15x+10y=4x(3x-2y)+5(-3x+2y)=$
$=4x(3x-2y)-5(3x-2y)=(3x-2y)(4x-5)$

η) $x^3+\sqrt{2}x^2+x+\sqrt{2}=x^3+x+\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}=x(x^2+1)+\sqrt{2}(x^2+1)=(x^2+1)(x+\sqrt{2})$

θ) $\sqrt{6}x^2+2\sqrt{2}x-\sqrt{3}x-2=\sqrt{3}\sqrt{2}x^2-\sqrt{3}x+2\sqrt{2}x-2=$
$\sqrt{3}x(\sqrt{2}x-1)+2(\sqrt{2}x-1)=(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{3}x+2)$

5. **Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:**
α) $7\alpha^2+10\alpha\beta+3\beta^2$ β) $5x^2-8xy+3y^2$ γ) $3x^2-xy-2y^2$

Λύση

α) $7\alpha^2+10\alpha\beta+3\beta^2=7\alpha^2+7\alpha\beta+3\alpha\beta+3\beta^2=7\alpha(\alpha+\beta)+3\beta(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)(7\alpha+3\beta)$

β) $5x^2-8xy+3y^2=5x^2-5xy-3xy+3y^2=5x(x-y)-3y(x-y)=(x-y)(5x-3y)$

γ) $3x^2-xy-2y^2=3x^2-3xy+2xy-2y^2=3x(x-y)+2y(x-y)=(x-y)(3x+2y)$

6. **α) Να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων η παράσταση $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha-\beta$.**
β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει: $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha+\beta$, να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι.

Λύση

α) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha-\beta=\alpha\beta(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)(\alpha\beta-1)$

β) Είναι: $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha+\beta$
$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha-\beta=0$
$(\alpha+\beta)(\alpha\beta-1)=0$

Άρα $\alpha+\beta=0$ (1) ή $\alpha\beta-1=0$ άρα $\alpha\beta=1$ (2)

Από τη σχέση (1) οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι και από τη σχέση (2) είναι αντίστροφοι.

7. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2\alpha^2-2\alpha+\alpha\beta-\beta+\alpha x-x$ β) $2\alpha\beta-4\beta+5\alpha-10+2\alpha\gamma-4\gamma$

Λύση

α) $2\alpha^2-2\alpha+\alpha\beta-\beta+\alpha x-x=2\alpha(\alpha-1)+\beta(\alpha-1)+x(\alpha-1)=(\alpha-1)(2\alpha+\beta+x)$

β) $2\alpha\beta-4\beta+5\alpha-10+2\alpha\gamma-4\gamma=2\beta(\alpha-2)+5(\alpha-2)+2\gamma(\alpha-2)=$

$=(\alpha-2)(2\beta+5+2\gamma)$

8. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) x^2-9 β) $16x^2-1$ γ) $\alpha^2-9\beta^2$ δ) $\alpha^2\beta^2-4$

ε) $36\omega^2-(\omega+5)^2$ στ) $4(x+1)^2-9(x-2)^2$ ζ) $\frac{1}{x^2}-16$

η) x^2-3 θ) x^2-2y^2

Λύση

α) $x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$

β) $16x^2-1=(4x)^2-1^2=(4x+1)(4x-1)$

γ) $\alpha^2-9\beta^2=\alpha^2-(3\beta)^2=(\alpha+3\beta)(\alpha-3\beta)$

δ) $\alpha^2\beta^2-4=(\alpha\beta)^2-2^2=(\alpha\beta+2)(\alpha\beta-2)$

ε) $36\omega^2-(\omega+5)^2=(6\omega)^2-(\omega+5)^2=\left[6\omega+(\omega+5)\right]\cdot\left[6\omega-(\omega+5)\right]=$

$(6\omega+\omega+5)(6\omega-\omega-5)=(7\omega+5)(5\omega-5)=$

$(7\omega+5)5(\omega-1)=5(7\omega+5)(\omega-1)$

στ) $4(x+1)^2-9(x-2)^2=\left[2(x+1)\right]^2-\left[3(x-2)\right]^2=$

$\left[2(x+1)+3(x-2)\right]\left[2(x+1)-3(x-2)\right]=(2x+2+3x-6)(2x+2-3x+6)=$

$=(5x-4)(8-x)$

ζ) $\frac{1}{x^2}-16=\left(\frac{1}{x}\right)^2-4^2=\left(\frac{1}{x}+4\right)\left(\frac{1}{x}-4\right)$

η) $x^2-3=x^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$

θ) $x^2-2y^2=x^2-\sqrt{2}^2y^2=x^2-\left(\sqrt{2}y\right)^2=\left(x+\sqrt{2}y\right)\left(x-\sqrt{2}y\right)$

9. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2x^2-32$ β) $28-7y^2$ γ) $2x^3-2x$

δ) $5\alpha x^2-80\alpha$ ε) $2(x-1)^2-8$

Λύση

α) $2x^2-32=2(x^2-16)=2(x^2-4^2)=2(x-4)(x+4)$

β) $28-7y^2=7(4-y^2)=7(2^2-y^2)=7(2+y)(2-y)$

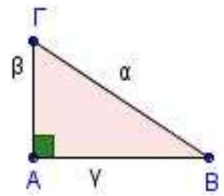
γ) $2x^3-2x=2x\left(x^2-1\right)=2x(x+1)(x-1)$

δ) $5\alpha x^2-80\alpha=5\alpha\left(x^2-16\right)=5\alpha\left(x^2-4^2\right)=5\alpha(x+4)(x-4)$

ε) $2(x-1)^2-8=2\left[(x-1)^2-4\right]=2\left[(x-1)^2-2^2\right]=2\left[(x-1)+2\right]\left[(x-1)-2\right]=$

$=2(x-1+2)(x-1-2)=2(x+1)(x-3)$

10. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος να υπολογιστεί η πλευρά γ, όταν:



α) $\alpha=53,\ \beta=28$

β) $\alpha=0{,}37,\ \beta=0{,}12$

γ) $\alpha=26\lambda,\ \beta=10\lambda$

Λύση

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$ ή $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

α) Αν $\alpha=53$ και $\beta=28$ τότε:

$\gamma^2=53^2-28^2=(53+28)(53-28)=81\cdot25=9^2\cdot5^2=(9\cdot5)^2=45^2$ άρα $\gamma=45$.

