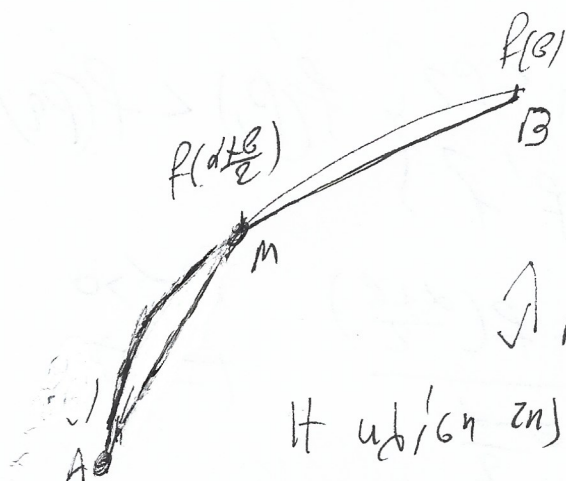


Jensen

(I)

Αν $f' \uparrow$ τότε $f(a) + f(b) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$



$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Η απόσταση της χορδής AM είναι μεγαλύτερη

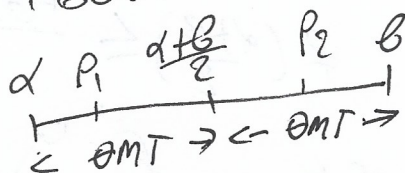
από την απόσταση της χορδής MB

1^ο αν $a=b$, τότε $\frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \Leftrightarrow$
 $\frac{2f(a)}{2} = f(a)$

Που ισχύει ως ισότητά

2^ο

αν $a < b$ τότε



→ Θεωρούμε την $f(x)$ στο $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ συνεχώς, $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ παραγωγίσιμη $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$

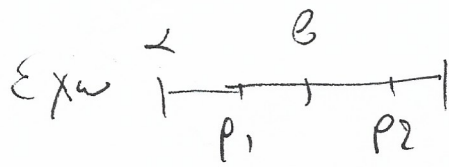
Από Θ.Μ.Τ υπάρχει $p_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ με

$$f'(p_1) = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\frac{a+b}{2} - a} = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\frac{b-a}{2}}$$

→ Θεωρούμε την $f(x)$ στο $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.

Από Θ.Μ.Τ υπάρχει $p_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$

$$\vdash \varepsilon \quad f'(p_2) = \frac{f(b) - f(\frac{a+b}{2})}{b - \frac{a+b}{2}} = \frac{f(b) - f(\frac{a+b}{2})}{\frac{b-a}{2}}$$



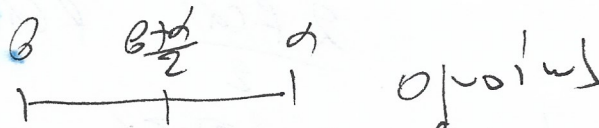
$$p_1 < p_2 \left\{ \begin{array}{l} f'(p_1) < f'(p_2) \\ f' \uparrow \end{array} \right\}$$

$$\frac{f(\frac{a+b}{2}) - f(a)}{\frac{b-a}{2}} < \frac{f(b) - f(\frac{a+b}{2})}{\frac{b-a}{2}} \quad \frac{b-a}{2} > 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$f(\frac{a+b}{2}) - f(a) < f(b) - f(\frac{a+b}{2}) \quad (\Rightarrow)$$

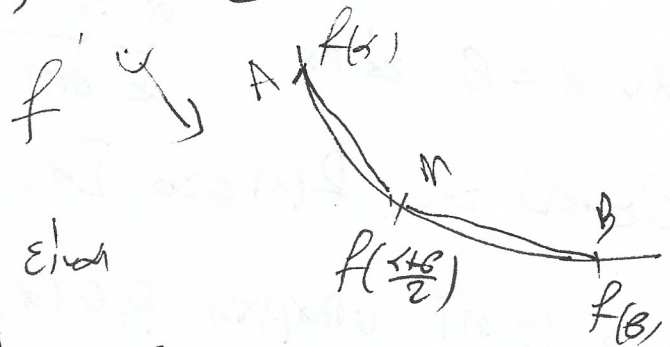
$$2 f(\frac{a+b}{2}) < f(a) + f(b) \quad \varepsilon \quad f(\frac{a+b}{2}) < \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

3) $b < a$



$$\text{Τελικά} \quad f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Β περίπτωση



Η περίπτωση της χορδής AM είναι

η υπόθεση από την υπόθεση

χορδής mB $\lambda_{AM} < \lambda_{AB}$

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \leq f(\frac{a+b}{2})$$

(ομοίως
από δεξιά)