

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο: ΚΡΟΥΣΕΙΣ - ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΚΡΟΥΣΕΙΣ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Σώμα Σ_1 μάζας m που κινείται προς τα δεξιά στη θετική κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου u συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα Σ_2 διπλάσιας μάζας.

Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 κατά την κρούση έχει αλγεβρική τιμή:

α) $-\frac{mu}{3}$.

β) $-\frac{2mu}{3}$.

γ) 0.

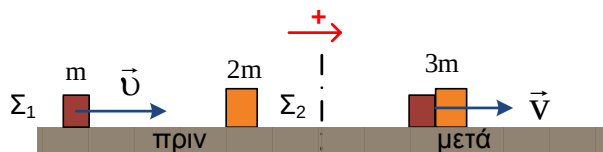
Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή λύση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Εφόσον έχουμε κρούση δύο σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$\vec{p}_{ολ}^{πριν} = \vec{p}_{ολ}^{μετά} \Rightarrow \vec{p}_1^{πριν} + \vec{p}_2^{πριν} = \vec{p}_{συσ.}^{μετά}$$



Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών

έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$mu + 0 = (m + 2m)v \Rightarrow mu = 3mv \Rightarrow v = \frac{u}{3} \quad (1)$$

όπου v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος.

Η μεταβολή της αλγεβρικής τιμής της ορμής του σώματος Σ_1 κατά την κρούση είναι:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_1^{μετά} - \vec{p}_1^{πριν} \Rightarrow \Delta p_1 = p_1^{μετά} - p_1^{πριν} \Rightarrow \Delta p_1 = mv - mu \xrightarrow{(1)} \Delta p_1 = m \frac{u}{3} - mu \Rightarrow \Delta p_1 = -\frac{2mu}{3}$$

Ερώτηση 2.

Ένα σώμα A που έχει μάζα m και ταχύτητα $\vec{v}_1$ συγκρούεται με άλλο σώμα B που έχει διπλάσια μάζα και ταχύτητα $\vec{v}_2$, αντίρροπη της $\vec{v}_1$. Από τη κρούση δημιουργείται συσσωμάτωμα που παραμένει ακίνητο στο σημείο της σύγκρουσης. Ο λόγος $\frac{v_1}{v_2}$ των μέτρων των ταχυτήτων των δύο σωμάτων πριν από την κρούση, είναι:

α) $1/2$.

β) 1 .

γ) 2 .

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή λύση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

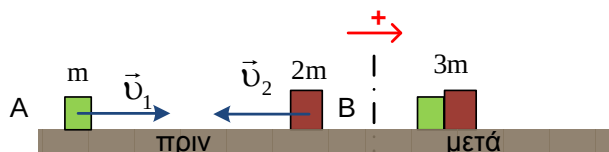
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Έστω $\vec{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος A και $\vec{v}_2$ η ταχύτητα του σώματος B. Εφόσον έχουμε κρούση δύο σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$\vec{p}_{ολ}^{πριν} = \vec{p}_{ολ}^{μετά} \Rightarrow \vec{p}_1^{πριν} + \vec{p}_2^{πριν} = \vec{p}_{συσ}^{μετά}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:



$$mv_1 - 2mv_2 = 0 \Rightarrow mv_1 = 2mv_2 \Rightarrow v_1 = 2v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 2$$

Ερώτηση 3.

Δύο σώματα Α και Β, με μάζες m και $3m$ αντίστοιχα, βρίσκονται ακίνητα πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Δίνουμε στο σώμα Α αρχική ταχύτητα $\vec{v}$ έτσι ώστε να κινηθεί προς τη θετική φορά και να συγκρουστεί κεντρικά και ελαστικά με το ακίνητο σώμα Β. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Β μετά την κρούση είναι

α) $-\frac{v}{2}$.

β) $\frac{v}{2}$.

γ) $\frac{v}{4}$.

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή λύση.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και το σώμα Β είναι αρχικά ακίνητο. Άρα η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Β μετά την κρούση δίνεται από τον τύπο:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1)$$

Αν αντικαταστήσουμε: $m_1=m$, $m_2=3m$, $v_1 = v$ στον τύπο (1) προκύπτει:

$$v'_2 = \frac{2m}{m + 3m} v \Rightarrow v'_2 = \frac{2m}{4m} v \Rightarrow v'_2 = \frac{v}{2}$$

Ερώτηση 4.

Σώμα Σ_1 μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ένα δεύτερο ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας m_2 . Αν ΔK_1 είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 και ΔK_2 είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 λόγω της ελαστικής κρούσης, τότε ισχύει

A) $\frac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = \frac{m_1}{m_2}$.

B) $\frac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = -1$.

Γ) $\frac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = 1$.

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή λύση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, άρα η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων διατηρείται:

$$K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} = K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} \Rightarrow K_1^{\text{μετά}} + K_2^{\text{μετά}} = K_1^{\text{πριν}} + K_2^{\text{πριν}} \Rightarrow K_1^{\text{μετά}} - K_1^{\text{πριν}} + K_2^{\text{μετά}} - K_2^{\text{πριν}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta K_1 + \Delta K_2 = 0 \Rightarrow \Delta K_1 = -\Delta K_2 \Rightarrow \frac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = -1$$

Ερώτηση 5.

Σώμα Σ_1 μάζας m_1 που κινείται προς τη θετική κατεύθυνση συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερο ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας m_2 . Η ποσότητα της κινητικής ενέργειας που έχει μεταφερθεί από το σώμα Σ_1 στο σώμα Σ_2 μετά την κρούση γίνεται μέγιστη όταν:

α) $m_1 < m_2$.

β) $m_1 = m_2$.

γ) $m_1 > m_2$.

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή Λύση.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα Σ_1 έχει ταχύτητα μέτρου v_1 και το σώμα Σ_2 είναι αρχικά ακίνητο. Άρα η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_2 μετά την

κρούση δίνεται από τον τύπο: $v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$ (1)

Επειδή το σώμα Σ_2 είναι αρχικά ακίνητο η ποσότητα της κινητικής ενέργειας που έχει μεταφερθεί από το σώμα Σ_1 στο Σ_2 μετά την κρούση είναι:

$$K_2^{\text{μετά}} = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow K_2^{\text{μετά}} = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right)^2 \Rightarrow K_2^{\text{μετά}} = \frac{1}{2} m_2 \frac{4m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_1^2 \quad (1)$$

Η ποσότητα αυτή γίνεται μέγιστη όταν:

$$K_2^{\text{μετά}} = K_1^{\text{πριν}} \xrightarrow{(1)} \frac{1}{2} m_2 \frac{4m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$(m_1 + m_2)^2 = 4m_1 m_2 \Rightarrow m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 = 4m_1 m_2 \Rightarrow m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 = 0 \Rightarrow$$

$$(m_1 - m_2)^2 = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$$

Ερώτηση 6.

Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 , εκ των οποίων η m_1 κινείται με ταχύτητα που έχει αλγεβρική τιμή u_1 ενώ η m_2 είναι ακίνητη, συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Μετά την κρούση η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας u_1' του σώματος m_1 θα δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha) u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1.$$

$$\beta) u_1' = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} u_1.$$

$$\gamma) u_1 = \frac{2m_1}{m_1 - m_2} u_1.$$

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Σε κάθε κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής.

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$\vec{p}_1(\text{πριν}) + \vec{p}_2(\text{πριν}) = \vec{p}_1(\text{μετά}) + \vec{p}_2(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$m_1 u_1 + 0 = m_1 u_1' + m_2 u_2' \Rightarrow$$

$$m_1 (u_1 - u_1') = m_2 u_2' \quad (1)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει και η Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας.

$$K_{ολ}(\text{πριν}) = K_{ολ}(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2' \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 \Rightarrow$$

$$m_1 (u_1^2 - u_1'^2) = m_2 u_2'^2 \Rightarrow$$

$$m_1 (u_1 - u_1')(u_1 + u_1') = m_2 u_2'^2 \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (1) και παίρνοντας υπόψη μας ότι $u_1' \neq u_1$ και $u_2' \neq u_2$, προκύπτει:

$$u_1 + u_1' = u_2' \quad (3)$$

Λύνουμε τώρα το σύστημα των εξισώσεων (1) και (3).

$$(1) \xrightarrow{(3)} m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_1 + v_1') \Rightarrow$$

$$m_1 v_1 - m_1 v_1' = m_2 v_1 + m_2 v_1' \Rightarrow$$

$$(m_1 - m_2) v_1 = (m_1 + m_2) v_1' \Rightarrow$$

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}$$

Ερώτηση 7.

Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι είναι δυνατόν η αρχική ορμή ενός συστήματος δύο σωμάτων που συγκρούονται ελαστικά να είναι μηδέν, και μετά την κρούση η τελική ορμή του συστήματος να είναι μηδέν ενώ η κινητική ενέργεια του συστήματος να είναι διάφορη του μηδενός. Ο παραπάνω ισχυρισμός:

α) Είναι ψευδής.

β) Είναι αληθής.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η ορμή είναι μέγεθος διανυσματικό. Αφού πριν την κρούση η ορμή του συστήματος είναι μηδέν, αυτό σημαίνει ότι οι ορμές των σωμάτων είναι αντίθετες.

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = 0$$

$$\vec{p}_1(\text{πριν}) + \vec{p}_2(\text{πριν}) = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{p}_2(\text{πριν}) = -\vec{p}_1(\text{πριν})$$

Η κινητική ενέργεια είναι μονόμετρο μέγεθος. Συνεπώς η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι διάφορη του μηδενός.

$$K_{ολ}(\text{πριν}) = K_1(\text{πριν}) + K_2(\text{πριν}) = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \neq 0$$

Σε κάθε κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής του συστήματος.

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$0 = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά})$$

Άρα και μετά την κρούση η ορμή του συστήματος θα είναι μηδέν. Πάλι οι ορμές των σωμάτων θα είναι αντίθετες.

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$0 = \vec{p}_1(\text{μετά}) + \vec{p}_2(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$\vec{p}_2(\text{μετά}) = -\vec{p}_1(\text{μετά})$$

Επειδή όμως η κρούση είναι ελαστική, ισχύει και η Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας του Συστήματος.

$$K_{ολ}(\text{πριν}) = K_{ολ}(\text{μετά})$$

Συνεπώς και η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι διάφορη του μηδενός.

Ερώτηση 8.

Σώμα μάζας $m_1=1$ kg κινείται προς τη θετική κατεύθυνση και προσπίπτει με ταχύτητα μέτρου $u_1=10$ m/s σε ακίνητη σφαίρα (2) μάζας m_2 και συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με αυτή. Μετά την κρούση η (1) κινείται με ταχύτητα μέτρου $u_1'=6$ m/s αλλά αντίθετης φοράς από την u_1 . Η μάζα του σώματος m_2 είναι:

α) $m_2=1$ kg.

β) $m_2=1/4$ kg.

γ) $m_2=4$ kg.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

$$u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \Rightarrow -6 = \frac{1 - m_2}{1 + m_2} 10 \Rightarrow -6 - 6m_2 = 10 - 10m_2 \Rightarrow 4m_2 = 16 \Rightarrow$$

$$m_2 = 4\text{kg}$$

Παρατήρηση: Πρέπει να προσέξετε να βάλετε το πρόσημο μείον (-) στην ταχύτητα u_1' .

Ερώτηση 9.

Σε μία ανελαστική κρούση μεταξύ δύο σωμάτων m_1 και m_2 , εκ των οποίων το m_2 είναι αρχικά ακίνητο, το ποσοστό της μεταβιβαζόμενης ενέργειας από το m_1 στο m_2 δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha) a\% = \frac{\Delta K_1}{K_1} 100\% .$$

$$\beta) a\% = \frac{K_2}{K_1} 100\% .$$

$$\gamma) a\% = \frac{\Delta K_{ολ.}}{K_1} 100\% .$$

όπου ΔK_1 η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του πρώτου σώματος, K_2 η κινητική ενέργεια του δεύτερου σώματος και $\Delta K_{ολ.}$ η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Προσοχή: Αφού η κρούση των δύο σωμάτων είναι ανελαστική δεν ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας.

Η κινητική ενέργεια που απέκτησε το m_2 μετά την κρούση δεν ισούται με την κινητική ενέργεια που έχασε το m_1 . Ένα μέρος μεταφέρθηκε σαν θερμότητα στο περιβάλλον.

Από την ενέργεια K_1 που είχε το m_1 δόθηκε στο m_2 ενέργεια K_2 .

Από τα 100% a%

Με την απλή μέθοδο των τριών προκύπτει:

$$a\% = \frac{K_2}{K_1} 100\%$$

Ερώτηση 10.

Κατά τη μετωπική ελαστική κρούση δύο σωμάτων m_1 και m_2 εκ των οποίων η m_2 είναι ακίνητη το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της m_1 (επί της αρχικής κινητικής ενέργειάς της) είναι -36%. Ο λόγος $\frac{m_1}{m_2}$ είναι:

α) $\frac{m_1}{m_2} = 9$ ή $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{9}$.

β) $\frac{m_1}{m_2} = 4$ ή $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{4}$.

γ) $\frac{m_1}{m_2} = 2$ ή $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Είναι γνωστό από τη θεωρία ότι μετά την ελαστική μετωπική κρούση δύο σωμάτων εκ των οποίων το ένα ήταν ακίνητο, τα δύο σώματα θα αποκτήσουν ταχύτητες:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \text{ και } v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1, \text{ όπου } u_1 \text{ και } v'_1 \text{ η αρχική και τελική ταχύτητα}$$

αντίστοιχα του αρχικά κινούμενου σώματος μάζας m_1 , ενώ u_2 και v'_2 η αρχική και τελική ταχύτητα αντίστοιχα του αρχικά ακίνητου σώματος μάζας m_2 .

Από τα δεδομένα προκύπτει:

$$K_1(\text{τελ}) = K_1(\text{αρχ}) - \frac{36}{100} K_1(\text{αρχ}) \Rightarrow K_1(\text{τελ}) = \frac{64}{100} K_1(\text{αρχ}) \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{64}{100} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow$$

$$v'_1 = \pm \frac{8}{10} v_1 \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \pm \frac{8}{10} v_1 \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \pm \frac{8}{10}$$

1^η περίπτωση:

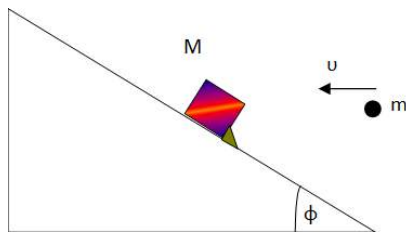
$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = + \frac{8}{10} \Rightarrow 10m_1 - 10m_2 = 8m_1 + 8m_2 \Rightarrow 2m_1 = 18m_2 \Rightarrow m_1 = 9m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 9$$

2^η περίπτωση:

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = -\frac{8}{10} \Rightarrow 10m_1 - 10m_2 = -8m_1 - 8m_2 \Rightarrow 18m_1 = 2m_2 \Rightarrow 9m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{9}$$

Ερώτηση 11.

Το βλήμα μάζας m του σχήματος κινείται παράλληλα με το οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται πλαστικά με το κιβώτιο μάζας M που ισορροπεί με τη βοήθεια μικρού εμποδίου πάνω σε λείο ακλόνητο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης ϕ .



Αν η ταχύτητα του βλήματος έχει μέτρο u , τότε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση θα είναι:

α) $V_K = \frac{mu}{(m+M)}$.

β) $V_K = \frac{mu \sin \phi}{(m+M)}$.

γ) $V_K = \frac{mu \eta \mu \phi}{(m+M)}$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Όπως είναι γνωστό, από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα σε γενικευμένη μορφή προκύπτει:

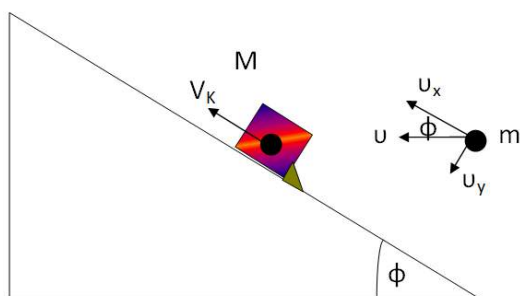
$$\Sigma \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta \vec{p} = \Sigma \vec{F} \cdot \Delta t \Rightarrow \vec{p}_{ολ}(\text{τελ}) - \vec{p}_{ολ}(\text{αρχ}) = \Sigma \vec{F} \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$\vec{p}_{ολ}(\text{τελ}) = \vec{p}_{ολ}(\text{αρχ}) + \Sigma \vec{F} \cdot \Delta t \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) παρατηρούμε ότι η ορμή ενός συστήματος διατηρείται μόνο αν η συνισταμένη των δυνάμεων στο σύστημα ή το χρονικό διάστημα που διαρκεί το φαινόμενο, τείνουν στο μηδέν.