β) $\gamma^2=(0{,}37+0{,}12)(0{,}37-0{,}12)=0{,}49\cdot0{,}25=(0{,}7)^2(0{,}5)^2=$

$=(0{,}7\cdot0{,}5)^2=(0{,}35)^2$, άρα $\gamma=0{,}35$.

γ) $\gamma^2=(26\lambda+10\lambda)(26\lambda-10\lambda)=36\lambda\cdot16\lambda=6^2\cdot4^2\cdot\lambda^2=(6\cdot4\cdot\lambda)^2=(24\lambda)^2$,

άρα $\gamma=24\lambda$.

11. Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2-49=0$ β) $9x^3-4x=0$ γ) $x(x+1)^2=4x$ δ) $(x+2)^3=x+2$

Λύση

α) ***1ος τρόπος***

$x^2-49=0$ ή $x^2-7^2=0$ ή $(x+7)(x-7)=0$ άρα $x+7=0$ ή $x=-7$ ή $x-7=0$ ή $x=7$

2ος τρόπος

$x^2-49=0$ ή $x^2=49$ ή $x^2=7^2$ άρα $x=\pm7$

β) $9x^3-4x=0$ ή $x\left(9x^2-4\right)=0$ ή $x\left[(3x)^2-2^2\right]=0$ ή $x(3x+2)(3x-2)=0$ άρα

$x=0$ ή $3x+2=0$ ή $3x=-2$ άρα $x=-\dfrac{2}{3}$ ή $3x-2=0$ ή $3x=2$ άρα $x=\dfrac{2}{3}$

γ) $x(x+1)^2=4x$ ή $x(x+1)^2-4x=0$ ή $x\left[(x+1)^2-4\right]=0$ ή $x\left[(x+1)^2-2^2\right]=0$ ή

$x\left[(x+1)+2\right]\left[(x+1)-2\right]=0$ ή $x(x+1+2)(x+1-2)=0$ ή $x(x+3)(x-1)=0$ άρα

$x=0$ ή $x+3=0$ άρα $x=-3$ ή $x-1=0$ άρα $x=1$

δ) $(x+2)^3 = x+2$ ή $(x+2)^3-(x+2)=0$ ή $(x+2)\left[(x+2)^2-1\right]=0$ ή

$(x+2)\left[(x+2)^2-1^2\right]=0$ ή $(x+2)[(x+2)+1][(x+2)-1]=0$ ή

$(x+2)(x+2+1)(x+2-1)=0$ ή $(x+2)(x+3)(x+1)=0$ άρα

$x+2=0$ δηλαδή $x=-2$ ή $x+3=0$ άρα $x=-3$ ή $x+1=0$ ή $x=-1$

12. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) x^3-27 β) y^3+8 γ) ω^3+64 δ) $8x^3-1$ ε) $27y^3+1$

Λύση

α) $x^3-27=x^3-3^3=(x-3)(x^2+3x+3^2)=(x-3)(x^2+3x+9)$

β) $y^3+8=y^3+2^3=(y+2)(y^2-2y+2^2)=(y+2)(y^2-2y+4)$

γ) $\omega^3+64=\omega^3+4^3=(\omega+4)(\omega^2-4\omega+4^2)=(\omega+4)(\omega^2-4\omega+16)$

δ) $8x^3-1=(2x)^3-1^3=(2x-1)\left[(2x)^2+2x\cdot 1+1^2\right]=(2x-1)(4x^2+2x+1)$

ε) $27y^3+1=(3y)^3+1=(3y+1)\left[(3y)^2-3y\cdot 1+1^2\right]=(3y+1)(9y^2-3y+1)$

13. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3x^3-24$ β) $16\alpha^4+2\alpha$ γ) $\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{4}{3}\pi\rho^3$ δ) $\alpha^4\beta+\alpha\beta^4$

Λύση

α) $3x^3-24=3(x^3-8)=3(x^3-2^3)=3(x-2)(x^2+2x+2^2)=3(x-2)(x^2+2x+4)$

β) $16\alpha^4+2\alpha=2\alpha(8\alpha^3+1)=2\alpha\left[(2\alpha)^3+1^3\right]=2\alpha(2\alpha+1)\left[(2\alpha)^2-2\alpha\cdot 1+1^2\right]=$

$=2\alpha(2\alpha+1)(4\alpha^2-2\alpha+1)$

γ) $\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{4}{3}\pi\rho^3=\frac{4}{3}\pi(R^3-\rho^3)=\frac{4}{3}\pi(R-\rho)(R^2+R\rho+\rho^2)$

δ) $\alpha^4\beta+\alpha\beta^4=\alpha\beta(\alpha^3+\beta^3)=\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

14. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $x^3-.....=(x-3)(.....+.....+9)$ β) $.....+y^3=(2x+y)(4x^2-.....+.....)$

