

$$\beta^2 = \alpha\gamma$$



$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Α ΛΥΚΕΙΟΥ

$$\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$$

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \alpha < 0 \end{cases} \quad S_v = \frac{v}{2} [2\alpha_1 + (v-1)\omega]$$

$$z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$$

Μαθηματικό

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Τυπολόγιο

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$$

$$f'(x) = 0$$

$$||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$$

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Β ΛΥΚΕΙΟΥ

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$$

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

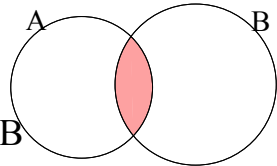


Μαθηματικό Τυπολόγιο



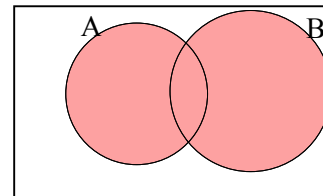
A Λυκείου

Σύνολα	• Σύνολο ονομάζουμε “κάθε συλλογή αντικειμένων , τα οποία προέρχονται από την εμπειρία μας ή από την νόησή μας , είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται με σαφήνεια το ένα από το άλλο ” . (Cantor) ♦ Βασικά σύνολα στα Μαθηματικά : $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: Σύνολο των φυσικών αριθμών . $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: Σύνολο των ακεραίων . $Q = \{x / x = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ με } \alpha, \beta \in Z, \beta \neq 0\}$: Σύνολο των ρητών $R = \{x / x \in Q \text{ ή } x : \text{άρρητος}\}$: Σύνολο των πραγματικών
Ίσα Σύνολα	• Ίσα σύνολα: λέγονται δύο σύνολα A και B όταν αυτά έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία και γράφουμε : $A=B$.
Υποσύνολα Συνόλου	• Υποσύνολο ενός συνόλου A λέγεται ένα σύνολο B , όταν κάθε στοιχείο του συνόλου B ανήκει στο A .
Το Κενό Σύνολο	• Κενό : λέγεται το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο (συμβολισμός : $\emptyset$ ή $\{\}$)
Ένωση Τομή Συμπλήρωμα	$A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ή } x \in B\}$ $A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \in B\}$ $A' = \{x \in \Omega / x \notin A\}$

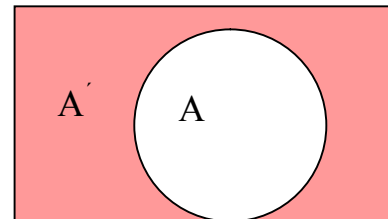
Δειγματικός Χώρος Ενδεχόμενα	■ Αιτιοκρατικό πείραμα ονομάζουμε κάθε πείραμα για το οποίο όταν ξέρουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιείται, μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα. ❖ Πείραμα τύχης ονομάζεται κάθε πείραμα το οποίο όσες φορές και να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες, δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα του. ■ Δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις ενός πειράματος τύχης λέγονται όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν κατά την εκτέλεση του πειράματος τύχης. ■ Δειγματικός Χώρος Ω (δ.χ) ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων που μπορούν να εμφανιστούν κατά την εκτέλεση του πειράματος. ❖ Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης δηλαδή κάθε ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δ.χ. και συμβολίζεται συνήθως με ένα κεφαλαίο γράμμα. ■ Απλό ή στοιχειώδες ενδεχόμενο ονομάζεται το ενδεχόμενο που έχει μόνο ένα στοιχείο του δ.χ. ■ Σύνθετο ενδεχόμενο ονομάζεται το ενδεχόμενο που περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία του δ.χ. ■ Βέβαιο ενδεχόμενο ονομάζεται ο δ.χ Ω γιατί πραγματοποιείται σε κάθε εκτέλεση του πειράματος ■ Αδύνατο ενδεχόμενο είναι το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος και συμβολίζεται με το κενό σύνολο $\emptyset$ ■ Πραγματοποιείται ή συμβαίνει ένα ενδεχόμενο όταν, το αποτέλεσμα του πειράματος είναι ένα από τα στοιχεία του ενδεχομένου. Γι' αυτό και τα στοιχεία του ενδεχομένου λέγονται και ευνοϊκές περιπτώσεις για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου. ❖
Πράξεις με ενδεχόμενα	♦ Το ενδεχόμενο $A \cap B$, που διαβάζεται "Α τομή Β" ή "Α και Β" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β 

Πράξεις με ενδεχόμενα

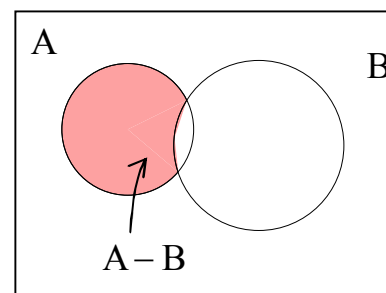
- Το ενδεχόμενο $A \cup B$, που διαβάζεται “Α ένωση Β” ή “Α ή Β” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.



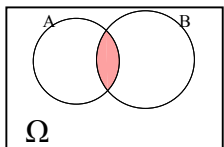
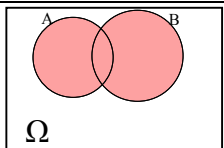
- Το ενδεχόμενο A' , που διαβάζεται “όχι Α” ή “συμπληρωματικό του Α” και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το Α. Το A' λέγεται και αντίθετο του “Α”.

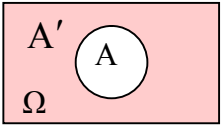
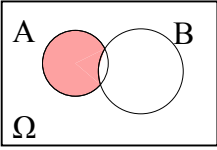
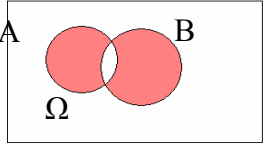
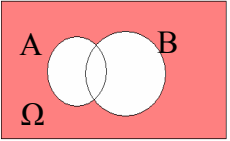
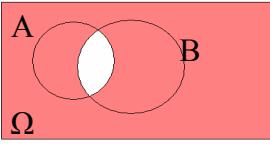
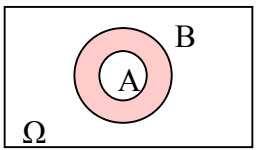


- Το ενδεχόμενο $A - B$, που διαβάζεται “διαφορά του Β από το Α” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β. Είναι $A - B = A \cap B'$



- ♦ **Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ή ξένα μεταξύ τους**
Δυο ενδεχόμενα Α, Β λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \emptyset$. Δεν έχουν κοινά στοιχεία

Ενδεχόμενο	Ονομασία	Σημασία	Διάγραμμα
Ω	Δειγματικός χώρος ή βέβαιο ενδεχόμενο	Περιέχει όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος	
$\emptyset$	Κενό σύνολο ή αδύνατο ενδεχόμενο	Δεν περιέχει κανένα αποτέλεσμα	
$A \cap B$	Τομή των Α και Β	Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα Α και Β	
$A \cup B$	Ένωση των Α, Β	Τουλάχιστον ένα από τα Α και Β πραγματοποιείται	

A'	Συμπλήρωμα ή αντίθετο του A	Δεν πραγματοποιείται το A	
$A-B$ ή $A \cap B'$	A εκτός του B	Πραγματοποιείται μόνο το A	
$(A-B) \cup (B-A)$	Ένωση των A εκτός B και B εκτός A	Μόνο ένα από τα A ή B πραγματοποιείται	
$(A \cup B)'$ ή $A' \cap B'$	Συμπλήρωμα της ένωσης του A και B	Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	
$A' \cup B'$ ή $(A \cap B)'$	Συμπλήρωμα της τομής των A και B	Δεν πραγματοποιείται το A ή δεν πραγματοποιείται το B	
$A \subseteq B$	A υποσύνολο του B	Όλα τα στοιχεία του A ανήκουν στο B	

**Κλασικός
Ορισμός
Πιθανότητας**

Έστω δειγματικός χώρος Ω που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και A ένα ενδεχόμενο του πειράματος. Ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

■ **Συνέπειες:**

Είναι

1. $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$ Δηλαδή το βέβαιο ενδεχόμενο (ο δ.χ.) έχει πιθανότητα ίση με 1

2. $P(\emptyset) = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$ Δηλαδή, το αδύνατο ενδεχόμενο έχει μηδενική πιθανότητα.

3. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

**Αξιοματικός
Ορισμός
Πιθανότητας**
Σχόλιο:

Ο κλασικός ορισμός πιθανότητας χρησιμοποιείται όταν τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος είναι ισοπίθανα.

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1$.

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.

Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \neq \emptyset$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \dots + P(\alpha_k)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\emptyset$ ορίζουμε τον αριθμό $P(\emptyset) = 0$.