Στην περίπτωση μας αυτό δεν συμβαίνει γιατί στη διάρκεια της κρούσης αναπτύσσεται μία τεράστια κάθετη αντίδραση από το κεκλιμένο επίπεδο.

Μπορούμε όμως να εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής στον άξονα $x'x$ για το μικρό χρονικό διάστημα της κρούσης.



$$\vec{p}_{ολ}^{(x)}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}^{(x)}(\text{μετά}) \Rightarrow \vec{p}_m^{(x)} + \vec{p}_M^{(x)} = \vec{p}_m'^{(x)} + \vec{p}_M'^{(x)}$$

Επιλέγοντας θετική φορά προς τα πάνω, γράφουμε την παραπάνω σχέση αλγεβρικά:

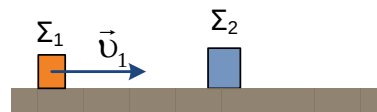
$$m u_x + 0 = (m + M) V_K \Rightarrow V_K = \frac{m u \sin \phi}{(m + M)}$$

Στον άξονα $y'y$ δεν ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής για τους λόγους που αναφέραμε.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Σώμα Σ_1 με μάζα $m_1 = 2\text{kg}$ και ταχύτητα μέτρου $v_1 = 20\text{m/s}$, κινείται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές, προς τη θετική κατεύθυνση, όπως στο σχήμα. Το σώμα Σ_1 συγκρούεται με σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3\text{kg}$ που αρχικά είναι ακίνητο. Η κρούση οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων. Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

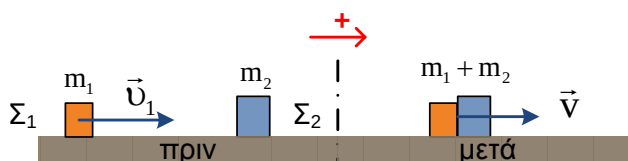


Να υπολογίσετε:

- α) την ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται μετά την κρούση.
- β) την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.
- γ) το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 που μεταφέρθηκε στο σώμα Σ_2 .
- δ) τη μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 .

Λύση

α) Έστω $\vec{V}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται αμέσως μετά την κρούση. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων:



$$\vec{p}_{ολ}^{πριν} = \vec{p}_{ολ}^{μετά} \Rightarrow \vec{p}_1^{πριν} + \vec{p}_2^{πριν} = \vec{p}_{συσ}^{μετά} \quad (1)$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η εξίσωση (1) γράφεται αλγεβρικά:

$$m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει $V = \frac{2\text{kg} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{kg} + 3\text{kg}} \Rightarrow V = \frac{40 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5} \Rightarrow V = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

β) Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο.

Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση είναι:

$$E_{\alpha\pi} = E_{\mu\eta\chi}^{\pi\rho\nu} - E_{\mu\eta\chi}^{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow E_{\alpha\pi} = (K_{\sigma\lambda}^{\pi\rho\nu} + U_{\sigma\lambda}^{\pi\rho\nu}) - (K_{\sigma\lambda}^{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} + U_{\sigma\lambda}^{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}}) \xrightarrow{U_{\sigma\lambda}^{\pi\rho\nu} = U_{\sigma\lambda}^{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} = 0} E_{\alpha\pi} = K_{\sigma\lambda}^{\pi\rho\nu} - K_{\sigma\lambda}^{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow$$

$$E_{\alpha\pi} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$E_{\alpha\pi} = \frac{1}{2}2\text{Kg}\left(20\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{1}{2}5\text{kg}\left(8\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow E_{\alpha\pi} = 400\text{J} - 160\text{J} \Rightarrow E_{\alpha\pi} = 240\text{J}$$

γ) Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 μετά τη κρούση είναι: $K_2^{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2}m_2V^2$ και η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 πριν την κρούση είναι: $K_1^{\pi\rho\nu} = \frac{1}{2}m_1v_1^2$.

Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 που μεταφέρθηκε στο σώμα Σ_2 είναι:

$$\frac{K_2^{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}}}{K_1^{\pi\rho\nu}} = \frac{\frac{1}{2}m_2V^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2} = \frac{m_2V^2}{m_1v_1^2}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:
$$\frac{K_2^{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}}}{K_1^{\pi\rho\nu}} = \frac{3\text{kg} \cdot \left(8\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\text{kg} \cdot \left(20\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = \frac{3 \cdot 64}{2 \cdot 400} = 0,24 \quad \text{ή} \quad 24\%$$

δ) Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 είναι: $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1^{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} - \vec{p}_1^{\pi\rho\nu}$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

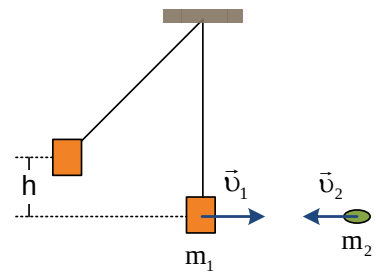
$$\Delta p_1 = p_1^{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} - p_1^{\pi\rho\nu} \Rightarrow \Delta p_1 = m_1V - m_1v_1 \Rightarrow \Delta p_1 = 2\text{kg} \cdot 8\frac{\text{m}}{\text{s}} - 2\text{kg} \cdot 20\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_1 = 16\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} - 40\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\Delta p_1 = -24\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Άρα η ορμή του σώματος Σ_1 ελαττώνεται κατά: $\Delta p_1 = 24\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$

Άσκηση 2.

Σώμα μάζας $m_1 = 0,9 \text{ kg}$ που είναι προσδεμένο στο άκρο τεντωμένου νήματος μήκους $L = 2\text{m}$, αφήνεται ελεύθερο από ύψος h , όπως φαίνεται στο σχήμα. Όταν το νήμα βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση, το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου $v_1 = 2\text{m/s}$ και συγκρούεται πλαστικά με βλήμα μάζας $m_2 = 0,1\text{kg}$ και ταχύτητας μέτρου $v_2 = 48\text{m/s}$ με φορά προς το σώμα. Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.



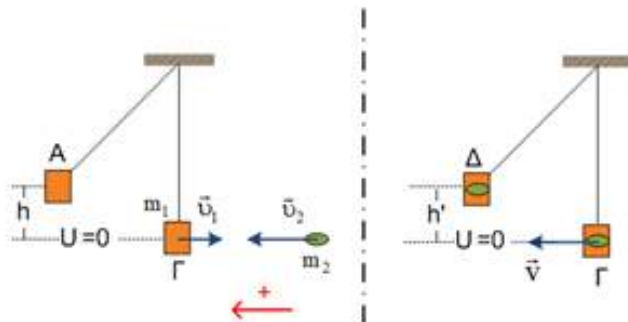
Να υπολογίσετε:

- το ύψος h από το οποίο αφέθηκε ελεύθερο το σώμα μάζας m_1 .
- το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος που δημιουργείται μετά την κρούση.
- το ύψος h' στο οποίο θα φτάσει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.
- τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά τη κρούση. Σε τι μορφή ενέργειας μετατράπηκε αυτή;

Δίνεται: $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

α) Στο σώμα πριν από την κρούση η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, που είναι συντηρητική δύναμη. Άρα ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας το οποίο εφαρμόζουμε για τις θέσεις Α και Γ του σώματος.



(Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο της σύγκρουσης).

$$E_{\text{μηχ.αρχ.}} = E_{\text{μηχ.τελ.}} \Rightarrow K_{\alpha} + U_{\alpha} = K_{\tau} + U_{\tau} \Rightarrow 0 + m_1gh = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + 0 \Rightarrow h = \frac{v_1^2}{2g}$$

$$\text{Με αντικατάσταση προκύπτει: } h = \frac{\left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow h = 0,2\text{m}$$

β) Έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται αμέσως μετά τη κρούση. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων:

$$\vec{p}_{ολ}^{πριν} = \vec{p}_{ολ}^{μετά} \Rightarrow \vec{p}_1^{πριν} + \vec{p}_2^{πριν} = \vec{p}_{συσ}^{μετά}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα αριστερά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$-m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$V = \frac{0,1\text{kg} \cdot 48 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0,9\text{kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,9\text{kg} + 0,1\text{kg}} \Rightarrow V = \frac{4,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1} \Rightarrow V = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Στο συσσωμάτωμα μετά τη κρούση η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, που είναι συντηρητική δύναμη. Άρα ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας το οποίο εφαρμόζουμε για τις θέσεις Γ και Δ.

(Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο της σύγκρουσης).

$$E_{μηχ.αρχ.} = E_{μηχ.τελ.} \Rightarrow K_{\alpha} + U_{\alpha} = K_{\tau} + U_{\tau} \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + 0 = 0 + (m_1 + m_2)gh' \Rightarrow h' = \frac{V^2}{2g}$$

$$\text{Με αντικατάσταση προκύπτει: } h' = \frac{\left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow h' = 0,45\text{m}$$

δ) Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά τη κρούση είναι:

$$E_{απ} = E_{μηχ}^{πριν} - E_{μηχ}^{μετά} \Rightarrow E_{απ} = (K_{ολ}^{πριν} + U_{ολ}^{πριν}) - (K_{ολ}^{μετά} + U_{ολ}^{μετά}) \xrightarrow{U_{ολ}^{πριν} = U_{ολ}^{μετά} = 0} E_{απ} = K_{ολ}^{πριν} - K_{ολ}^{μετά} \Rightarrow$$

$$E_{απ} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2$$

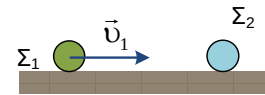
Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$E_{απ} = \frac{1}{2}0,9\text{Kg} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{1}{2}0,1\text{kg} \left(48 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{1}{2}1\text{kg} \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow E_{απ} = 1,8\text{J} + 115,2\text{J} - 4,5\text{J} \Rightarrow E_{απ} = 112,5\text{J}$$

Η ενέργεια αυτή μετατράπηκε κατά την κρούση σε θερμότητα.

Άσκηση 3.

Σώμα Σ_1 μάζας m_1 κινούμενο προς τη θετική φορά σε λείο οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 8 \text{ m/s}$ κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2 . Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.



Αμέσως μετά την κρούση, το σώμα μάζας m_1 κινείται αντίρροπα με ταχύτητα μέτρου $v_1' = 4 \text{ m/s}$. Να υπολογίσετε:

α) το λόγο των μαζών $\frac{m_2}{m_1}$.

β) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση.

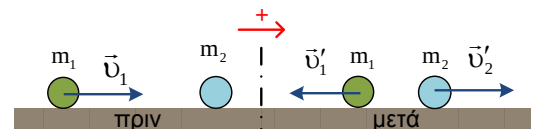
γ) το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_1 που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας m_2 λόγω της κρούσης.

δ) την αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής των δύο σωμάτων, αν $m_2 = 2 \text{ kg}$. Τι παρατηρείτε;

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

α) Ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά. Άρα $v_1' = 4 \text{ m/s}$.



Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα Σ_1 έχει ταχύτητα μέτρου $v_1 = 8 \text{ m/s}$ και το σώμα Σ_2 είναι αρχικά ακίνητο. Άρα η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v_1' του σώματος Σ_1 μετά την κρούση δίνεται από τον τύπο:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1)$$

και η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v_2' του σώματος Σ_2 μετά την κρούση δίνεται από τον

$$\text{τύπο: } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2)$$

$$\text{Ονομάζουμε το λόγο } \frac{m_2}{m_1} = \lambda \text{ οπότε } m_2 = \lambda \cdot m_1 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (3) προκύπτει:

$$v'_1 = \frac{m_1 - \lambda m_1}{m_1 + \lambda m_1} v_1 \Rightarrow v'_1 = \frac{m_1(1-\lambda)}{m_1(1+\lambda)} v_1 \Rightarrow v'_1 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} v_1 \Rightarrow v'_1 + \lambda v'_1 = v_1 - \lambda v_1 \Rightarrow$$

$$\lambda(v_1 + v'_1) = v_1 - v'_1 \Rightarrow \lambda = \frac{v_1 - v'_1}{v_1 + v'_1}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει: $\lambda = \frac{8\frac{m}{s} - (-4\frac{m}{s})}{8\frac{m}{s} + (-4\frac{m}{s})} \Rightarrow \lambda = \frac{12}{4} \Rightarrow \lambda = 3$

Δηλαδή $\frac{m_2}{m_1} = 3$

β) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση θα υπολογιστεί από τη σχέση (2): $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$

Με αντικατάσταση $m_2 = 3m_1$ προκύπτει: $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + 3m_1} v_1 \Rightarrow v'_2 = \frac{2m_1}{4m_1} v_1 \Rightarrow v'_2 = \frac{v_1}{2}$ (4)

και αντικαθιστώντας $v_1 = 8 \text{ m/s}$ προκύπτει: $v'_2 = \frac{8\frac{m}{s}}{2} \Rightarrow v'_2 = 4\frac{m}{s}$

γ) Επειδή το σώμα μάζας m_2 είναι πριν την κρούση ακίνητο, το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_1 που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας m_2 λόγω της κρούσης είναι:

$$\frac{K_2^{\text{μετά}}}{K_1^{\text{πριν}}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}$$

Με αντικατάσταση $m_2 = 3m_1$ και $v'_2 = 4 \text{ m/s}$ προκύπτει :

$$\frac{K_2^{\text{μετά}}}{K_1^{\text{πριν}}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{\frac{1}{2} 3m_1 \left(4\frac{m}{s}\right)^2}{\frac{1}{2} m_1 \left(8\frac{m}{s}\right)^2} = \frac{3 \cdot 16}{64} = 0,75 \text{ ή } 75\%$$

δ) Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 είναι: $\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_2^{\text{μετά}} - \vec{p}_2^{\text{πριν}}$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_2 = m_2 v'_2 - m_2 v_2 \xrightarrow{v_2=0} \Delta p_2 = m_2 v'_2 - 0 \Rightarrow \Delta p_2 = m_2 v'_2$$

Με αντικατάσταση προκύπτει: $\Delta p_2 = 2\text{kg} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_2 = 8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$

Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 είναι: $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_1^{\text{μετά}} - \vec{p}_1^{\text{πριν}}$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_1 = m_1 v'_1 - m_1 v_1 \Rightarrow \Delta p_1 = m_1 (v'_1 - v_1)$$

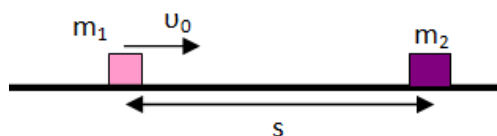
Είναι $\frac{m_2}{m_1} = 3 \Rightarrow m_1 = \frac{m_2}{3} \Rightarrow m_1 = \frac{2}{3} \text{kg}$

οπότε με αντικατάσταση προκύπτει: $\Delta p_1 = \frac{2}{3} \text{kg} \cdot (-4 - 8) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_1 = -8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$

Παρατηρούμε ότι οι δύο μεταβολές είναι αντίθετες.

Άσκηση 4.

Το σώμα μάζας $m_1 = 2\text{kg}$ του παρακάτω σχήματος βάλλεται με αρχική ταχύτητα $u_0 = 10\text{m/s}$ πάνω σε οριζόντιο δάπεδο που παρουσιάζει συντελεστή τριβής $\mu = 0,2$. Αφού διανύσει απόσταση $s = 9\text{m}$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 6\text{kg}$ που είναι αρχικά ακίνητο.



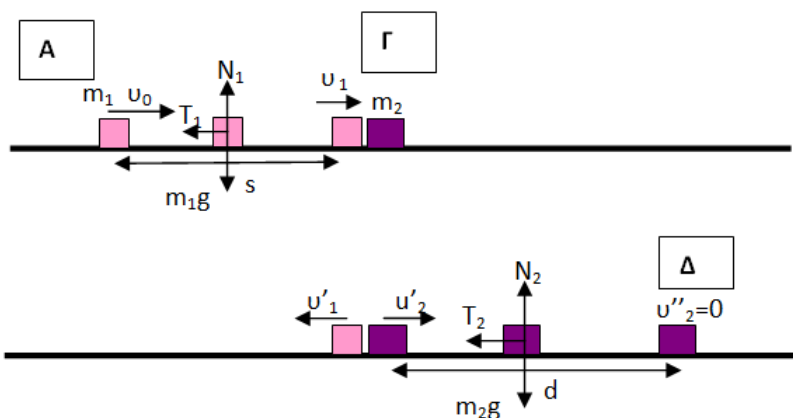
Να βρείτε:

- την ταχύτητα του σώματος μάζας m_1 λίγο πριν την κρούση.
- τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.
- το ποσοστό της ενέργειας του σώματος m_1 που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας m_2 .
- το διάστημα d που θα διανύσει το σώμα μάζας m_2 μέχρι να σταματήσει.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

α) Φαινόμενο 1^ο: Κίνηση του m_1 από το Α στο Γ.



Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας.

$$K_{\Gamma} - K_A = W_{B_1} + W_N + W_{T_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = 0 + 0 + T_1 \cdot s \cdot \cos 180^\circ \xrightarrow{T_1 = \mu m_1 g}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\mu m_1 g s$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = -\mu g s \Rightarrow v_1^2 = v_0^2 - 2\mu g s \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g s} \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{100 - 2 \cdot 0,2 \cdot 10 \cdot 9} \text{ m/s} = \sqrt{100 - 36} \text{ m/s} = \sqrt{64} \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$v_1 = 8 \text{ m/s}$$

β) Φαινόμενο 2^ο: Κρούση του m_1 με το m_2 . Θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά.

Επειδή η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική ισχύουν οι τύποι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ και } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 - 6}{2 + 6} 8 \text{ m/s} \Rightarrow v_1' = -4 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 \cdot 2}{2 + 6} 8 \text{ m/s} \Rightarrow v_2' = 4 \text{ m/s}$$

γ) Λίγο πριν την κρούση το σώμα μάζας m_1 είχε κινητική ενέργεια:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8^2 \text{ J} \Rightarrow K_1 = 64 \text{ J}$$

Αμέσως μετά την κρούση το σώμα μάζας m_2 έχει κινητική ενέργεια:

$$K_2' = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4^2 \text{ J} \Rightarrow K_2' = 48 \text{ J}$$

Το ποσοστό της ενέργειας του σώματος m_1 που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας m_2 είναι:

$$e\% = \frac{K_2'}{K_1} 100\% = \frac{48}{64} 100\% \Rightarrow e\% = 75\%$$

δ) Φαινόμενο 3^ο: Κίνηση του m_2 από το Γ στο Δ.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας.

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = W_{B_2} + W_N + W_{T_2} \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 0 + 0 + T_2 d \cos 180^\circ \xrightarrow{T_2 = \mu m_2 g}$$

$$-\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g d \Rightarrow$$

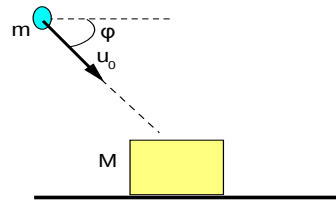
$$-\frac{1}{2} v_2'^2 = -\mu g d \Rightarrow$$

$$d = \frac{v_2'^2}{2\mu g} = \frac{16}{2 \cdot 0,2 \cdot 10} \text{ m} \Rightarrow$$

$$d = 4 \text{ m}$$

Άσκηση 5.

Ένας ξύλινος κύβος μάζας $M=0,9\text{kg}$ ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα μικρό βλήμα μάζας $m=0,1\text{kg}$ το οποίο, λίγο πριν να συγκρουστεί, κινείται με ταχύτητα μέτρου $u_0=50\text{m/s}$, σχηματίζοντας με τον ορίζοντα γωνία φ , σφηνώνεται στον κύβο. Να υπολογίσετε:

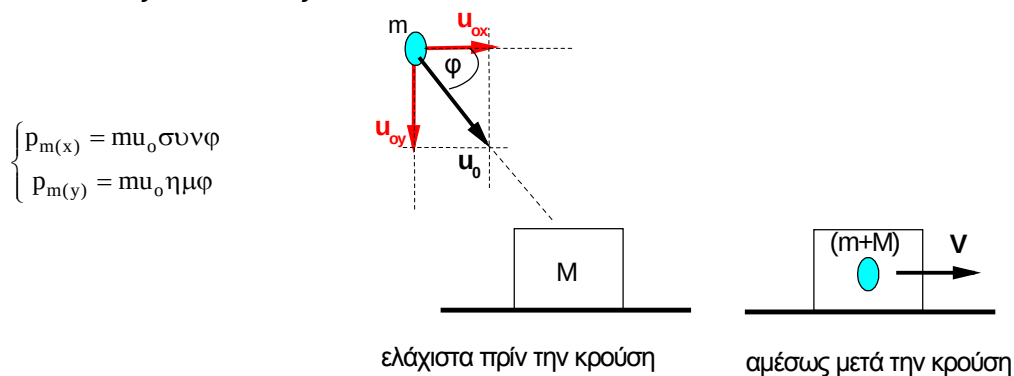


- την ταχύτητα V του συσσωματώματος.
- τη θερμότητα που αναπτύχθηκε κατά την κρούση.
- το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας του βλήματος το οποίο μεταφέρθηκε στον κύβο.
- τη μεταβολή της ορμής του συστήματος των σωμάτων κατά την κρούση.

Δίνονται: $\eta\mu\varphi=0,6$, $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,8$.

Λύση

α) Η κρούση είναι πλάγια και πλαστική ενώ το συσσωμάτωμα μετά την κρούση θα κινηθεί οριζόντια. Στην οριζόντια διεύθυνση δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις άρα η ορμή του συστήματος των σωμάτων θα διατηρείται σε αυτή τη διεύθυνση. Στην κατακόρυφη διεύθυνση ο κύβος δέχεται δύναμη από το δάπεδο άρα σε αυτή τη διεύθυνση η ορμή του συστήματος των σωμάτων δεν διατηρείται. Για να εξετάσουμε την ορμή του συστήματος ανά άξονα αναλύουμε την ορμή του m ελάχιστα πριν την κρούση σε κάθετες συνιστώσες:



Στην οριζόντια διεύθυνση η διατήρηση της ορμής του συστήματος των σωμάτων γράφεται:

$$\vec{p}_{m(x)} + \vec{p}_{M(x)} = \vec{p}_{(m+M)(x)} \Rightarrow mu_0 \sigma\upsilon\nu\varphi = (m+M)V \Rightarrow V = \frac{mu_0 \sigma\upsilon\nu\varphi}{m+M} \Rightarrow V = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Το ποσό θερμότητας που αναπτύσσεται ισούται με τη μείωση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων κατά την κρούση τους. Δηλαδή:

$$Q = E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} - E_{\mu\eta\chi(\tau\epsilon\lambda)} \Rightarrow Q = K_{(\alpha\rho\chi)} - K_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}mu_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 \Rightarrow Q = 117J$$

γ) Ο κύβος αποκτά κατά την κρούση ενέργεια: $\frac{1}{2}MV^2$ άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\Pi\% = \frac{\frac{1}{2}MV^2}{\frac{1}{2}mu_0^2} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot 4^2 \text{ J}}{\frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 50^2 \text{ J}} \cdot 100\% = 5,76\%$$

δ) Η ορμή του συστήματος διατηρείται στον οριζόντιο άξονα όπως εξηγήσαμε προηγουμένως. Αντίθετα στον κατακόρυφο άξονα δε διατηρείται. Συνεπώς:

$$\Delta \vec{p} = \Delta \vec{p}_y = \vec{p}_{y(m+M)} - (\vec{p}_{y(m)\alpha\rho\chi} + \vec{p}_{y(M)\alpha\rho\chi}) \Rightarrow \Delta \vec{p} = -\vec{p}_{y(m)\alpha\rho\chi} \Rightarrow \Delta p = -mu_o \eta \mu \varphi \Rightarrow$$

$$\Delta p = -3\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Άσκηση 6.

Ένας ξύλινος κύβος μάζας $M = 4,5\text{kg}$ είναι δεμένος στο άκρο ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους $L = 0,2\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε οροφή. Ο κύβος ηρεμεί με το νήμα κατακόρυφο. Ένα βλήμα μάζας $m = 0,5\text{kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $u_0 = 20\text{m/s}$ και συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με τον κύβο. Να υπολογίσετε:

- το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
- το ποσό θερμότητας που αναπτύσσεται κατά την κρούση των σωμάτων.
- τη μέγιστη ανύψωση που επιτυγχάνει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.
- την τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση των σωμάτων.

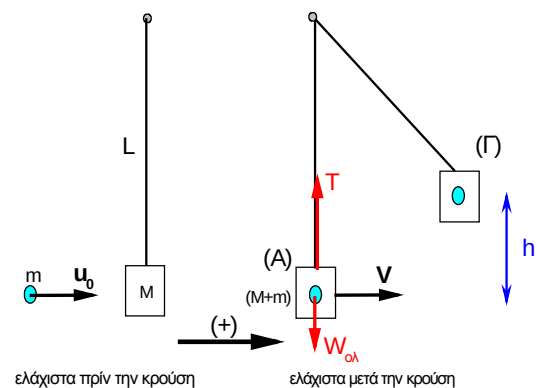
Δίνεται $g = 10\text{ m/s}^2$.