γ) $\alpha^3-.....=(\alpha-2\beta)(.....+.....+4\beta^2)$ δ) $\alpha^3+.....=(\alpha+5\beta)(.....-.....+25\beta^2)$

Λύση

α) $\underset{\alpha^3}{x^3}-\underset{\beta^3}{.....}=(\underset{\alpha}{x}-\underset{\beta}{3})(\underset{\alpha^2}{.....}+\underset{\alpha\beta}{.....}+\underset{\beta^2}{9})$

Πρόκειται για εφαρμογή της ταυτότητας του $\alpha^3-\beta^3$ με $\alpha=x$ και $\beta=3$.
Τότε $\beta^3=3^3=27$, $\alpha^2=x^2$ και $\alpha\beta=3x$. Είναι: $x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$

β) $.....+y^3=(2x+y)(4x^2-.....+.....)$

Πρόκειται για εφαρμογή της ταυτότητας του $\alpha^3+\beta^3$ με $\alpha=2x$ και $\beta=y$. Τότε $\alpha^3=(2x)^3=8x^3$, $\alpha\beta=2xy$ και $\beta^2=y^2$. Είναι: $8x^3+y^3=(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$

γ) $\alpha^3-.....=(\alpha-2\beta)(.....+......+4\beta^2)$

Πρόκειται για εφαρμογή της ταυτότητας του A^3-B^3 με $A=\alpha$ και $B=2\beta$. Τότε $B^3=(2\beta)^2=8\beta^3$, $A^2=\alpha^2$ και $AB=2\beta\alpha$. Είναι: $\alpha^3-8\beta^3=(\alpha-2\beta)(\alpha^2+2\beta\alpha+4\beta^2)$

δ) $\alpha^3+.....=(\alpha+5\beta)(.....-.....+25\beta^2)$

Πρόκειται για εφαρμογή της ταυτότητας του A^3+B^3 με $A=\alpha$ και $B=5\beta$. Τότε $B^3=(5\beta)^3=125\beta^3$, $A^2=\alpha^2$ και $AB=\alpha\cdot5\beta=5\alpha\beta$.
Είναι $\alpha^3+125\beta^3=(\alpha+5\beta)(\alpha^2-5\alpha\beta+25\beta^2)$

15. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) x^2+2x+1 **β)** y^2+4y+4 **γ)** $\omega^2-6\omega+9$ **δ)** $\alpha^2+10\alpha+25$

ε) $1-4\beta+4\beta^2$ **στ)** $9x^4+6x^2+1$ **ζ)** $4y^2-12y+9$ **η)** $16x^2+8xy+y^2$

θ) $25\alpha^2-10\alpha\beta+\beta^2$ **ι)** $(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)+1$

ια) $\dfrac{y^2}{9}-2y+9$ **ιβ)** $x^2+x+\dfrac{1}{4}$

Λύση

α) $x^2+2x+1=x^2+2x\cdot1+1^2=(x+1)^2$

β) $y^2+4y+4=y^2+2y\cdot2+2^2=(y+2)^2$

γ) $\omega^2-6\omega+9=\omega^2-2\omega\cdot3+3^2=(\omega-3)^2$

δ) $\alpha^2+10\alpha+25=\alpha^2+2\alpha\cdot5+5^2=(\alpha+5)^2$

ε) $1-4\beta+4\beta^2=1^2-2\cdot1\cdot2\beta+(2\beta)^2=(1-2\beta)^2$

στ) $9x^4+6x^2+1=(3x^2)^2+2(3x^2)\cdot1+1^2=(3x^2+1)^2$

ζ) $4y^2-12y+9=(2y)^2-2(2y)\cdot3+3^2=(2y-3)^2$

η) $16x^2+8xy+y^2=(4x)^2+2\cdot(4x)\cdot y+y^2=(4x+y)^2$

θ) $25\alpha^2-10\alpha\beta+\beta^2=(5\alpha)^2-2\cdot(5\alpha)\cdot\beta+\beta^2=(5\alpha-\beta)^2$

ι) $(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)+1=(\alpha+\beta)^2-2\cdot(\alpha+\beta)\cdot1+1^2=(\alpha+\beta-1)^2$

ια) $\dfrac{y^2}{9}-2y+9=\left(\dfrac{y}{3}\right)^2-2\cdot\dfrac{y}{3}\cdot3+3^2=\left(\dfrac{y}{3}-3\right)^2$

ιβ) $x^2+x+\dfrac{1}{4}=x^2+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$

16. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3x^2+24x+48$ **β)** $-y^2+4y-4$ **γ)** $2\alpha^2-8\alpha\beta+8\beta^2$ **δ)** $4\alpha^3+12\alpha^2+9\alpha$

Λύση

α) $3x^2+24x+48=3\left(x^2+8x+16\right)=3\left(x^2+2\cdot x\cdot 4+4^2\right)=3(x+4)^2$

β) $-y^2+4y-4=-\left(y^2-4y+4\right)=-\left(y^2-2\cdot y\cdot 2+2^2\right)=-(y-2)^2$

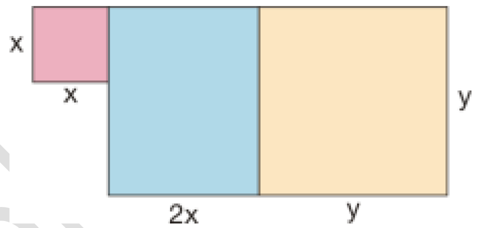
γ) $2\alpha^2-8\alpha\beta+8\beta^2=2\left(\alpha^2-4\alpha\beta+4\beta^2\right)=2\left[\alpha^2-2\alpha(2\beta)+(2\beta)^2\right]=2(\alpha-2\beta)^2$

δ) $4\alpha^3+12\alpha^2+9\alpha=\alpha\left(4\alpha^2+12\alpha+9\right)=\alpha\left[(2\alpha)^2+2(2\alpha)3+3^2\right]=\alpha(2\alpha+3)^2$

17. Να βρείτε:

α) Ενα πολυώνυμο που να εκφράζει το εμβαδόν του διπλανού σχήματος.