**Κανόνες
Λογισμού
Πιθανοτήτων**

1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:
 $P(A') = 1 - P(A)$

3. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4. Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

5. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Δυνάμεις

♦ Ορισμοί:

Η δύναμη α^v ορίζεται ως εξής:

- Αν $v \geq 2$ τότε $\alpha^v = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \cdot \alpha}_v \text{ παράγοντες}$

- Αν $v=1$, $\alpha^1 = \alpha$

- Αν $v=0$, $\alpha^0 = 1$, $\alpha \neq 0$

$$\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}, \alpha \neq 0, v \geq 1$$

♦ Ιδιότητες:

$$1. \alpha^k \cdot \alpha^l = \alpha^{k+l} \quad 2. \frac{\alpha^k}{\alpha^l} = \alpha^{k-l} \quad 3. (\alpha^k)^l = \alpha^{kl}$$

$$4. \alpha^k \cdot \beta^k = (\alpha\beta)^k \quad 5. \frac{\alpha^k}{\beta^k} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k$$

Ταυτότητες

♦ Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.
ΟΙ ΣΠΟΥΔΑΙΟΤΕΡΕΣ ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

• Τετράγωνο Αθροίσματος

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \\ (\alpha + \beta + \gamma)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma \end{aligned}$$

Τετράγωνο Διαφοράς

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

• Κύβος Αθροίσματος

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

Διαφορά Τετραγώνων

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

• Κύβος Διαφοράς

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Διαφορά Κύβων

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

• Τριώνυμο

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$$

Αθροισμα Κύβων

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

- $\alpha^v - \beta^v = (\alpha - \beta)(\alpha^{v-1} + \alpha^{v-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{v-2} + \beta^{v-1})$, v θετικός ακέραιος

❖ Εφαρμογές Ταυτοτήτων

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$$

❖ Εφαρμογή Ταυτότητας Euler

$$\text{Αν } \alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ τότε } \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$$

Διάταξη Πραγματικών Αριθμών	Ορισμός: - Ο αριθμός α είναι μεγαλύτερος του αριθμού β και γράφουμε $\alpha > \beta$ όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός. Δηλαδή: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$. Ισχύουν: - Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τότε $\alpha + \beta > 0$. - Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ τότε $\alpha + \beta < 0$. - Αν α, β ομόσημοι τότε $\alpha\beta > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} > 0$. - Αν α, β ετερόσημοι τότε $\alpha\beta < 0$, $\frac{\alpha}{\beta} < 0$. - Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\alpha^2 \geq 0$ Βασικές Ιδιότητες Ανισοτήτων. - Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$. (Μεταβατική Ιδιότητα) - Αν $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$ για κάθε αριθμό γ. - Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$. - Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$. - Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$. - Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί τότε αν $\alpha > \beta, \gamma > \delta$ τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$ - Αν α, β θετικοί και n φυσικός $\neq 0$ $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$. - Αν μ, n φυσικοί με $\mu < n$ και $\alpha > 1$ τότε $\alpha^\mu < \alpha^n$. - Αν μ, n φυσικοί με $\mu < n$ και $0 < \alpha < 1$ τότε $\alpha^\mu > \alpha^n$. ❖ Προσοχή: Δεν μπορούμε να αφαιρούμε ανισότητες κατά μέλη. Δεν μπορούμε να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.
Απόλυτη Τιμή	• Ορισμός: Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α λέγεται ο ίδιος αριθμός α, αν είναι θετικός ή μηδέν και ο αντίθετός του αν είναι αρνητικός. Δηλαδή:

**Απόλυτη τιμή
πραγματικού
αριθμού**

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \alpha < 0 \end{cases}$$

Ιδιότητες Απόλυτων Τιμών

1. $|\alpha| \geq 0$

2. $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$

3. $|\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha = \pm \beta$

4. $|\alpha|^2 = \alpha^2$

5. $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

6. $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \beta \neq 0$

7. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

8. $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta, \theta > 0$

9. $x \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta, \theta > 0$

10. $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \geq \theta \text{ ή } x \leq -\theta, \theta > 0$

11. $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Απόσταση Δύο Αριθμών:

Απόσταση δυο πραγματικών αριθμών α, β θα λέμε τον μη αρνητικό αριθμό $|\alpha - \beta|$ δηλαδή $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$.

**Απόλυτη τιμή
πραγματικού
αριθμού**
Παρατηρήσεις:

- Η ισότητα $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| = 0$ σημαίνει ότι: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$
- Η σχέση $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| \neq 0$ σημαίνει ότι τουλάχιστον ένας των $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ δεν είναι μηδέν

**Ρίζες
πραγματικών
αριθμών**
♦ Τετραγωνική ρίζα

Τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α είναι ο μη αρνητικός αριθμός που ,όταν υψωθεί στο τετράγωνο ,μας δίνει α .

Δηλαδή: $\sqrt{\alpha} = x \Leftrightarrow x^2 = \alpha, \alpha \geq 0$

• Ιδιότητες

1. $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

2. $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$

3. $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

♦ ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Η ν-οστή ρίζα (ν θετικός ακέραιος) ενός μη αρνητικού αριθμού α είναι ο μη αρνητικός αριθμός που όταν υψωθεί στην ν , δίνει α

δηλαδή $\sqrt[n]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^n = \alpha, \alpha \geq 0$

Ρίζες πραγματικών αριθμών	Ιδιότητες Ριζών 1. Αν $\alpha \geq 0$ τότε $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$ και $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$ 2. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ τότε: i. $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$ ii. $\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}, \beta \neq 0$ Ισχύουν: Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και κ θετικός ακέραιος, τότε: $\sqrt[n]{\alpha^\kappa} = (\sqrt[n]{\alpha})^\kappa$ και $\sqrt[n]{\alpha^n \beta} = \alpha \sqrt[n]{\beta}$ 3. Αν $\alpha \geq 0$ τότε: i. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[mn]{\alpha}$ ii. $\sqrt[n]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[n]{\alpha^\mu}^\rho$
--	--

Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$	❖ Αν $\alpha \neq 0$ έχει μοναδική λύση $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ ❖ Αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη ❖ Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ η εξίσωση είναι ταυτότητα.																
Εξισώσεις με Απόλυτες Τιμές	Μορφές Εξισώσεων: ❖ $f(x) = \theta$ • Αν $\theta < 0$ τότε είναι αδύνατη • Αν $\theta \geq 0$ τότε $f(x) = \theta \Leftrightarrow f(x) = \theta \quad \text{ή} \quad f(x) = -\theta$ ❖ $f(x) = g(x)$ • Επειδή $x = \theta \Leftrightarrow x = \theta \quad \text{ή} \quad x = -\theta$ έχουμε $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad \text{ή} \quad f(x) = -g(x)$																
Η εξίσωση $x^v = \alpha$	<table><tr><th>α</th><th>v</th><th>Λύσεις της $x^v = \alpha$</th></tr><tr><td>$\alpha = 0$</td><td>Άρτιος ή Περιττός</td><td>Μία: $x = 0$</td></tr><tr><td rowspan="2">$\alpha > 0$</td><td>Άρτιος</td><td>Δύο: $x = \sqrt[v]{\alpha}$ και $x = -\sqrt[v]{\alpha}$</td></tr><tr><td>Περιττός</td><td>Μία: $x = \sqrt[v]{\alpha}$</td></tr><tr><td rowspan="2">$\alpha < 0$</td><td>Άρτιος</td><td>Καμμία (Αδύνατη)</td></tr><tr><td>Περιττός</td><td>Μία: $x = -\sqrt[v]{-\alpha}$</td></tr></table> Σχόλιο: Για τις λύσεις της εξίσωσης $x^v = \alpha$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις: • Αν v περιττός , τότε $x^v = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha$ • Αν v άρτιος , τότε $x^v = \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha$	α	v	Λύσεις της $x^v = \alpha$	$\alpha = 0$	Άρτιος ή Περιττός	Μία: $x = 0$	$\alpha > 0$	Άρτιος	Δύο: $x = \sqrt[v]{\alpha}$ και $x = -\sqrt[v]{\alpha}$	Περιττός	Μία: $x = \sqrt[v]{\alpha}$	$\alpha < 0$	Άρτιος	Καμμία (Αδύνατη)	Περιττός	Μία: $x = -\sqrt[v]{-\alpha}$
α	v	Λύσεις της $x^v = \alpha$															
$\alpha = 0$	Άρτιος ή Περιττός	Μία: $x = 0$															
$\alpha > 0$	Άρτιος	Δύο: $x = \sqrt[v]{\alpha}$ και $x = -\sqrt[v]{\alpha}$															
	Περιττός	Μία: $x = \sqrt[v]{\alpha}$															
$\alpha < 0$	Άρτιος	Καμμία (Αδύνατη)															
	Περιττός	Μία: $x = -\sqrt[v]{-\alpha}$															

Η εξίσωση
 $ax^2+bx+\gamma=0$
 $a \neq 0$

Ορισμός:

Εξίσωση **δεύτερου βαθμού** λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής $ax^2+bx+\gamma=0$, $a \neq 0$

Διακρίνουσα: $\Delta=b^2-4a\gamma$

Πλήθος ριζών της $ax^2+bx+\gamma=0$, $a \neq 0$

$\Delta=b^2-4a\gamma$	$ax^2+bx+\gamma=0$, $a \neq 0$
$\Delta > 0$	Έχει δυο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	Έχει μια διπλή ρίζα $x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο IR

Σχόλιο: Αν $\Delta \geq 0$ τότε έχει ρίζες πραγματικές

**Άθροισμα και
γινόμενο ριζών**

Αν x_1 και x_2 , είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2+bx+\gamma=0$, $a \neq 0$ τότε
 $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ και $P=x_1x_2=\frac{\gamma}{a}$

**Ανισώσεις
1^{ου} βαθμού**

**Πίνακας
προσήμου του
διωνόμου
 $ax+b$**

Λύση της ανίσωσης $ax > b$

- ❖ Αν $a > 0$, διαιρούμε και τα δυο μέλη της παραπάνω ανίσωσης με a και βρίσκουμε $x > \frac{b}{a}$
- ❖ Αν $a < 0$ διαιρούμε και τα δυο μέλη της παραπάνω ανίσωσης με a και βρίσκουμε $x < \frac{b}{a}$
- ❖ Αν $a=0$ η (1) γίνεται $0x > b$ (2)
 - Αν $b \geq 0$ η (2) άρα και η (1) είναι αδύνατη
 - Αν $b < 0$ τότε η (2) άρα και η (1) αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

▪ $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Πρόσημο του $ax+b$	-	+	

❖ $\alpha < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{\alpha}$	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x + \beta$		+	-

Ανισώσεις με Απόλυτες Τιμές

Μορφές Ανισώσεων:

❖ $|f(x)| < \alpha$ (1)

- Αν $\alpha \leq 0$ τότε η (1) είναι αδύνατη
- Αν $\alpha > 0$ τότε $|f(x)| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < f(x) < \alpha$

❖ $|f(x)| > \alpha$ (1)

- Αν $\alpha < 0$ τότε η (1) είναι ταυτότητα
- Αν $\alpha > 0$ τότε $|f(x)| > \alpha \Leftrightarrow f(x) > \alpha$ ή $f(x) < -\alpha$
- Αν $\alpha = 0$ τότε από την (1) έχουμε $f(x) \neq 0$

❖ $|f(x)| < |g(x)|$

$$|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow |f(x)|^2 < |g(x)|^2 \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x) \Leftrightarrow \dots$$

Σημείωση: Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις μπορούν να λυθούν με διάκριση περιπτώσεων.