Λύση

α) Κατά την κρούση η ορμή του συστήματος των σωμάτων διατηρείται σταθερή, άρα:

$$\vec{p}_m + \vec{p}_M = \vec{p}'_{(m+M)} \Rightarrow$$

$$mu_0 + 0 = (m + M)V \Rightarrow V = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



β) Το ποσό θερμότητας Q που αναπτύσσεται κατά την κρούση είναι ίσο με τη μείωση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων. Άρα: $Q = E_{\text{μηχ}}(\alpha\rho\chi) - E_{\text{μηχ}}(\text{τελ})$

Η κρούση διαρκεί ελάχιστα, άρα η δυναμική ενέργεια του συστήματος δε μεταβάλλεται. Συνεπώς:

$$Q = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2}mu_0^2 - \frac{1}{2}(m + M)V^2 \Rightarrow Q = 90\text{J}$$

γ) Στο σχήμα η θέση (Γ) είναι το υψηλότερο σημείο που φτάνει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση, άρα η ταχύτητα του σε αυτή τη θέση μηδενίζεται στιγμιαία. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας από τη θέση (Α) έως τη θέση (Γ):

$$K_{(m+M)(\Gamma)} - K_{(m+M)(A)} = W_w + W_T \quad (1)$$

Η τάση του νήματος είναι κάθετη στην τροχιά του συσσωματώματος άρα $W_T = 0$. Η (1) γράφεται:

$$0 - \frac{1}{2}(m + M)V^2 = -(m + M)gh \Rightarrow h = \frac{V^2}{2g} \Rightarrow h = 0,2\text{m} \quad (2)$$

Άρα το νήμα γίνεται οριζόντιο, αφού $h=L$.

δ) Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση διαγράφει τμήμα κυκλικής τροχιάς, άρα η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται το συσσωμάτωμα στην ακτινική διεύθυνση έχει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Συνεπώς αμέσως μετά την κρούση θα ισχύει:

$$\Sigma F = F_{\kappa} \Rightarrow T - W_{\text{ολ}} = (m + M)\frac{V^2}{L} \Rightarrow T = (m + M)g + (m + M)\frac{V^2}{L} \Rightarrow T = 150\text{N}$$

Άσκηση 7.

Μικρή σφαίρα Σ_1 , μάζας $m_1 = 2\text{kg}$ που κινείται πάνω σε λείο επίπεδο με ταχύτητα $u_1 = 10\text{m/s}$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2 μάζας $m_2 = 8\text{kg}$. Να υπολογίσετε:

α) τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.

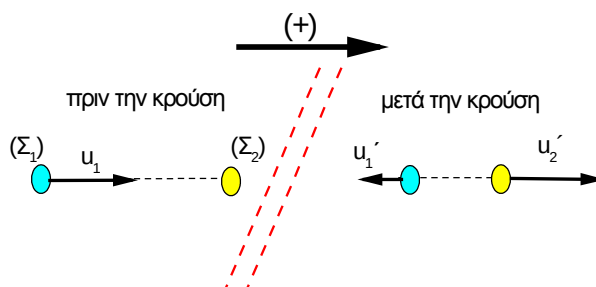
β) τη μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας καθώς και τη μεταβολή της ορμής του συστήματος των σφαιρών.

γ) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 .

δ) το ποσοστό επί τοις εκατό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_1 που μεταφέρθηκε κατά την κρούση στη σφαίρα Σ_2 .

Λύση

α) Στην περίπτωση αυτή αντιμετωπίζουμε την κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών, εκ των οποίων η μία είναι αρχικά ακίνητη. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις που εφαρμόζουμε είναι:

$$\begin{cases} u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \\ u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 \end{cases} \Rightarrow$$


$$\begin{cases} u_1' = \frac{2-8}{8+2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ u_2' = \frac{2 \cdot 2}{8+2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' = -6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ u_2' = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

Το πρόσημο (-) της u_1' δηλώνει ότι η σφαίρα Σ_1 μετά την κρούση κινείται προς τα αριστερά.

β) Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta \vec{P}_1 = \vec{P}_1' - \vec{P}_1 \Rightarrow \Delta \vec{P}_1 = m_1 \vec{u}_1' - m_1 \vec{u}_1 \Rightarrow \Delta P_1 = 2\text{kg} \cdot \left(-6 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \Rightarrow \Delta P_1 = -32\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Αντίστοιχα για τη μεταβολή της σφαίρας Σ_2 έχουμε:

$$\Delta \vec{P}_2 = \vec{P}_2' - \vec{P}_2 \Rightarrow \Delta \vec{P}_2 = m_2 \vec{u}_2' - 0 \Rightarrow \Delta P_2 = 8\text{kg} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 32\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τη μεταβολή της ορμής του συστήματος των σφαιρών έχουμε:

$$\Delta \vec{P}_{ολ} = \Delta \vec{P}_1 + \Delta \vec{P}_2 \Rightarrow \Delta \vec{P}_{ολ} = -32\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} + 32\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta \vec{P}_{ολ} = 0$$

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο αφού η ορμή του συστήματος των σωμάτων διατηρείται, άρα θα πρέπει:

$$\Delta \vec{P}_{ολ} = 0$$

γ) Η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_1 μεταβλήθηκε κατά:

$$\Delta K_1 = K'_1 - K_1 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \Rightarrow$$

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\text{kg} \cdot \left[\left(-6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right] \Rightarrow \Delta K_1 = -64\text{J}$$

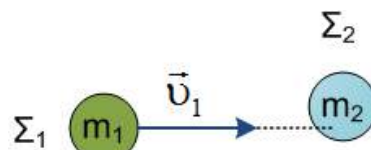
δ) Η κρούση είναι ελαστική άρα η μείωση της ενέργειας του Σ_1 κατά την κρούση ισούται με την ενέργεια που μεταφέρεται στο Σ_2 . Το ζητούμενο ποσοστό ισούται με:

$$\Pi\% = \frac{K_1 - K'_1}{K_1} \cdot 100\% = \frac{-\Delta K_1}{\frac{1}{2} m_1 u_1^2} \cdot 100\% = \frac{64\text{J}}{100\text{J}} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi\% = 64\%$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Σφαίρα Σ_1 μάζας $m_1 = m$ κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 6 \text{ m/s}$ και συγκρούεται με άλλη σφαίρα Σ_2 μάζας $m_2 = 2m$, που είναι αρχικά ακίνητη. Η κρούση είναι έκκεντρη και ελαστική και η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα. Μετά την κρούση, η σφαίρα Σ_1 κινείται με ταχύτητα $\vec{v}'_1$ που έχει διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση της $\vec{v}_1$. Να υπολογιστεί:

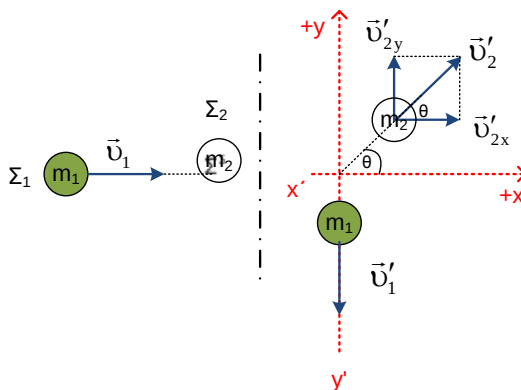


- α) το μέτρο και η διεύθυνση της ταχύτητας $\vec{v}'_2$ της σφαίρας Σ_2 , μετά την κρούση.
- β) το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας Σ_1 , μετά την κρούση.
- γ) το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας μάζας m_1 που μεταβιβάστηκε στη σφαίρα μάζας m_2 λόγω της κρούσης.
- δ) το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Σ_1 κατά τη κρούση, αν $m_2 = 2 \text{ kg}$.

Δίνεται η μαθηματική ιδιότητα $\eta \mu^2 \theta + \sigma \nu^2 \theta = 1$.