β) Η πλευρά ενός τετραγώνου που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του διπλανού σχήματος.



α) Το σχήμα αποτελείται από ένα τετράγωνο πλευράς x, από ένα ορθογώνιο με διαστάσεις 2x και y και από ένα τετράγωνο πλευράς y.

Είναι: $E_x=x^2$, $E_{\text{ορθ.}}=2xy$ και $E_y=y^2$

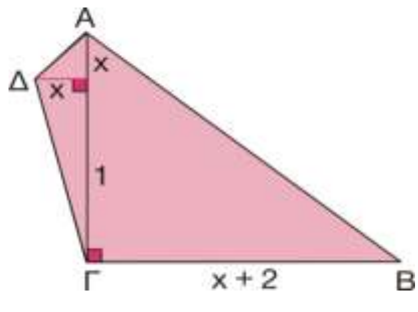
Οπότε το συνολικό εμβαδόν είναι: $E=x^2+2xy+y^2$

β) Εστω α η πλευρά του τετραγώνου που έχει εμβαδόν $E=x^2+2xy+y^2$ τότε

$\alpha^2=x^2+2xy+y^2$

Είναι: $\alpha^2=x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ άρα $\alpha=x+y$

18. Να βρείτε την πλευρά ενός τετραγώνου, που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.



Λύση

Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ΑΔΓ και ΑΒΓ.

Το τρίγωνο ΑΔΓ, με βάση την $ΑΓ=x+1$, έχει ύψος το $ΔΕ=x$ και εμβαδόν: $(ΑΔΓ)=\dfrac{ΑΓ\cdot ΔΕ}{2}=\dfrac{(x+1)x}{2}$

Το τρίγωνο ΑΒΓ, με βάση την $ΒΓ=x+2$, έχει ύψος το $ΑΓ=x+1$ και εμβαδόν

$(ΑΒΓ)=\dfrac{ΒΓ\cdot ΑΓ}{2}=\dfrac{(x+2)(x+1)}{2}$

Είναι: $(ΑΒΓΔ)=\dfrac{(x+1)x}{2}+\dfrac{(x+2)(x+1)}{2}=\dfrac{(x+1)x+(x+2)(x+1)}{2}=$

$=\dfrac{(x+1)(x+(x+2))}{2}=\dfrac{(x+1)(x+x+2)}{2}=\dfrac{(x+1)(2x+2)}{2}=\dfrac{(x+1)2(x+1)}{2}=(x+1)^2$

Αν το ζητούμενο τετράγωνο έχει πλευρά ίση με α, τότε το εμβαδόν του είναι: $E=\alpha^2$.
Όμως $E=(ΑΒΓΔ)$ ή $\alpha^2=(x+1)^2$ οπότε $\alpha=x+1$.

19. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) x^2+3x+2 **β)** y^2-4y+3 **γ)** $\omega^2+5\omega+6$ **δ)** a^2+6a+5

ε) $x^2-7x+12$ **στ)** y^2-y-12 **ζ)** $\omega^2-9\omega+18$ **η)** $a^2+3a-10$

Λύση

α) 1ος τρόπος

Είναι $x^2+3x+2=(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$, άρα $\alpha+\beta=3$ και $\alpha\beta=2$. Οι αριθμοί α,β που έχουν άθροισμα 3 και γινόμενο 2 είναι το 1 και το 2, άρα $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$.

2ος τρόπος

$x^2+3x+2=x^2+x+2x+2=x(x+1)+2(x+1)=(x+1)(x+2)$

β) Είναι $y^2-4y+3=(y+\alpha)(y+\beta)$ με $\alpha+\beta=-4$ και $\alpha\beta=3$. Οι αριθμοί α,β που έχουν άθροισμα -4 και γινόμενο 3 είναι το -1 και το -3, άρα $\alpha=-1$ και $\beta=-3$ ή το αντίθετο. Οπότε $y^2-4y+3=(y-1)(y-3)$.

2ος τρόπος

$y^2-4y+3=y^2-y-3y+3=y(y-1)-3(y-1)=(y-1)(y-3)$

γ) $\omega^2+5\omega+6=(\omega+\alpha)(\omega+\beta)=\omega^2+(\alpha+\beta)\omega+\alpha\beta$.

Είναι $\alpha+\beta=5$ και $\alpha\beta=6$, άρα $\alpha=3$ και $\beta=2$, οπότε $\omega^2+5\omega+6=(\omega+2)(\omega+3)$

2ος τρόπος

$\omega^2+5\omega+6=\omega^2+2\omega+3\omega+6=\omega(\omega+2)+3(\omega+2)=(\omega+2)(\omega+3)$

δ) $\alpha^2+6\alpha+5=(\alpha+\kappa)(\alpha+\lambda)$ με $\kappa+\lambda=6$ και $\kappa\lambda=5$. Οι αριθμοί που έχουν άθροισμα 6 και γινόμενο 5 είναι το 1 και το 5, άρα $\kappa=1$ και $\lambda=5$, οπότε $\alpha^2+6\alpha+5=(\alpha+1)(\alpha+5)$.