Μορφές Τριωνύμου

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$ γράφεται ως εξής:

$$f(x) = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right]$$

- Αν $\Delta > 0$ έχει δυο ρίζες άνισες x_1, x_2 και μετασχηματίζεται σε γινόμενο του α επί δυο πρωτοβάθμιους παράγοντες δηλαδή $f(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$
- Αν $\Delta = 0$ τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί ένα τέλειο τετράγωνο δηλαδή

$$f(x) = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2$$

- Αν $\Delta < 0$ το τριώνυμο γράφεται

$$f(x) = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} \right]$$

Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού

Πρόσημο τιμών του τριωνύμου $ax^2+bx+\gamma, a \neq 0$

Το τριώνυμο $ax^2+bx+\gamma, a \neq 0$ γίνεται;

- ❖ Ετερόσημο του a μόνο όταν είναι $\Delta > 0$ και για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.
- ❖ Μηδέν όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου
- ❖ Ομόσημο του a σε κάθε άλλη περίπτωση.

❖ Το πρόσημο τιμών του τριωνύμου $ax^2+bx+\gamma, a \neq 0$ εξαρτάται από το πρόσημο των a, Δ και τη θέση του x ως προς τις ρίζες του τριωνύμου (αν έχει)

Το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου φαίνεται στους παρακάτω πίνακες:

❖ $\Delta > 0$

X	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
Πρόσημο	Ομόσημο του a		Ετερόσημο του a	Ομόσημο του a

❖ $\Delta = 0$ και ρ η διπλή ρίζα

X	$-\infty$	ρ	$+\infty$
Πρόσημο	Ομόσημο του a		Ομόσημο του a

❖ $\Delta < 0$

X	$-\infty$	$+\infty$
Πρόσημο	Ομόσημο του a	

Ανισώσεις Πηλίκου

Πρόσημο του πηλίκου $P(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$

- Το πρόσημο του πηλίκου $\frac{A(x)}{B(x)}$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του γινομένου $A(x) \cdot B(x)$ γιατί ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} > 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta} < 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0$$

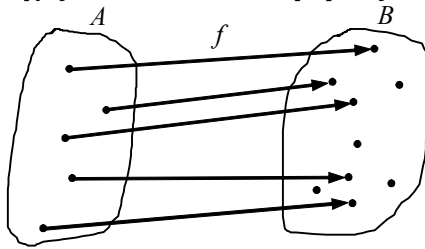
Ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ ή $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$

- Αν η παράσταση $B(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε

	$x \in \mathbb{R}$ π.χ $B(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: ✓ $\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) > 0$ ✓ $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \Leftrightarrow A(x) \geq 0$ ✓ $\frac{A(x)}{B(x)} \geq \lambda \Leftrightarrow A(x) > \lambda \cdot B(x)$ • Αν η παράσταση $B(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: ✓ $\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0$ ✓ $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$ ✓ $\frac{A(x)}{B(x)} > \lambda \Leftrightarrow \frac{A(x)}{B(x)} - \lambda > 0 \Leftrightarrow \frac{A(x) - \lambda \cdot B(x)}{B(x)} > 0$ ✓ $\frac{A(x)}{B(x)} > \Gamma(x) \Leftrightarrow \frac{A(x)}{B(x)} - \Gamma(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{A(x) - \Gamma(x) \cdot B(x)}{B(x)} > 0$
--	--

Αριθμητική Πρόοδος Ο $n^{\text{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου Διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου Άθροισμα n διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου.	■ Ορισμός: Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού. $a_{v+1} = a_v + \omega$ $a_v = a_1 + (v-1)\omega$ Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει: $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ Το άθροισμα των πρώτων n διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου (a_v) με διαφορά ω είναι : $S_v = \frac{v}{2}(\alpha_1 + a_v) \quad \text{ή} \quad S_v = \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v-1)\omega]$
--	--

Γεωμετρική Πρόοδος Ο $n^{\text{ος}}$ όρος μιας γεωμετρικής προόδου Διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Πρόοδου Άθροισμα n διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου	▪ Ορισμός: Μια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό. Δηλαδή $a_{n+1}=a_n\lambda$ ή $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ $a_n=a_1\lambda^{n-1}$ Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει: $\beta^2=\alpha\gamma$ Το άθροισμα των πρώτων n διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου (a_n) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι : $S_n = a_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$
---	---

Η Έννοια της Συνάρτησης	❖ Ορισμός: Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται μια διαδικασία(κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B.  Η παραπάνω συνάρτηση συμβολίζεται ως εξής $f:A \rightarrow B$ όπου $f(x)$ μια παράσταση του x, που λέγεται τύπος της συνάρτησης ♦ Πεδίο ορισμού Αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης δεν δίνεται τότε θα θεωρούμε ότι είναι το "ευρύτερο" από τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ στα οποία το $f(x)$ έχει νόημα. ♦ Σύνολο τιμών Λέγεται το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f για όλα τα $x \in A$ και το συμβολίζουμε με $f(A)$.
---------------------------------------	--

Πεδίο Ορισμού

❖ Πως βρίσκω πεδίο ορισμού (π.ο.)

Αν η συνάρτηση f είναι:

1. Πολυωνυμικής μορφής δηλ. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ τότε το πεδίο ορισμού είναι το $A = \mathbb{R}$

2. Ρητής μορφής δηλ. $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ όπου $p(x), q(x)$ πολυωνυμικές συναρτήσεις τότε πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$ εκτός από τις τιμές του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή δηλ. της ρίζες της εξίσωσης $q(x) = 0$

3. Άρρητης μορφής δηλ. $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$ όπου $p(x)$ ρητή συνάρτηση του x τότε πεδίο ορισμού είναι το διάστημα ή τα διαστήματα για τα οποία η υπόρριζος ποσότητα είναι μεγαλύτερη ή ίση από το μηδέν

4. Πολλαπλού τύπου π.χ. $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A_1 \\ f_2(x) & x \in A_2 \end{cases}$ τότε πεδίο ορισμού είναι το $A = A_1 \cup A_2$

5. Συνδυασμός των παραπάνω περιπτώσεων

Για να βρούμε το π.ο. συνάρτησης f της οποίας ο τύπος αποτελεί συνδυασμό των παραπάνω περιπτώσεων, λαμβάνουμε υπόψη μας όσες από αυτές χρειάζονται οπότε το π.ο. της f προκύπτει από την τομή όλων των επί μέρους πεδίων ορισμών που βρίσκουμε κατά την πορεία της λύσης

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

◆ Γραφική παράσταση συνάρτησης

Για την συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ ορίζουμε σαν γραφική παράσταση το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$

Τη γραφική παράσταση της f τη συμβολίζουμε με C_f

❖ **Σχόλιο:** Μια καμπύλη είναι γραφική παράσταση συνάρτησης αν κάθε κατακόρυφη ευθεία την τέμνει **το πολύ σε ένα σημείο**.

◆ Εύρεση πεδίου ορισμού και συνόλου τιμών από τη γραφική παράσταση

- Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο το οποίο έχει στοιχεία τις τετμημένες των σημείων της C_f δηλαδή την προβολή της C_f πάνω στον άξονα $x'x$
- Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο το οποίο έχει στοιχεία τις τεταγμένες των σημείων της C_f δηλαδή την προβολή της C_f πάνω στον άξονα $y'y$

Κοινά Σημεία

♦ Κοινά σημεία της C_f με τους άξονες

- Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα το πολύ σημείο
- Αν $0 \in A$ η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0, f(0))$
- Τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$

♦ Σχετικές θέσεις της C_f με τον άξονα $x'x$

- Η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ στα διαστήματα του x που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>0$
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ στα διαστήματα του x που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<0$

♦ Σημεία τομής και σχετικές θέσεις των C_f και C_g

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το A

- Τα κοινά σημεία των C_f και C_g έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=g(x)$
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g στα διαστήματα του x που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>g(x)$
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g στα διαστήματα του x που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<g(x)$

♦ Γραφική παράσταση των συναρτήσεων : $-f(x), |f(x)|$

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A

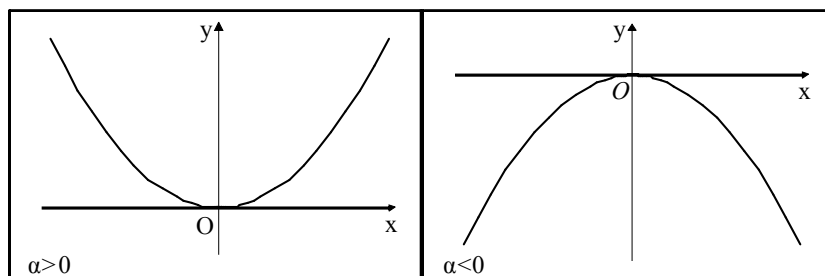
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f αφού πάρουμε τη συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f(x)|$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f αφού πάρουμε τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ ή πάνω στον $x'x$ και τα συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ των τμημάτων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$