Λύση

α) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η πορεία των δύο σφαιρών μετά την έκκεντρη κρούση. Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}'_2$ σε δύο συνιστώσες οι οποίες έχουν μέτρα:



$$v'_{2x} = v'_2 \sigma \nu \theta \text{ και } v'_{2y} = v'_2 \eta \mu \theta$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για κάθε άξονα χωριστά:

$$x'x: \vec{p}_{\sigma\lambda,x}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{\sigma\lambda,x}^{\text{μετά}} \Rightarrow \vec{p}_{1,x}^{\text{πριν}} + \vec{p}_{2,x}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{1,x}^{\text{μετά}} + \vec{p}_{2,x}^{\text{μετά}}$$

Επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$m_1 v_1 + 0 = 0 + m_2 v'_{2x} \Rightarrow m_1 v_1 = m_2 v'_{2x} \xrightarrow{m_2=2m_1} \\ m_1 v_1 = 2m_1 v'_{2x} \Rightarrow v_1 = 2v'_{2x} \sigma \nu \theta \quad (1)$$

$$y'y: \vec{p}_{\sigma\lambda,y}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{\sigma\lambda,y}^{\text{μετά}} \Rightarrow \vec{p}_{1,y}^{\text{πριν}} + \vec{p}_{2,y}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{1,y}^{\text{μετά}} + \vec{p}_{2,y}^{\text{μετά}}$$

Επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα πάνω, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$0 = m_2 v'_{2y} - m_1 v'_1 \Rightarrow m_1 v'_1 = m_2 v'_{2y} \xrightarrow{m_2=2m_1} \\ m_1 v'_1 = 2m_1 v'_{2y} \Rightarrow v'_1 = 2v'_{2y} \Rightarrow v'_1 = 2v'_2 \eta \mu \theta \quad (2)$$

Υψώνουμε τις σχέσεις (1) και (2) στο τετράγωνο και τις προσθέτουμε κατά μέλη:

$$v_1^2 + v_1'^2 = 4v_2'^2 \sigma \nu \nu^2 \theta + 4v_2'^2 \eta \mu^2 \theta \Rightarrow v_1^2 + v_1'^2 = 4v_2'^2 (\sigma \nu \nu^2 \theta + \eta \mu^2 \theta) \Rightarrow v_1^2 + v_1'^2 = 4v_2'^2 \quad (3)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται.

$$K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} = K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} \Rightarrow K_1^{\text{πριν}} + K_2^{\text{πριν}} = K_1^{\text{μετά}} + K_2^{\text{μετά}} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} 2m v_2'^2 \Rightarrow$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + 2v_2'^2 \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (4) και (3):

$$2v_1^2 + v_1'^2 = v_1'^2 + 6v_2'^2 \Rightarrow v_1^2 = 3v_2'^2 \Rightarrow v_2' = \frac{v_1}{\sqrt{3}} \Rightarrow v_2' = \frac{6 \frac{m}{s}}{\sqrt{3}} \Rightarrow v_2' = \frac{6\sqrt{3}}{3} \frac{m}{s} \Rightarrow v_2' = 2\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

$$(1) \Rightarrow \sigma \nu \nu \theta = \frac{v_1}{2v_2'} \Rightarrow \sigma \nu \nu \theta = \frac{6 \frac{m}{s}}{4\sqrt{3} \frac{m}{s}} \Rightarrow \sigma \nu \nu \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

β) Αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4):

$$v_1'^2 = 2v_2'^2 - v_1'^2 \Rightarrow 2v_1'^2 = 2v_2'^2 \Rightarrow v_1'^2 = v_2'^2 \Rightarrow v_1' = v_2' \Rightarrow v_1' = v_2' = 2\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

γ) Επειδή η σφαίρα μάζας m_2 είναι ακίνητη πριν τη κρούση, το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας μάζας m_1 που μεταβιβάστηκε στη σφαίρα μάζας m_2 λόγω της κρούσης είναι:

$$\frac{K_2^{\text{μετά}}}{K_1^{\text{πριν}}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{2m_1 v_2'^2}{m_1 v_1^2} = \frac{2v_2'^2}{v_1^2} = \frac{2 \cdot \left(2\sqrt{3} \frac{m}{s}\right)^2}{\left(6 \frac{m}{s}\right)^2} = \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad 66,7\%$$

δ) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής: $\vec{p}_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} \Rightarrow$

$$\vec{p}_1^{\text{πριν}} + \vec{p}_2^{\text{πριν}} = \vec{p}_1^{\text{μετά}} + \vec{p}_2^{\text{μετά}} \Rightarrow \vec{p}_1^{\text{πριν}} = \vec{p}_1^{\text{μετά}} + \vec{p}_2^{\text{μετά}} \Rightarrow$$

$$\vec{p}_1^{\text{μετά}} - \vec{p}_1^{\text{πριν}} = -\vec{p}_2^{\text{μετά}} \Rightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\vec{p}_2^{\text{μετά}} \Rightarrow \Delta \vec{p}_1 = -m_2 \vec{v}_2'$$

Δηλαδή η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα $\vec{v}_2'$ και μέτρο $\Delta p_1 = m_2 v_2'$

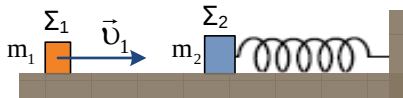
Με αντικατάσταση $m_2=2\text{kg}$ και $v_2' = 2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ προκύπτει:

$$\Delta p_1 = 2\text{kg} \cdot 2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_1 = 4\sqrt{3} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Πρόβλημα 2.

Σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 4\text{kg}$ βρίσκεται ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ένα δεύτερο σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1\text{kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου

$v_1 = 10\text{m/s}$ και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το Σ_2 .



Να υπολογίσετε:

α) τις ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση.

β) το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_2 .

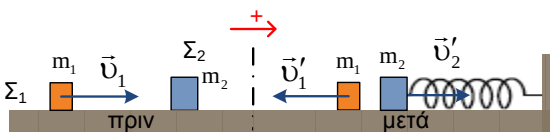
γ) το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 που μεταφέρθηκε στο σώμα Σ_2 .

δ) τη μέγιστη συσπίρωση Δl του ελατηρίου.

Δίνεται η σταθερά του ελατηρίου $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

Λύση

α) Ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά. Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα Σ_1 έχει ταχύτητα μέτρου $v_1 = 10\text{m/s}$ και το σώμα Σ_2 είναι αρχικά ακίνητο. Άρα η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v'_1 του σώματος Σ_1 μετά την κρούση δίνεται από τον τύπο:



$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1)$$

και η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v'_2 του σώματος Σ_2 μετά την κρούση δίνεται από τον

$$\text{τύπο: } v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2)$$

Με αντικατάσταση προκύπτει: $v'_1 = \frac{1-4}{1+4} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_1 = \frac{-3}{5} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_1 = -6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (έχει φορά προς τα αριστερά όπως στο σχήμα)

$$\text{και } v'_2 = \frac{2 \cdot 1}{5} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 : $\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_2^{\text{μετά}} - \vec{p}_2^{\text{πριν}}$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_2 = m_2 v'_2 - m_2 v_2 \xrightarrow{v_2=0} \Delta p_2 = m_2 v'_2 - 0 \Rightarrow \Delta p_2 = m_2 v'_2$$

$$\text{Με αντικατάσταση προκύπτει: } \Delta p_2 = 4\text{kg} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_2 = 16 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Επειδή η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής είναι θετική, ταυτίζεται με το μέτρο.

$$\gamma) \text{ Η κινητική ενέργεια του } \Sigma_2 \text{ μετά την κρούση είναι: } K_2^{\text{μετά}} = \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

Επειδή το σώμα Σ_2 αρχικά ήταν ακίνητο, το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 που μεταφέρθηκε στο σώμα Σ_2 , είναι:

$$\frac{K_2^{\text{μετά}}}{K_1^{\text{πρην}}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v'^2_2}{\frac{1}{2} m_1 v^2_1} = \frac{\frac{1}{2} 4\text{kg} \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{\frac{1}{2} 1\text{kg} \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2} = \frac{4 \cdot 16}{100} = 0,64 \quad \text{ή} \quad 64\%$$

δ) Κατά τη συμπίεση του ελατηρίου όλη η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια στο ελατήριο:

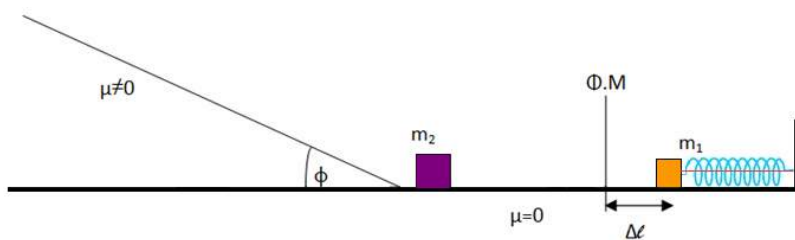
$$K = U_{\text{ελ}} \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = \frac{1}{2} k \Delta l^2 \Rightarrow \Delta l = v'_2 \sqrt{\frac{m_2}{k}}$$

και με αντικατάσταση $m_2 = 4\text{kg}$, $v'_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ προκύπτει:

$$\Delta l = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{4\text{kg}}{100 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} \Rightarrow \Delta l = 4 \frac{2}{10} \text{m} \Rightarrow \Delta l = 0,8 \text{ m}$$

Πρόβλημα 3.