2ος τρόπος

$\alpha^2+6\alpha+5=\alpha^2+\alpha+5\alpha+5=\alpha(\alpha+1)+5(\alpha+1)=(\alpha+1)(\alpha+5)$

ε) $x^2-7x+12=(x+\alpha)(x+\beta)$ με $\alpha+\beta=-7$ και $\alpha\beta=12$. Οι αριθμοί που έχουν άθροισμα -7 και γινόμενο 12 είναι το -3 και το -4, άρα $\alpha=-3$ και $\beta=-4$, οπότε $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$

στ) $y^2-y-12=(y+\alpha)(y+\beta)$ με $\alpha+\beta=-1$ και $\alpha\beta=-12$. Οι αριθμοί που έχουν άθροισμα -1 και γινόμενο -12 είναι το -4 και το 3, άρα $\alpha=-4$ και $\beta=3$, οπότε $y^2-y-12=(y-4)(y+3)$

ζ) $\omega^2-9\omega+18=(\omega+\alpha)(\omega+\beta)$ με $\alpha+\beta=-9$ και $\alpha\beta=18$. Οι αριθμοί που έχουν άθροισμα -9 και γινόμενο 18 είναι το -6 και το -3, άρα: $\omega^2-9\omega+18=(\omega-6)(\omega-3)$

η) $\alpha^2+3\alpha-10=(\alpha+\kappa)(\alpha+\lambda)$ με $\kappa+\lambda=3$ και $\kappa\lambda=-10$.

Οι αριθμοί που έχουν άθροισμα 3 και γινόμενο -10 είναι το 5 και το -2, άρα $\kappa=5$ και $\lambda=-2$, οπότε $\alpha^2+3\alpha-10=(\alpha+5)(\alpha-2)$.

20. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2+\left(2+\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{3}$ **β)** $x^2+(2\alpha+3\beta)x+6\alpha\beta$ **στ)** $x^2+\left(3-\sqrt{2}\right)x-3\sqrt{2}$

Λύση

α) $x^2+\left(2+\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{3}=x^2+2x+\sqrt{3}x+2\sqrt{3}=x(x+2)+\sqrt{3}(x+2)=(x+2)\left(x+\sqrt{3}\right)$

β) $x^2+(2\alpha+3\beta)x+6\alpha\beta=x^2+2\alpha x+3\beta x+6\alpha\beta=x(x+2\alpha)+3\beta(x+2\alpha)=(x+2\alpha)(x+3\beta)$

γ) $x^2+\left(3-\sqrt{2}\right)x-3\sqrt{2}=x^2+3x-\sqrt{2}x-3\sqrt{2}=x\left(x-\sqrt{2}\right)+3\left(x-\sqrt{2}\right)=\left(x-\sqrt{2}\right)(x+3)$

21. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2\omega^2+10\omega+8$ **β)** $3\alpha^2-12\alpha-15$ **γ)** $\alpha x^2-7\alpha x+6\alpha$

Λύση

α) $2\omega^2+10\omega+8=2\left(\omega^2+5\omega+4\right)$

Είναι $\omega^2+5\omega+4=(\omega+\alpha)(\omega+\beta)$ με $\alpha+\beta=5$ και $\alpha\beta=4$.

Με δοκιμές βρίσκουμε ότι $\alpha=1$ και $\beta=4$, οπότε:

$\omega^2+5\omega+4=(\omega+1)(\omega+4)$ και $2\omega^2+10\omega+8=2(\omega+1)(\omega+4)$

β) $3\alpha^2-12\alpha-15=3\left(\alpha^2-4\alpha-5\right)$

Είναι $\alpha^2-4\alpha-5=(\alpha+\kappa)(\alpha+\lambda)$ με $\kappa+\lambda=-4$ και $\kappa\lambda=-5$.

Με δοκιμές βρίσκουμε ότι $\kappa=-5$ και $\lambda=1$, οπότε $\alpha^2-4\alpha-5=(\alpha-5)(\alpha+1)$ και

$3\alpha^2-12\alpha-15=3(\alpha-5)(\alpha+1)$

γ) $\alpha x^2-7\alpha x+6\alpha=\alpha\left(x^2-7x+6\right)$

Είναι $x^2-7x+6=(x+\kappa)(x+\lambda)$ με $\kappa+\lambda=-7$ και $\kappa\lambda=6$.

Με δοκιμή βρίσκουμε ότι $\kappa=-1$ και $\lambda=-6$. Άρα $x^2-7x+6=(x-1)(x-6)$ και

$\alpha x^2-7\alpha x+6\alpha=\alpha(x-1)(x-6)$.

22. Να υπολογίσετε τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις χωρίς τη χρήση υπολογιστή τσέπης.

α) $1453\cdot1821-1453\cdot821$ **β)** $801^2+199\cdot801$ **γ)** 998^2-4

δ) $999\cdot1001+1$ **ε)** $999^2+2\cdot999+1$ **στ)** $97^2+6\cdot97+9$

Λύση

α) $1453 \cdot 1821 - 1453 \cdot 821 = 1453(1821 - 821) = 1453 \cdot 1000 = 1.453.000$

β) $801^2 + 199 \cdot 801 = 801(801 + 199) = 801 \cdot 1000 = 801.000$

γ) $998^2 - 4 = 998^2 - 2^2 = (998 + 2)(998 - 2) = 1000 \cdot 996 = 996.000$

δ) $999 \cdot 1001 + 1 = (1000 - 1)(1000 + 1) + 1 = 1000^2 - 1^2 + 1 = 1000^2 - 1 + 1 =$
$= 1000^2 = 1.000.000$

ε) $999^2 + 2 \cdot 999 + 1 = 999^2 + 2 \cdot 999 \cdot 1 + 1^2 = (999 + 1)^2 = 1000^2 = 1.000.000$