Η Συνάρτηση

$$f(x)=ax^2$$

$$a \neq 0$$

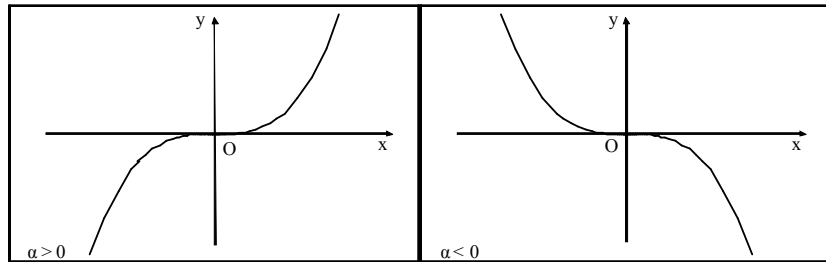
Γραφική παράσταση της $f(x)=ax^2, a \neq 0$



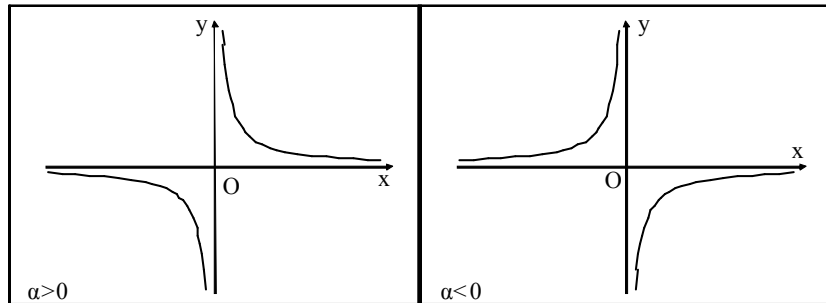
Η Συνάρτηση

$$f(x)=ax^3$$

$$a \neq 0$$

Γραφική Παράσταση της $f(x)=ax^3, a \neq 0$
**Η Συνάρτηση**

$$f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0$$

Γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0$




Β Λυκείου

Γραμμικά Συστήματα

Γραμμικό Σύστημα 2x2

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

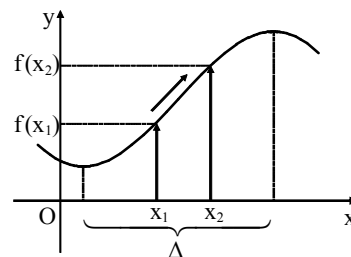
- Αν $D \neq 0$ έχει μοναδική λύση: $x = \frac{D_x}{D}$ $y = \frac{D_y}{D}$
- Αν $D=0$ και $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ είναι αδύνατο
- Αν $D=D_x=D_y=0$ έχει άπειρο πλήθος λύσεων

Μονοτονία Συνάρτησης

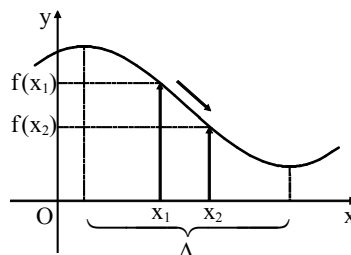
♦ Ορισμός:

Μια συνάρτηση f λέγεται

- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$



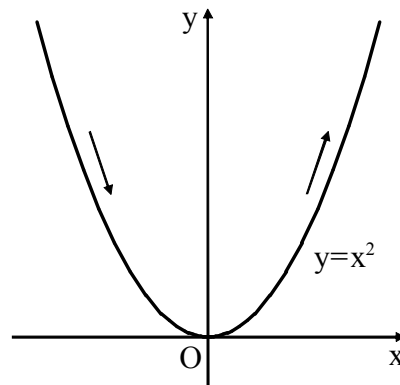
- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$



- Για να δηλώσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ , γράφουμε $f \uparrow \Delta$ (αντιστοίχως $f \downarrow \Delta$).

- Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2$:

- ✓ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, αφού για $0 \leq x_1 < x_2$ έχουμε $x_1^2 < x_2^2$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$



- ✓ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, αφού για $x_1 < x_2 \leq 0$ έχουμε $0 \leq -x_2 < -x_1$, οπότε $0 \leq x_2^2 < x_1^2$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$

- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη στο Δ** . Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

❖ Μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$

1. Αν $a > 0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
2. Αν $a < 0$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
3. Αν $a = 0$ τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$
4. Αν $a = 0$ και $\beta = 0$ τότε η f είναι η μηδενική συνάρτηση και η γραφική της παράσταση είναι ο άξονας $x'x$

♦ Εύρεση είδους μονοτονίας μιας συνάρτησης

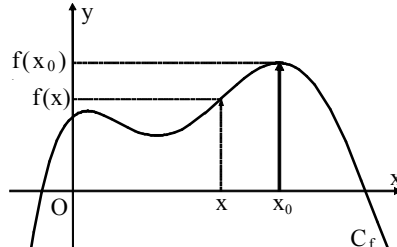
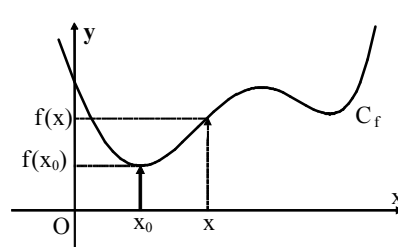
Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη εργαζόμαστε ως εξής

- ❖ Θεωρούμε τυχαία $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ή $x_1 > x_2$ και προσπαθούμε να δημιουργήσουμε μια ανισοτική σχέση μεταξύ των $f(x_1)$, $f(x_2)$
 - Αν καταλήξουμε σε $f(x_1) < f(x_2)$ ή $f(x_1) > f(x_2)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο A
 - Αν καταλήξουμε σε $f(x_1) > f(x_2)$ ή $f(x_1) < f(x_2)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A

- ❖ Έστω μια συνάρτηση f με $y = f(x)$ ορισμένη στο Δ . Βρίσκουμε το πρόσημο του λόγου

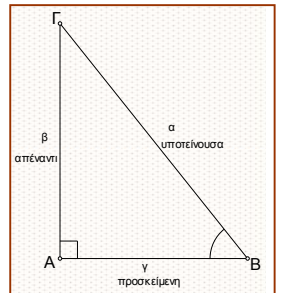
$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in \Delta$$

- Αν $\lambda > 0$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ
- Αν $\lambda < 0$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ
- Αν $\lambda = 0$ η f είναι σταθερή στο Δ

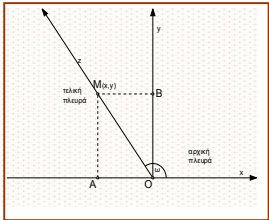
	♦ Με τη βοήθεια της μονοτονίας μιας συνάρτησης μπορούμε • Να λύνουμε εξισώσεις και ανισώσεις • Να αποδεικνύουμε ισότητες και ανισότητες Ισχύουν: ✓ Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο A και $x_1, x_2 \in A$ τότε $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$ ✓ Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A και $x_1, x_2 \in A$ τότε $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$ ✓ Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$
Ακρότατα Συνάρτησης	Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι: • Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$  • Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$  ✓ Το μέγιστο και το ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται ολικά ακρότατα αυτής ✓ Μια συνάρτηση ενδέχεται να έχει ελάχιστο και μέγιστο ή μόνο ελάχιστο ή μόνο μέγιστο ή τίποτα από τα δυο. ✓ Μια συνάρτηση ενδέχεται να παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο σε περισσότερα σημεία από ένα.
Άρτια-Περιττή Συνάρτηση	♦ Ορισμός: Μια συνάρτηση f με πεδίου ορισμού το A λέγεται άρτια αν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$ ♦ Ορισμός: Μια συνάρτηση f με πεδίου ορισμού το A λέγεται περιττή αν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$

	• Παρατήρηση 1: Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας των άξονα των y • Παρατήρηση 2: Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. • Παρατήρηση 3: Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή και ορίζεται στο 0 τότε $f(0)=0$ δηλαδή η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
--	---

Κατακόρυφη Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης	○ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\varphi(x)+c$ $c>0$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα πάνω. ○ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\varphi(x)-c$ $c>0$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα κάτω. ○ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\varphi(x-c)$ με $c>0$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά. ○ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\varphi(x+c)$ με $c>0$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα αριστερά.
---	---

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας	Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας B είναι το ημίτονο ($\eta\mu B$), το συνημίτονο ($\sigma\upsilon\nu B$), η εφαπτομένη ($\epsilon\varphi B$), και η συνεφαπτομένη ($\sigma\varphi B$) Είναι: $\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} \right)$ $\sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{\alpha} \left(\frac{\text{προσκειμένη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} \right)$	
--	---	---

	$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} \right)$ $\sigma\varphi B = \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}} \right)$	
--	--	--

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας με $0^0 \leq \omega \leq 360^0$	Η γωνία ω παράγεται από τον ημιάξονα Ox όταν περιστραφεί κατά τη θετική φορά, δηλαδή αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού. Αν $M(x,y)$ είναι ένα σημείο ($M \neq O$) της τελικής πλευράς οποιασδήποτε γωνίας ω, ορίζουμε: $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$ $\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \quad \sigma\varphi\omega = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$ όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$	
--	--	---

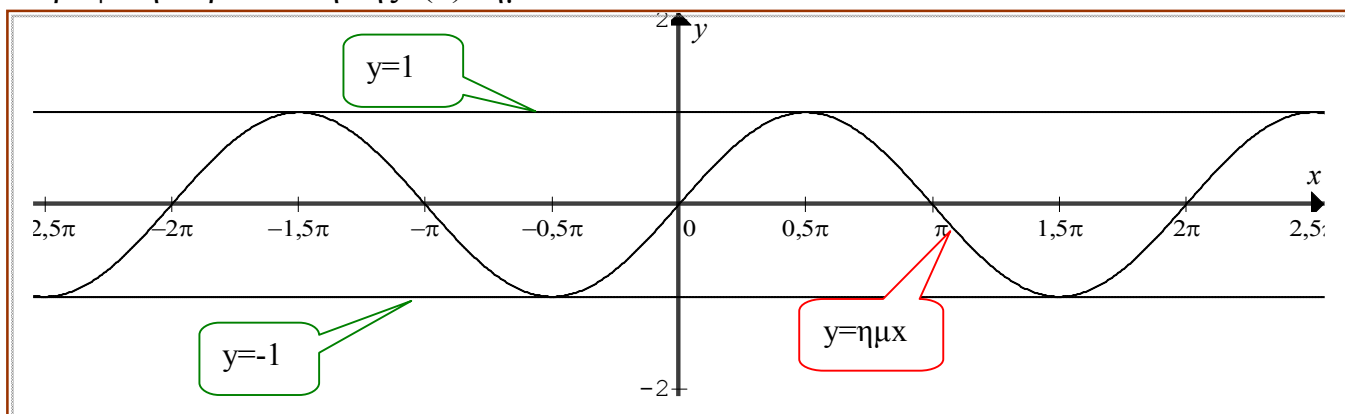
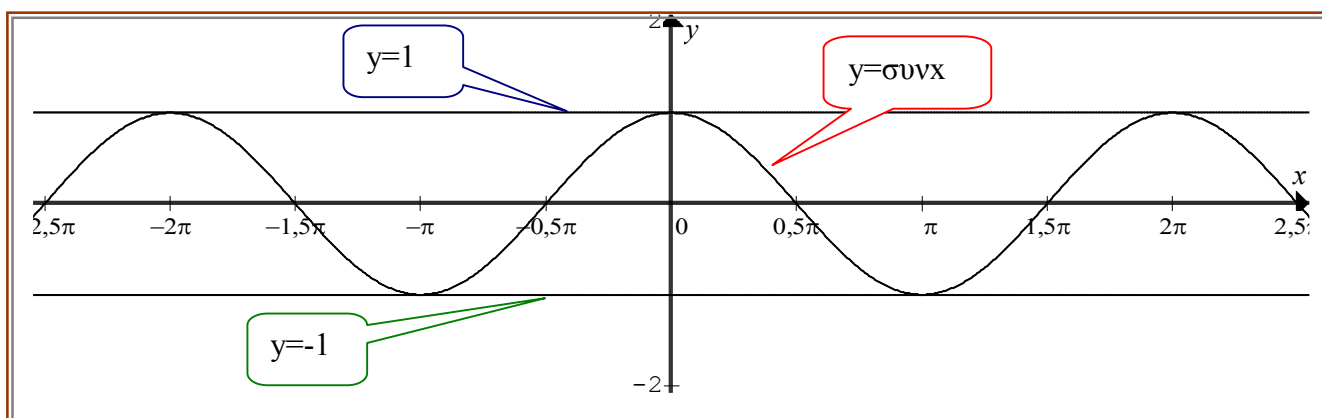
Γωνίες μεγαλύτερες των 360⁰ Τριγ. Κύκλος	• $\eta\mu(\kappa\ 360^0+\omega)=\eta\mu\omega$$\varepsilon\varphi(\kappa\ 360^0+\omega)=\varepsilon\varphi\omega$ • $\sigma\upsilon\nu(\kappa\ 360^0+\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega$$\sigma\varphi(\kappa\ 360^0+\omega)=\sigma\varphi\omega$ • Τριγωνομετρικό κύκλο λέμε τον κύκλο που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων O(0,0) και ακτίνα ρ=1																																			
Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών	❖ Παρατήρηση 1: Ισχύει: $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$ και $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$ ❖ Παρατήρηση 2: Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών <table><tr><td></td><td colspan="4">Τεταρτημόρια</td></tr><tr><td></td><td>1⁰</td><td>2⁰</td><td>3⁰</td><td>4⁰</td></tr><tr><td>ημω</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>συνω</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr><tr><td>εφω</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td></tr><tr><td>σφω</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td></tr><tr><td>Μνημονικός κανόνας</td><td>Ο</td><td>Η</td><td>Ε</td><td>Σ</td></tr></table>		Τεταρτημόρια					1 ⁰	2 ⁰	3 ⁰	4 ⁰	ημω	+	+	-	-	συνω	+	-	-	+	εφω	+	-	+	-	σφω	+	-	+	-	Μνημονικός κανόνας	Ο	Η	Ε	Σ
	Τεταρτημόρια																																			
	1 ⁰	2 ⁰	3 ⁰	4 ⁰																																
ημω	+	+	-	-																																
συνω	+	-	-	+																																
εφω	+	-	+	-																																
σφω	+	-	+	-																																
Μνημονικός κανόνας	Ο	Η	Ε	Σ																																

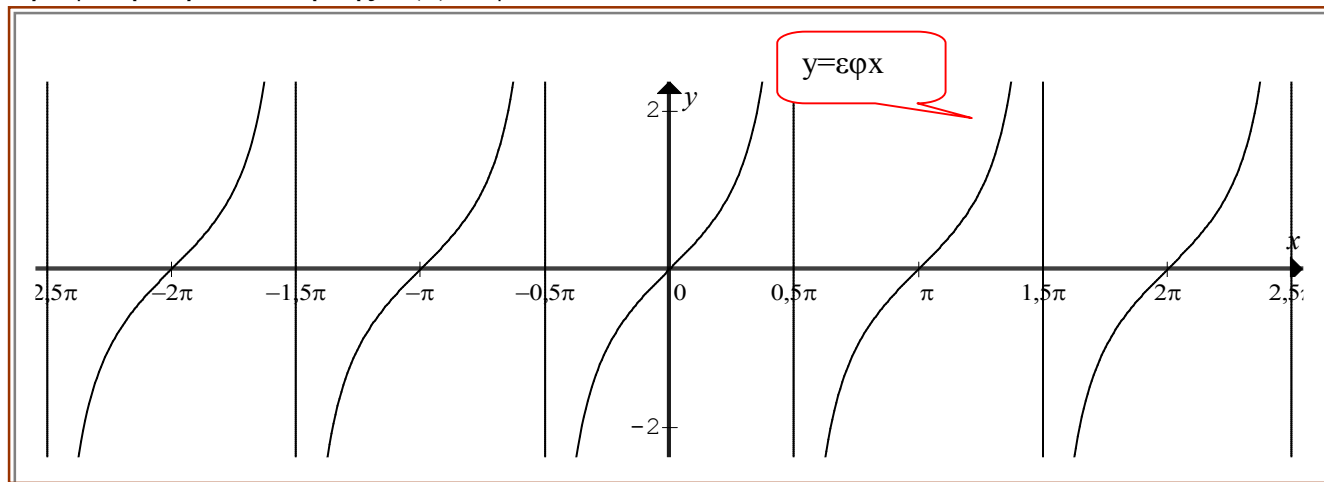
Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών	Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί Αριθμοί			
	σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
	0°	0	ημ0°=0	συν0°=1	εφ0°=0	σφ0°=δεν ορίζεται
	30°	$\frac{\pi}{6}$	ημ $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	συν $\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	εφ $\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	σφ $\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$
	45°	$\frac{\pi}{4}$	ημ $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	συν $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	εφ $\frac{\pi}{4} = 1$	σφ $\frac{\pi}{4} = 1$
	60°	$\frac{\pi}{3}$	ημ $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	συν $\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	εφ $\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$	σφ $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
	90°	$\frac{\pi}{2}$	ημ $\frac{\pi}{2} = 1$	συν $\frac{\pi}{2} = 0$	εφ $\frac{\pi}{2} = \text{δεν}$ ορίζεται	σφ $\frac{\pi}{2} = 0$
	180°	π	ημπ=0	συνπ = -1	εφπ=0	σφπ δεν ορίζεται
	270°	$\frac{3\pi}{2}$	ημ $\frac{3\pi}{2} = -1$	συν $\frac{3\pi}{2} = 0$	εφ $\frac{3\pi}{2} = \text{Δεν}$ ορίζεται	σφ $\frac{3\pi}{2} = 0$

Βασικό Θεώρημα	$ \eta\mu x \leq 1$	$ \sigma\upsilon\nu x \leq 1$	$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$	$\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$
	$\sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$	$\epsilon\phi x \cdot \sigma\phi x = 1$	$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2 x}$	$\eta\mu^2 x = \frac{\epsilon\phi^2 x}{1 + \epsilon\phi^2 x}$
	$\eta\mu(2\kappa\pi + x) = \eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + x) = \sigma\upsilon\nu x$	$\kappa \in \mathbb{Z}$	