στ) $97^2 + 6 \cdot 97 + 9 = 972 + 2 \cdot 97 \cdot 3 + 3^2 = (97 + 3)^2 = 100^2 = 10.000$

23. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2y^2 - 4y^2 - x^2 + 4$ β) $x^4 - 1 + x^3 - x$ γ) $x^3(x^2 - 1) + 1 - x^2$

δ) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2$ ε) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha + \beta$ στ) $x^2 - 2xy + y^2 - \omega^2$

ζ) $1 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2$ η) $y^2 - x^2 - 10y + 25$

θ) $2(x - 1)(x^2 - 4) - 5(x - 1)(x - 2)^2$ ι) $(y^2 - 4)^2 - (y + 2)^2$

κ) $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2$ λ) $(x^2 + 9)(\alpha^2 + 4) - (\alpha x + 6)^2$

Λύση

α) $x^2y^2 - 4y^2 - x^2 + 4 = x^2(y^2 - 1) + 4(-y^2 + 1) = x^2(y^2 - 1) - 4(y^2 - 1) =$
$= (y^2 - 1)(x^2 - 4) = (y^2 - 1^2)(x^2 - 2^2) = (y + 1)(y - 1)(x + 2)(x - 2)$

β) $x^4 - 1 + x^3 - x = (x^2)^2 - 1^2 + x(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) + x(x^2 - 1) =$
$= (x^2 - 1)(x^2 + 1 + x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$

γ) $x^3(x^2 - 1) + 1 - x^2 = x^3(x^2 - 1) + (1 - x^2) = x^3(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^3 - 1) =$
$= (x + 1)(x - 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) = (x + 1)(x - 1)^2(x^2 + x + 1)$

δ) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2 = (x^2 + 9)^2 - (6x)^2 = (x^2 + 9 + 6x)(x^2 + 9 - 6x) =$
$= (x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2)(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) = (x + 3)^2(x - 3)^2$

ε) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha + \beta = (\alpha - \beta)^2 - (\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta - 1)$

στ) $x^2 - 2xy + y^2 - \omega^2 = (x - y)^2 - \omega^2 = (x - y + \omega)(x - y - \omega)$

ζ) $1-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2=1-\left(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\right)=1^2-\left(\alpha-\beta\right)^2=$

$$=\left[1+\left(\alpha-\beta\right)\right]\left[1-\left(\alpha-\beta\right)\right]=\left(1+\alpha-\beta\right)\left(1-\alpha+\beta\right)$$

η) $y^2-x^2-10y+25=y^2-2\cdot y\cdot 5+5^2-x^2=\left(y-5\right)^2-x^2=\left(y-5+x\right)\left(y-5-x\right)$

θ) $2\left(x-1\right)\left(x^2-4\right)-5\left(x-1\right)\left(x-2\right)^2=2\left(x-1\right)\left(x^2-2^2\right)-5\left(x-1\right)\left(x-2\right)^2=$

$2\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x+2\right)-5\left(x-1\right)\left(x-2\right)^2=\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left[2\left(x+2\right)-5\left(x-2\right)\right]=$

$\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(2x+4-5x+10\right)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(14-3x\right)$

ι) $\left(y^2-4\right)^2-\left(y+2\right)^2=\left(y^2-2^2\right)^2-\left(y+2\right)^2=\left[\left(y+2\right)\left(y-2\right)\right]^2-\left(y+2\right)^2=$

$\left(y+2\right)^2\left(y-2\right)^2-\left(y+2\right)^2=\left(y+2\right)^2\left[\left(y-2\right)^2-1\right]=$

$\left(y+2\right)^2\left[\left(y-2\right)^2-1^2\right]=\left(y+2\right)^2\left(y-2+1\right)\left(y-2-1\right)=$

$\left(y+2\right)^2\left(y-1\right)\left(y-3\right)$

κ) $\left(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2\right)^2-4\alpha^2\beta^2=\left(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2\right)^2-\left(2\alpha\beta\right)^2=$

$=\left(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta\right)\left(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-2\alpha\beta\right)=$

$=\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2\right)\left(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2\right)=$

$=\left[\left(\alpha+\beta\right)^2-\gamma^2\right]\left[\left(\alpha-\beta\right)^2-\gamma^2\right]=$

$=\left(\alpha+\beta+\gamma\right)\left(\alpha+\beta-\gamma\right)\left(\alpha-\beta+\gamma\right)\left(\alpha-\beta-\gamma\right)$

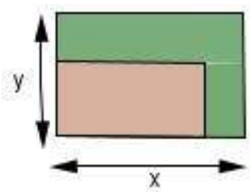
λ) $\left(x^2+9\right)\left(\alpha^2+4\right)-\left(\alpha x+6\right)^2=\alpha^2x^2+4x^2+9\alpha^2+36-\left(\alpha^2x^2+12\alpha x+36\right)=$

$\alpha^2x^2+4x^2+9\alpha^2+36-\alpha^2x^2-12\alpha x-36=$

$4x^2+9\alpha^2-12\alpha x=\left(2x\right)^2-2\left(2x\right)\left(3\alpha\right)+\left(3\alpha\right)^2=$

$\left(2x-3\alpha\right)^2$

24. Ενός ορθογωνίου οικοπέδου οι διαστάσεις x, y μειώθηκαν, επειδή έπρεπε να αυξηθεί το πλάτος των διπλανών δρόμων. Αν το εμβαδόν του οικοπέδου που απέμεινε είναι $xy-x-2y+2$, να βρείτε ποια θα μπορούσε να είναι η μείωση κάθε διάστασής του.