Αναγωγή στο 1° Τεταρτημόριο	$\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$	$\epsilon\phi(-x) = -\epsilon\phi x$	$\sigma\phi(-x) = -\sigma\phi x$
	$\eta\mu(\frac{\pi}{2} - x) = \sigma\upsilon\nu x$	$\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - x) = \eta\mu x$	$\epsilon\phi(\frac{\pi}{2} - x) = \sigma\phi x$	$\sigma\phi(\frac{\pi}{2} - x) = \epsilon\phi x$
	$\eta\mu(\frac{\pi}{2} + x) = \sigma\upsilon\nu x$	$\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + x) = -\eta\mu x$	$\epsilon\phi(\frac{\pi}{2} + x) = -\sigma\phi x$	$\sigma\phi(\frac{\pi}{2} + x) = -\epsilon\phi x$
	$\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$	$\epsilon\phi(\pi - x) = -\epsilon\phi x$	$\sigma\phi(\pi - x) = -\sigma\phi x$
	$\eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$	$\epsilon\phi(\pi + x) = \epsilon\phi x$	$\sigma\phi(\pi + x) = \sigma\phi x$
	$\eta\mu(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sigma\upsilon\nu x$	$\sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{2} - x) = -\eta\mu x$	$\epsilon\phi(\frac{3\pi}{2} - x) = \sigma\phi x$	$\sigma\phi(\frac{3\pi}{2} - x) = \epsilon\phi x$
	$\eta\mu(\frac{3\pi}{2} + x) = -\sigma\upsilon\nu x$	$\sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{2} + x) = \eta\mu x$	$\epsilon\phi(\frac{3\pi}{2} + x) = -\sigma\phi x$	$\sigma\phi(\frac{3\pi}{2} + x) = -\epsilon\phi x$
	$\eta\mu(2\pi - x) = -\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) = \sigma\upsilon\nu x$	$\epsilon\phi(2\pi - x) = -\epsilon\phi x$	$\sigma\phi(2\pi - x) = -\sigma\phi x$
	$\eta\mu(2\pi + x) = \eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu(2\pi + x) = \sigma\upsilon\nu x$	$\epsilon\phi(2\pi + x) = \epsilon\phi x$	$\sigma\phi(2\pi + x) = \sigma\phi x$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις πραγματικών αριθμών	✓ Η συνάρτηση ημίτονο Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο $\eta\mu(x \text{ rad})$ λέγεται συνάρτηση ημίτονο και τη συμβολίζουμε με: $\eta\mu x = \eta\mu(x \text{ rad})$ Όμοια ορίζονται οι συναρτήσεις συνημίτονο , εφαπτομένη , συνεφαπτομένη . Πεδίο Ορισμού Σύνολο τιμών Περιοδικότητα		
$f(x) = \eta\mu x$	$A = \mathbb{R}$	$f(A) = [-1, 1]$	$T = 2\pi$
$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$A = \mathbb{R}$	$f(A) = [-1, 1]$	$T = 2\pi$
$f(x) = \epsilon\phi x$	$A = \mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$	$f(A) = \mathbb{R}$	$T = \pi$
$f(x) = \sigma\phi x$	$A = \mathbb{R} - \{ x \in \mathbb{R} / x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \}$	$f(A) = \mathbb{R}$	$T = \pi$

Γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$ Γραφική παράσταση της $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ 

Γραφική παράσταση της $f(x)=\varepsilon\phi x$ 

Παρατήρηση	Οι συναρτήσεις $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)$ και $g(x)=\rho\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, όπου $\rho>0$, $\omega>0$ είναι περιοδικές με περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}$ Μέγιστη τιμή είναι το ρ και Ελάχιστη το $-\rho$
Τριγωνομετρικές Εξισώσεις	■ $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta$ ή $x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta)$ $\kappa \in \mathbb{Z}$ ■ $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta$ ή $x = 2\kappa\pi - \theta$ $\kappa \in \mathbb{Z}$ ■ $\varepsilon\phi x = \varepsilon\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta$ $\kappa \in \mathbb{Z}$ ■ $\sigma\phi x = \sigma\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta$ $\kappa \in \mathbb{Z}$ ➤ Ειδικές Μορφές 1). $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi$ 2). $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ 3). $\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$ 4). $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ 5). $\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi$ 6). $\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow x = (2\kappa + 1)\pi$ 7). $\varepsilon\phi x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi$ 8). $\varepsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ 9). $\varepsilon\phi x = -1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$ 10). $\sigma\phi x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ 11). $\sigma\phi x = 1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ 12). $\sigma\phi x = -1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$ $\kappa \in \mathbb{Z}$

▪ Τριγωνομετρικοί αριθμοί Αθροίσματος Γωνιών

Συνημίτονο		Εφαπτομένη	
Αθροίσματος	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$	Αθροίσματος	$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$
Διαφοράς	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$	Διαφοράς	$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

Ημίτονο		Συνεφαπτομένη	
Αθροίσματος	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$	Αθροίσματος	$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$
Διαφοράς	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$	Διαφοράς	$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$

▪ Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

Τύποι που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α με αυτούς της γωνίας α 2α → α	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
	$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$	$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$

Τύποι αποτετραγωνισμού	$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$	$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$
	$\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$	$\cot^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$

Ημίτονο και Συνημίτονο της γωνίας 2α με βάση την εφα	$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\tan^2\alpha}$	$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$
--	---	--

Ημίτονο και Συνημίτονο της γωνίας 3α	$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$	$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
--	--	--

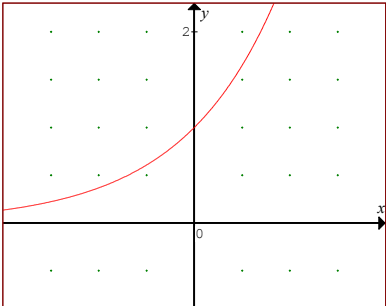
Τύποι που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α με αυτούς της γωνίας α/2 α → α/2	$\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - \eta\mu^2\frac{\alpha}{2} =$ $2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$
	$\epsilon\phi\alpha = \frac{2\epsilon\phi\frac{\alpha}{2}}{1 - \epsilon\phi^2\frac{\alpha}{2}}$	$\sigma\phi\alpha = \frac{\sigma\phi^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\sigma\phi\frac{\alpha}{2}}$

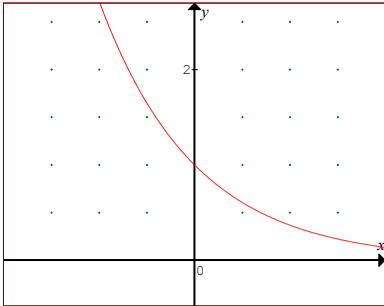
Πολυώνυμα

Πολυώνυμο του x	❖ Ορισμός Καλούμε πολυώνυμο του x κάθε παράσταση της μορφής : $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ όπου n είναι ένας φυσικός αριθμός και $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί . Ένα πολυώνυμο του x συνήθως το συμβολίζουμε με P(x) , Q(x), f(x) κ.λ.π. ▪ Σταθερά πολυώνυμο Λέγονται οι πραγματικοί αριθμοί δηλαδή τα πολυώνυμα της μορφής α_0. ▪ Μηδενικό πολυώνυμο Λέγεται το σταθερό πολυώνυμο 0
	Ισότητα Πολυωνύμων Δύο πολυώνυμα του x λέγονται ίσα αν , και μόνο αν, είναι του ίδιου βαθμού και οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων τους είναι ίσοι. Αν $P(x) = \alpha_\mu x^\mu + \alpha_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $Q(x) = \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$ είναι δύο πολυώνυμα του x με $\mu \geq \nu$, θα λέμε ότι είναι ίσα όταν: $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_\nu = \beta_\nu \text{ και } \alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} = \dots = \alpha_\mu = 0$

Αλγοριθμική Διαίρεση	Θεώρημα (Ταυτότητα της διαίρεσης) Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ τέτοια ώστε: $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$ όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.	$\begin{array}{r} \Delta(x) \quad \quad \delta(x) \\ \underline{\upsilon(x) \pi(x)} \\ \Delta(x) - \delta(x)\pi(x) = \upsilon(x) \end{array}$ $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$
Διαίρεση πολυωνύμου με x-ρ Θεώρημα (ακέραιων ριζών)	Θεώρημα: Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$. Είναι δηλαδή $\upsilon=P(\rho)$ Θεώρημα: Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho)=0$. • Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0	

Εκθετική Και Λογαριθμική Συνάρτηση

Εκθετική Συνάρτηση Παρατηρήσεις:	Ορισμός: Ονομάζουμε εκθετική συνάρτηση με βάση a την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = a^x$, όπου $0 < a \neq 1$ Αν $a=1$, τότε έχουμε την σταθερή συνάρτηση $f(x)=1$. 1. Αν $a > 0$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν: $a^x > 0$ και $a^{f(x)} > 0$ 2. Αν $0 < a \neq 1$ τότε: $\rightarrow a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ $\rightarrow a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 & \text{αν } a > 1 \\ x_1 > x_2 & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$
Γραφική Παράσταση της Εκθετικής Συνάρτησης	$a > 1$ - Πεδίο ορισμού: $A = \mathbb{R}$ - Σύνολο τιμών: $B = (0, +\infty)$ - Μονοτονία: Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. - Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,1)$ 

	$0 < \alpha < 1$ 1. Πεδίο ορισμού: $A = \mathbb{R}$ 2. Σύνολο τιμών: $B = (0, +\infty)$ 3. Μονοτονία: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. 4. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y στο σημείο $A(0,1)$ 
Λογάριθμοι Δεκαδικοί Λογάριθμοι Φυσικοί λογάριθμοι	Ορισμός: Λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ με βάση α, με $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ λέγεται ο εκθέτης που πρέπει να υψωθεί ο α ώστε να βρούμε το θ και συμβολίζεται $\log_{\alpha} \theta$. Δηλαδή: $\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_{\alpha} \theta$ Οι λογάριθμοι με βάση το 10 ονομάζονται δεκαδικοί ή κοινοί λογάριθμοι. Ο δεκαδικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ, συμβολίζεται με $\log \theta$. Ισχύει: $\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$ Οι λογάριθμοι με βάση το e ονομάζονται φυσικοί ή νεπέριοι λογάριθμοι. Ο φυσικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ, συμβολίζεται με $\ln \theta$. Ισχύει: $\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$ Συνέπειες Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$ ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οι ισότητες: $\blacksquare \log_{\alpha} \alpha^x = x$ $\blacksquare \log_{\alpha} 1 = 0$ $\alpha^{\log_{\alpha} \theta} = \theta$ $\log_{\alpha} \alpha = 1$ ○ Στους φυσικούς λογαρίθμους είναι: $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$
Ιδιότητες Λογάριθμων	Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύουν: ▪ $\log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$ ▪ $\log_{\alpha} \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$ ▪ $\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \log_{\alpha} \theta$ ▪ $\log_{\alpha} \sqrt[y]{\theta} = \frac{1}{y} \log_{\alpha} \theta$

Λογαριθμική Συνάρτηση

Ορισμός: Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in (0, +\infty)$ στο $\log_a x$ ορίζουμε μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \log_a x$ όπου $a > 0, a \neq 1$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση a** .

- **Λογαριθμική συνάρτηση με βάση το 10** λέμε τη συνάρτηση με την οποία κάθε θετικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο δεκαδικό του λογάριθμο.
- **Λογαριθμική συνάρτηση με βάση το e** λέμε τη συνάρτηση με την οποία κάθε θετικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο φυσικό του λογάριθμο.

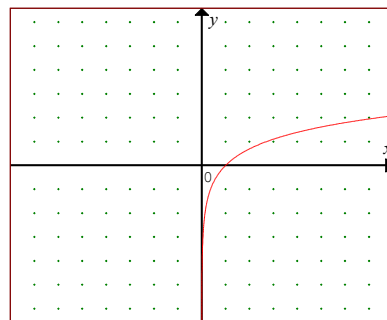
Σχόλιο

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \log_a x$ και $y = a^x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{x'Oy'}$.

Γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης

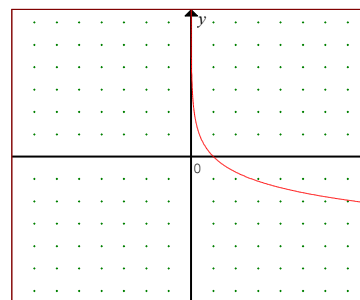
$a > 1$

1. Πεδίο ορισμού: $A = (0, +\infty)$
2. Σύνολο τιμών: $B = \mathbb{R}$
3. Μονοτονία: Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
4. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$ και έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα των Oy'



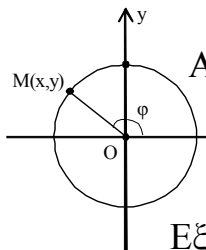
$0 < a < 1$

1. Πεδίο ορισμού: $A = (0, +\infty)$
2. Σύνολο τιμών: $B = \mathbb{R}$
3. Μονοτονία: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.
4. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$ και έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα των Oy'

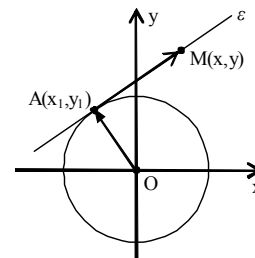


Κύκλος

- **Ορισμός:** Ονομάζεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν από το κέντρο O απόσταση ίση με την ακτίνα ρ .
- Ένας κύκλος λέγεται μοναδιαίος όταν έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$



Αν το κέντρο του κύκλου είναι η αρχή των αξόνων τότε η εξίσωση είναι: $x^2+y^2=\rho^2$.



Εξίσωση εφαπτομένης σε τυχαίο σημείο της $A(x_1, y_1)$
 $xx_1 + yy_1 = \rho^2$

Γενική Μορφή Εξίσωσης Κύκλου:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

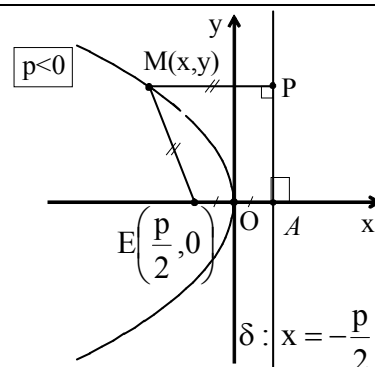
$$\text{αρκεί: } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$$

Παραβολή

Η εξίσωση της όταν η εστία είναι στον άξονα $x'x$ είναι: $y^2 = 2px$

Εστία: $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Διευθετούσα: $\delta: x = -\frac{p}{2}$

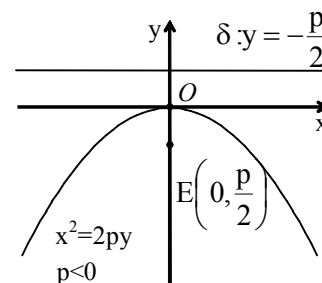


Η εξίσωση της Παραβολής όταν η εστία βρίσκεται στον άξονα

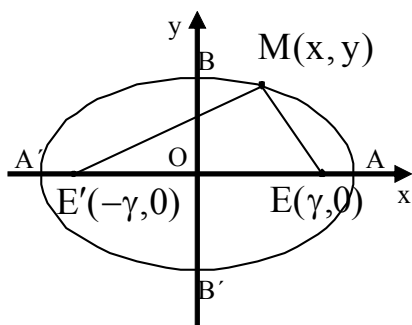
$y'y$ είναι: $x^2 = 2py$ ή $y = \frac{1}{2p}x^2$

Εστία: $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$

Διευθετούσα: $\delta: y = -\frac{p}{2}$



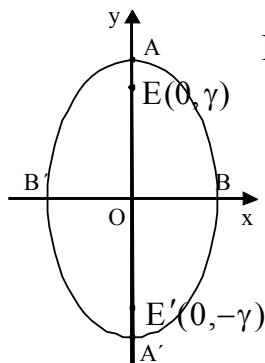
Έλλειψη



Η εξίσωση της έλλειψης όταν οι εστίες της βρίσκονται στον άξονα $x'x$ είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$$

Εστίες: $E'(-\gamma, 0)$ $E(\gamma, 0)$.

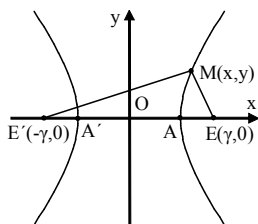


Η εξίσωση της έλλειψης όταν οι εστίες της βρίσκονται στον άξονα $y'y$ είναι:

$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1 \quad \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$$

Εστίες: $E(0, \gamma)$, $E'(0, -\gamma)$

Υπερβολή



Η εξίσωση της υπερβολής όταν οι εστίες της βρίσκονται στον άξονα $x'x$ είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$$

Εστίες: $E'(-\gamma, 0)$ $E(\gamma, 0)$ $(E'E) = 2\gamma$



Γ Λυκείου

Μιγαδικοί Αριθμοί

Μιγαδικός Αριθμός

Είναι κάθε αριθμός της μορφής

$$z = \alpha + \beta i, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ και } i^2 = -1$$

Ισότητα Μιγαδικών Αριθμών

$$\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha = \gamma \text{ και } \beta = \delta.$$

$$\text{Ισχύει: } z=0 \Leftrightarrow \text{Re}(z)=0 \text{ και } \text{Im}(z)=0$$

Συζυγής μιγαδικού

Αν $z = \alpha + \beta i$ τότε συζυγής του z λέγεται

ο μιγαδικός $\alpha - \beta i$ και συμβολίζεται $\bar{z}$, δηλαδή $\bar{z} = \alpha - \beta i$.

$$z + \bar{z} = 2\alpha$$

$$z - \bar{z} = 2\beta i$$

Ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών

• Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

$$\bullet \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (1)$$

$$\bullet \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\bullet \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\bullet \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

Δυνάμεις του i

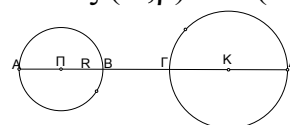
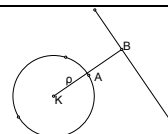
$$i^v = \begin{cases} 1 & \alpha v \quad v=0 \quad \text{ή} \quad v=4\rho \\ i & \alpha v \quad v=1 \quad \text{ή} \quad v=4\rho+1 \\ -1 & \alpha v \quad v=2 \quad \text{ή} \quad v=4\rho+2 \\ -i & \alpha v \quad v=3 \quad \text{ή} \quad v=4\rho+3 \end{cases}$$

Επίλυση της εξίσωσης $az^2 + \beta z + \gamma = 0$, $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, a \neq 0$	Αν $\Delta < 0$ Οι λύσεις είναι : $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
--	---

Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού	Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως μέτρο του z την απόσταση του M από την αρχή O , δηλαδή: $ z = \overrightarrow{OM} = \sqrt{x^2 + y^2}$
Ιδιότητες	$z = \bar{z} = -z$ $z ^2 = z \cdot \bar{z}$ $z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2$ και γενικά $z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n$, $n \geq 2$ $z^n = z ^n$ $\left \frac{z_1}{z_2} \right = \frac{ z_1 }{ z_2 }$ $z_1 - z_2 \leq z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2$

Γεωμετρικοί Τόποι	- Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους. - Η εξίσωση $z - z_0 = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ - Η εξίσωση $z - z_1 = z - z_2$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$
--------------------------	--