Λύση

Εστω E_1 το εμβαδόν του ορθογωνίου που απέμεινε, τότε:

$E_1=xy-x-2y+2=x\left(y-1\right)+2\left(-y+1\right)=x\left(y-1\right)-2\left(y-1\right)=\left(y-1\right)\left(x-2\right)$

Αν το πλάτος μειώθηκε κατά α και το μήκος κατά β, τότε το ορθογώνιο που απέμεινε έχει διαστάσεις $y-\alpha$ και $x-\beta$ και εμβαδόν $E_1=\left(y-\alpha\right)\left(x-\beta\right)$.

Όμως $E_1=\left(y-1\right)\left(x-2\right)$. Οπότε $\alpha=1$ και $\beta=2$. Δηλαδή το πλάτος θα μπορούσε να μειωθεί κατά 1 και το μήκος κατά 2.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

25. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α) $3x-12=3(\ldots\ldots-\ldots\ldots)$ β) $x^4+x=x(\ldots\ldots+\ldots\ldots)$ γ) $3\alpha\beta-\beta^3=\beta(\ldots\ldots\cdots\ldots\ldots)$

α) $x^2-4=(\ldots\ldots+\ldots\ldots)(\ldots\ldots-\ldots\ldots)$ β) $\ldots\ldots^2-\ldots\ldots^2=\left(\frac{1}{\alpha}+\ldots\ldots\right)(\ldots\ldots-\alpha)$

26. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α) $\alpha x-\alpha y+\beta x-\beta y=\alpha(\ldots\ldots-\ldots\ldots)+\beta(\ldots\ldots-\ldots\ldots)=(x-y)(\ldots\ldots+\ldots\ldots)$

β) $2x^3-10x^2+5-x=2x^2(\ldots\ldots-\ldots\ldots)-(\ldots\ldots-\ldots\ldots)=(\ldots\ldots-\ldots\ldots)(2x^2-1)$

γ) $x^2-y^2+x-y=(x-y)(\ldots\ldots+\ldots\ldots)+(\ldots\ldots-\ldots\ldots)=(x-y)(\ldots\ldots+\ldots\ldots-\ldots\ldots)$

27. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α) $x^2-8x+16=(\ldots\ldots\ldots)^2$ β) $25x^2+40x+16=(\ldots\ldots\ldots)^2$

γ) $x^4-2x^2y+y^2=(\ldots\ldots\ldots)^2$ δ) $2x^2-20x+50=2(\ldots\ldots\ldots)^2$

28. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α) $x^2+7x+10=x^2+\ldots\ldots+\ldots\ldots+10=x(x+5)+2(x+5)=(\ldots\ldots+\ldots\ldots)(\ldots\ldots+\ldots\ldots)$

β) $x^2-3x-10=x^2-\ldots\ldots+\ldots\ldots-10=x(x-5)+2(x-5)=(\ldots\ldots-\ldots\ldots)(\ldots\ldots+\ldots\ldots)$

29. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x(x+3)+7(x+3)$ β) $\alpha(x^2+1)+2\beta(x^2+1)$

γ) $x(3\alpha-2\beta)+y(2\beta-3\alpha)$ δ) $\alpha(x-y)-(y-x)$

ε) $2(\alpha-\beta)^2+3(\alpha-\beta)$ στ) $(2x-3)(x-5)-(x+2)(x-5)$

ζ) $x^2(x-1)-2(1-x)$ η) $(x+2)^3-(x+2)^2$

30. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $4-x^2$ β) $9\beta^2-25$ γ) x^2-225 δ) $4k^2-1$

ε) $100\alpha^2-64\beta^2$ στ) x^2-5 ζ) x^6-y^4 η) $\alpha^4-\beta^4$

31. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $(x+3)^2-16y^2$ β) $(3\alpha-2\beta)^2-4\beta^2$ γ) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2$

32. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $5x^3-5x$ β) $2x^4y^2-8x^2y^4$ γ) $5x^2-80$

δ) $\alpha^5\beta^4-\alpha$ ε) $2x^3-32x$ στ) x^3-9x

33. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $4x^2-4x+1$ β) $\alpha^2-2\alpha+1$ γ) $9\omega^2-6\omega+1$ δ) $9\alpha^2+30\alpha\beta+25\beta^2$

ε) $\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}$ στ) $(x^2+2)^2-2(x^2+2)+1$ ζ) $4x^2-4\sqrt{3}x+3$

34. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) x^3-8 β) $8x^3+27$ γ) $\alpha^3-(\beta-\gamma)^3$

δ) $\alpha^4\beta-\alpha\beta^4$ ε) x^6-y^6 στ) $x^2(x-1)^3-x^5$

35. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^{1821}-x^{1820}=0$ β) $3x^2+6x=0$ γ) $x(x^2-1)-2(x^2-1)=0$

δ) $2x(4x-1)=6x$ ε) $x(x-2)=3(2-x)$ στ) $x^2-25=0$

ζ) $8x^3-16x=0$ η) $(x+3)^2=x+3$ θ) $2x(x^2-1)=6x$

36. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\alpha x+\alpha y+\beta x+\beta y$ β) $x^2-y+xy-x$ γ) $\alpha^2-5\alpha+4\alpha-20$

δ) $\alpha x^2+\alpha y^2-\beta x^2-\beta y^2+\beta-\alpha$ ε) $2x^2-8xy+3xy^2-12y^3$ στ) $5x^8-15x^3+50x-20$

ζ) $(x-2)^4-2(x-2)^2-x+2$ η) $\alpha x-3\alpha+3\beta x-9\beta-5x+15$ θ) $5x^2-5-2\alpha x-2\alpha+\beta x+\beta$

37. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\alpha x^2-\alpha y^2+7x^2-7y^2$ β) $\alpha^2\beta^2-4\beta^2-\alpha^2+4$

γ) $(3-2x)(x+1)+(2x-3)(3x+2)+4x^2-9$ δ) $4\alpha-\alpha y-4\beta+2y+\beta y-8$

38. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x^3y^3-\omega^3y^3+x^3-\omega^3$ β) $\alpha^3+\alpha^2+2\alpha+8$ γ) $x^2-y^2-(x-y)^2$

δ) $x^3-1-2(x^2-1)-(x-1)^2$ ε) $\alpha^5+\alpha^2\beta^3-\alpha^4\beta-\alpha\beta^4$ στ) $(x-2)^3(x^2-9)-x^2+9$

39. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x^2+(\kappa+3)x+3\kappa$ β) x^2-7x+6 γ) x^2-3x+2 δ) x^2+7x+6

ε) x^2+2x-3 στ) x^2-x-2 ζ) $x^2-2x-15$ η) x^3-3x+2

θ) x^4-17x^2+16 ι) x^4-2x^2-8 κ) x^6+9x^3+8 ζ) x^6-26x^3-27

40. Να υπολογίσετε τις παρακάτω αριθμητικές τιμές χωρίς τη χρήση υπολογιστή τσέπης.

α) $283\cdot197-283\cdot97$ β) $850^2+850\cdot150$ γ) 870^2-130^2

δ) $880^2-2\cdot880\cdot120+120^2$ ε) $98^2+4\cdot98+4$ στ) $1002^2-6\cdot1002+8$

41. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $(x^2-4)^2-(x^2+1)(x-2)^2$ β) $(\alpha+2\beta)x^6-64(\alpha+2\beta)$ γ) $\alpha x(x^2-\alpha^2)+\alpha^3(x+\alpha)$

42. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^2(x^2-1)-10x(x^2-1)+25(x^2-1)=0$ β) $(x-4)^2-x^2+16=0$

γ) $(x-2)^3=x-2$ δ) $(2x+1)^2-x^2+2x-1=0$

ε) $x^2+y^2-6y+9=0$ στ) $x^2+4x+y^2+4y+8=0$

43. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x^2+4\alpha+y^2-\alpha^2-4+2xy$ β) $\alpha^3+2\alpha^2+\alpha+\alpha\beta+\beta$

γ) $(x-2y)^2-4y^2-4xy-x^2$

δ) $x^2-4x+4-\lambda x^2+5\lambda x-6\lambda$

44. Να βρείτε τους αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις: $9x^2-y^2=4$ και $3x+y=2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΞΕΧΩΡΙΖΟΥΝ

45. Να αποδείξετε ότι:
α)Το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού, είναι περιττός αριθμός.
β)Το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος αριθμός.
γ)Το γινόμενο δύο περιττών είναι περιττός αριθμός.
δ)Το άθροισμα τριών διαδοχικών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 6, αν ο πρώτος είναι περιττός.

46. Να αποδείξετε ότι:
α) Ο αριθμός $\kappa^2+\kappa$ είναι άρτιος, όπου κ ακέραιος αριθμός.
β) Ο αριθμός $\kappa^2+7\kappa$ είναι άρτιος, όπου κ ακέραιος αριθμός.
γ) Το τετράγωνο ενός περιττού ακέραιου, διαιρούμενο δια 8 δίνει υπόλοιπο 1.

47. Αν δύο ακέραιοι διαιρούμενοι με το 6 δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, να αποδειχθεί ότι η διαφορά των τετραγώνων τους είναι πολλαπλάσιο του 12.

48. α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά κύβων δύο διαδοχικών ακεραίων αν διαιρεθεί με το 6 δίνει υπόλοιπο 1.
β) Να αποδείξετε ότι η διαφορά τετραγώνων δύο περιττών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του 8.

49. Αν για τους μη μηδενικούς αριθμούς x, y ισχύει:
$x^3y-y^2=x^2-xy^3$, να αποδείξετε ότι είναι αντίστροφοι.

50. Αν $\alpha^2x^2+\beta^2x^2-3y^2=\alpha^2y^2+\beta^2y^2-3x^2$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι ίσοι ή αντίθετοι.

51. Αν για τους αριθμούς x, y ισχύει μια από τις παρακάτω ισότητες, να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί x, y είναι ίσοι ή αντίθετοι.
α) $x^4-2y^2=x^2(y^2-2)$ β) $x^3+y^3=x^2y+xy^2$

52. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης των ακεραίων α, β με το 5 είναι 3, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha^2+\beta^2+2007$ είναι πολλαπλάσιο του 5.
β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $3\alpha+4\beta$ με το 5.

53. Αν x, y θετικοί αριθμοί και α, β διαφορετικοί του μηδενός, για τους οποίους ισχύει:
$\alpha^2x+\alpha^2y+\beta^2x+\beta^2y+\alpha^2x^2+\beta^2x^2-\alpha^2y^2-\beta^2y^2=0$ να αποδείξετε ότι $y=x+1$.

54. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης των ακεραίων α, β με το 5 είναι 3, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha^2+\beta^2+2007$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $3\alpha+4\beta$ με το 5.

55. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$A=\left(x^2-4x+1\right)^2+6\left(x^2-4x\right)+15$ (θέτουμε $x^2-4x=y$)

$B=\left(x^2+x-2\right)^2+4\left(x^2+x-1\right)$ (θέτουμε $x^2+x=y$)

Στέλιος Μιχαήλογλου