Μέγιστη και Ελάχιστη Τιμή	- Αν τα σημεία N, Λ διατρέχουν την ευθεία ε και τον κύκλο (K, ρ) τότε $\min z_1 - z_2 = (AB) = d(K, \varepsilon) - \rho$ - Αν τα σημεία N, Λ διατρέχουν δυο κύκλους (K, ρ) και (Π, R) με $(K\Pi) > \rho + R$ τότε $\min z_1 - z_2 = (B\Gamma) = (K\Pi) - \rho - R$ $\max z_1 - z_2 = (A\Delta) = (K\Pi) + \rho + R$
----------------------------------	---



Ανάλυση

Βασικά Θεωρήματα Ανάλυσης

♦ Θεώρημα Bolzano

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

♦ Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$

♦ Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

♦ Θεώρημα Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- ✓ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- ✓ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)
- ✓ $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

**Βασικά
Θεωρήματα
Ανάλυσης**
♦ Θεώρημα Μέσης Τιμής

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- ✓ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- ✓ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

♦ Θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

♦ Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

**Κανόνες
Παραγωγίσης**

Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις τότε:

- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
- $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$
- $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- $\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

❖ Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων Και αντίστοιχων Σύνθετων

Συνάρτηση	Παράγωγος	Αντίστοιχη Σύνθετη	Παράγωγος
$f(x)=c, c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$		
$f(x)=x$	$f'(x) = 1$		
$f(x)=x^a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = ax^{a-1}$	$f(x)=(g(x))^p$	$f'(x) = p(f(x))^{p-1} \cdot f'(x)$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$	$f(x)=\sqrt{g(x)}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$
$f(x)=\eta\mu x$	$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$f(x)=\eta\mu g(x)$	$f'(x) = \sigma\upsilon\nu g(x) \cdot g'(x)$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$f'(x) = -\eta\mu x$	$f(x)=\sigma\upsilon\nu g(x)$	$f'(x) = -\eta\mu g(x) \cdot g'(x)$
$f(x)=e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x)=e^{g(x)}$	$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$
$f(x)=\ln x $	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x)=\ln g(x) $	$f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$
$f(x)=\varepsilon\phi x$	$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$f(x)=\varepsilon\phi g(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 g(x)} \cdot g'(x)$
$f(x)=\sigma\phi x$	$f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$f(x)=\sigma\phi g(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 g(x)} \cdot g'(x)$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x)=\frac{1}{g(x)}$	$f'(x) = -\frac{1}{g^2(x)} \cdot g'(x)$
$f(x)=a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$f(x)=a^{g(x)}$	$f'(x) = a^{g(x)} \cdot \ln a \cdot g'(x)$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

1.	$\int 0 dx = c$	6.	$\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$
2.	$\int 1 dx = x + c$	7.	$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \varepsilon\phi x + c$
3.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	8.	$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x} dx = -\sigma\phi x + c$
4.	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$	9.	$\int e^x dx = e^x + c$
5.	$\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$	10.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

Εμβαδόν Επιπέδου Χωρίου

- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις $x=a$, $x=\beta$ είναι:

$$E = \int_a^\beta |f(x)| dx$$

- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$ είναι:

$$E = \int_{\rho_1}^{\rho_2} |f(x)| dx$$

Όπου ρ_1 η μικρότερη και ρ_2 η μεγαλύτερη ρίζα της $f(x)=0$

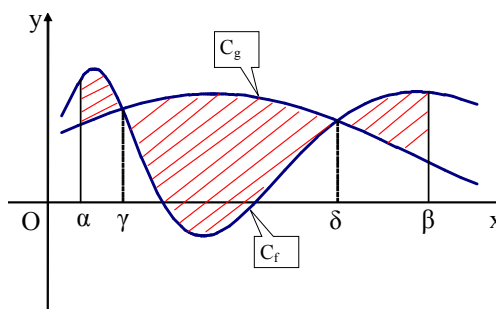
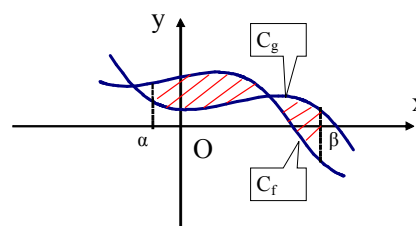
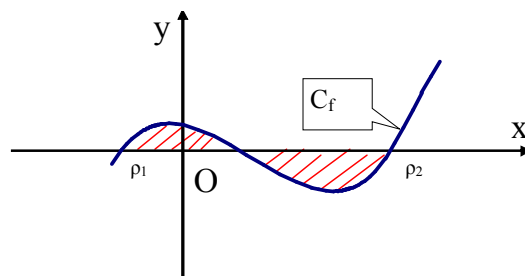
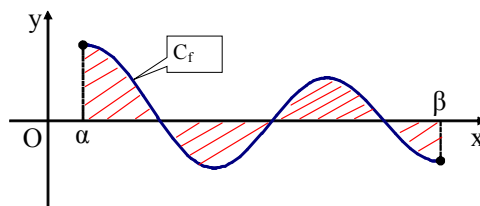
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και τις $x=a$, $x=\beta$ είναι:

$$E = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx$$

- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g είναι:

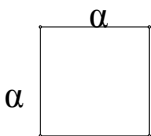
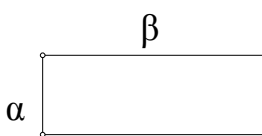
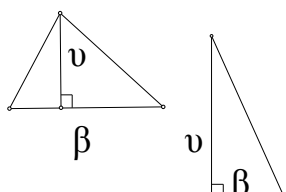
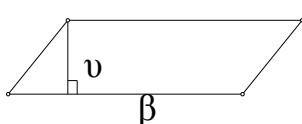
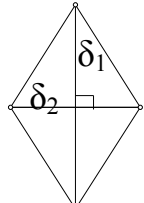
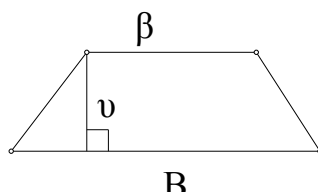
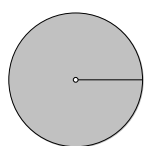
$$E = \int_{\rho_1}^{\rho_2} |f(x) - g(x)| dx$$

Όπου ρ_1 η μικρότερη και ρ_2 η μεγαλύτερη ρίζα της $f(x)=g(x)$



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

♦ Επίπεδα Σχήματα

α/α	Ονομασία	Σχήμα	Εμβαδόν
1.	Τετράγωνο		$E = \alpha^2$
2.	Ορθογώνιο		$E = \alpha \cdot \beta$
3.	Τρίγωνο		$E = \frac{1}{2} \beta \cdot \nu$
4.	Παραλληλόγραμμο		$E = \beta \cdot \nu$
5.	Ρόμβος		$E = \frac{1}{2} \delta_1 \cdot \delta_2$
6.	Τραπεζίο		$E = \frac{\beta + B}{2} \cdot \nu$
7.	Κυκλικός Δίσκος		$E = \pi r^2$

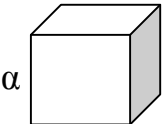
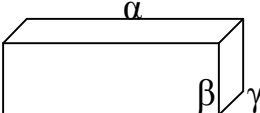
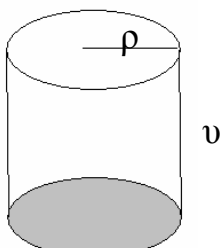
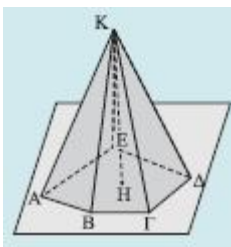
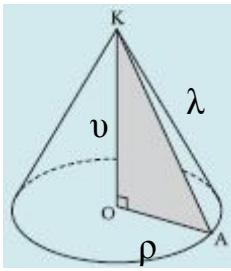
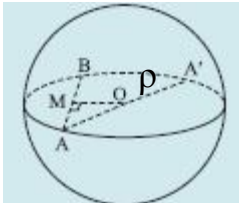
Για τη μέτρηση του κύκλου πρέπει ακόμη να ξέρουμε:

✓ $\Gamma = 2\pi r = \pi \delta$ (Γ = μήκος κύκλου)

✓ $S = \frac{\pi r \mu^0}{180^0}$ (S = μήκος τόξου μ^0)

✓ $E_{\text{κυκλικού τομέα}} = \frac{\pi r^2 \mu^0}{360^0}$

♦ **Στερεά**

α/α	Ονομασία	Σχήμα	Εμβαδόν	Όγκος
1.	Κύβος		$E=6\alpha^2$	$V=\alpha^3$
2.	Παραλληλεπίπεδο		$E=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$	$V=\alpha\beta\gamma$
3.	Κύλινδρος		$E_{\text{κυρτής}}=2\pi\rho v$ $E_{\text{ολικής}}=2\pi\rho(v+\rho)$	$V=\pi\rho^2 v$
4.	Πυραμίδα		$E_{\text{παραπλ.}}=\frac{1}{2}\Pi_{\beta}\cdot h$ $E_{\text{ολ.}}=E_{\text{παραπλ.}}+E_{\beta}$	$V=\frac{1}{3}E_{\beta}\cdot v$
5.	Κώνος		$E_{\text{κυρτής}}=\pi\rho\lambda$ $E_{\text{ολ.}}=\pi\rho\lambda+\pi\rho^2$	$V=\frac{1}{3}\pi\rho^2\cdot v$
6.	Σφαίρα		$E_{\text{σφαίρας}}=4\pi\rho^2$	$V=\frac{4}{3}\pi\rho^3$