Το σώμα μάζας $m_1 = 1\text{kg}$ του παρακάτω σχήματος, ακουμπάει χωρίς να έχει προσδεθεί στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 10^4 \text{ N/m}$. Το ελατήριο είναι συμπιεσμένο σε σχέση με το φυσικό του μήκος κατά $\Delta\ell = 0,1\text{m}$ με τη βοήθεια νήματος. Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται και το σώμα μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το αρχικά ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 4\text{kg}$. Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο. Το m_2 μετά την κρούση κινείται σε μη λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$ που παρουσιάζει τριβές με συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$.



A. Να υπολογίσετε:

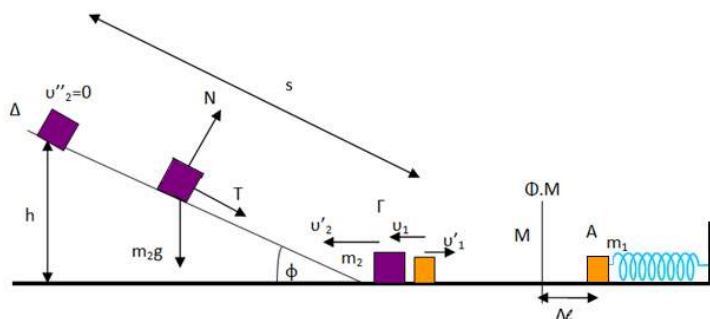
- το μέτρο της ταχύτητας του σώματος m_1 λίγο πριν την κρούση του με το σώμα m_2 .
- τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την ελαστική τους κρούση.
- το διάστημα που θα διανύσει το m_2 μέχρι να σταματήσει.

B. Θα επιστρέψει το m_2 στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, αν υποθεθεί ότι το μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι αρκετά μεγάλο για την κίνηση του σώματος;

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

A.



α) Φαινόμενο 1^ο: Ταλάντωση του m_1 .

Το σώμα μάζας m_1 για όσο χρόνο βρίσκεται σε επαφή με το ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η επαφή του με το ελατήριο χάνεται στο φυσικό μήκος που συμπίπτει με τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης Ενέργειας Ταλάντωσης.

$$E_{ολ}(A) = E_{ολ}(M) \Rightarrow$$

$$K(A) + U(A) = K(M) + U(M) \Rightarrow$$

$$0 + \frac{1}{2} D (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 \xrightarrow{D=k}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Delta l \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{10^4}{1}} 0,1 \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$v_1 = 10 \text{ m/s}$$

β) Φαινόμενο 2^ο: Κρούση του m_1 με το m_2 . Θετική φορά λαμβάνεται αυτή προς τα αριστερά.

Επειδή η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική ισχύουν οι τύποι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ και } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{1-4}{1+4} 10 \text{ m/s} \Rightarrow v_1' = -6 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 \cdot 1}{1+4} 10 \text{ m/s} \Rightarrow v_2' = 4 \text{ m/s}$$

γ) Φαινόμενο 3^ο: Κίνηση του m_2 στο κεκλιμένο επίπεδο.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το m_2 από τη θέση Γ έως τη θέση Δ.

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = W_{m_2g} + W_N + W_{Tp} \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = -m_2 gh + 0 + T \cdot s \cdot \cos 180^\circ \xrightarrow{h=s\eta\mu\phi}$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = -m_2 g \cdot s \cdot \eta\mu\phi + 0 - \mu m_2 g \cdot s \cdot \sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} v_2^2 = gs(\eta\mu\phi + \mu\sigma\upsilon\nu\phi) \Rightarrow$$

$$s = \frac{v_2^2}{2g(\eta\mu\phi + \mu\sigma\upsilon\nu\phi)} \Rightarrow$$

$$s = \frac{16}{2 \cdot 10 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{5} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} m \Rightarrow$$

$$s = \frac{16}{2 \cdot 10 \left(\frac{8}{10} \right)} m \Rightarrow$$

$$s = 1m$$

Β. Όταν το σώμα σταματήσει, η τριβή ολίσθησης μετατρέπεται ακαριαία σε στατική τριβή και αντιστέκεται στην συνιστώσα $m_2 g_x$ που έχει την τάση να ξαναθέσει σε κίνηση το σώμα m_2 .

Αν η $m_2 g_x$ είναι μεγαλύτερη της μέγιστης τιμής της στατικής τριβής το σώμα θα επανέλθει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

Αν η $m_2 g_x$ είναι μικρότερη ή ίση της μέγιστης τιμής της στατικής τριβής το σώμα δεν θα επανέλθει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου και θα σταματήσει οριστικά.

Σε αυτή την περίπτωση στο σώμα θα ασκείται η στατική τριβή που θα είναι ίση με το $m_2 g_x$ και όχι η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής.

$$\text{Έλεγχος: } m_2 g_x = m_2 g \eta\mu\phi = 4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} N = 20N$$

$$T_{\sigma\tau}(\max) = \mu m_2 g \sigma\upsilon\nu\phi = \frac{\sqrt{3}}{5} 4 \cdot 10 \frac{\sqrt{3}}{2} = 12N$$

Αφού η $m_2 g_x$ είναι μεγαλύτερη της μέγιστης τιμής της στατικής τριβής το σώμα θα επανέλθει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

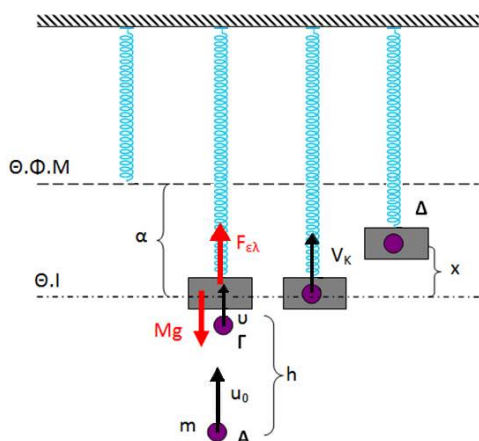
Πρόβλημα 4.

Ένα σώμα μάζας $M = 35\text{kg}$ ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 20\text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή. Κάποια στιγμή ένα βλήμα μάζας $m = 5\text{ kg}$ βάλλεται από απόσταση $h = 3,2\text{m}$ κάτω από το σώμα M με αρχική ταχύτητα μέτρου $u_0 = 16\text{m/s}$ και με φορά προς τα πάνω και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας M . Να υπολογίσετε:

- Το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος λίγο πριν την κρούση.
- Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
- Τη θερμότητα που αναπτύχθηκε κατά την διάρκεια της κρούσης.
- Τη μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου από την αρχική του θέση.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση



$$\Sigma F_{\Theta.I} = 0 \Rightarrow Mg - F_{ελ} = 0 \Rightarrow Mg = k\alpha \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{Mg}{k} (*)$$

α) Φαινόμενο 1^ο: Κίνηση του m από το A προς το Γ .

Θ.Μ.Κ.Ε. για το m :

$$K_{\Gamma} - K_A = W_{mg} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh \Rightarrow$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gh = \sqrt{256 - 2 \cdot 10 \cdot 3,2}\text{m/s} \Rightarrow v = \sqrt{64 \cdot 4 - 64}\text{m/s} \Rightarrow v = \sqrt{64 \cdot 3}\text{m/s} \Rightarrow$$

$$v = 8\sqrt{3}\text{m/s} \quad (1)$$

β) Φαινόμενο 2⁰: Πλαστική κρούση m-M.

Α.Δ.Ο (λίγο πριν -λίγο μετά την κρούση)

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$\vec{p}_m + \vec{p}_M = \vec{p}'_m + \vec{p}'_M$$

Επιλέγοντας θετική φορά προς τα πάνω, γράφουμε την παραπάνω σχέση αλγεβρικά:

$$mu = (m + M)V_K \Rightarrow V_K = \frac{mu}{m + M} \Rightarrow V_K = \frac{40\sqrt{3}}{40} \text{ m/s} \Rightarrow V_K = \sqrt{3} \text{ m/s} \quad (2)$$

$$\gamma) Q = |\Delta K_{ολ}| = K_{ολ}(\alpha\rho\chi) - K_{ολ}(\tau\epsilon\lambda) \quad (3)$$

Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K_{ολ}(\alpha\rho\chi) = \frac{1}{2}mu^2 + 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (8\sqrt{3})^2 \text{ J} = 480 \text{ J} \quad (4)$$

Η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K_{ολ}(\tau\epsilon\lambda) = \frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = \frac{1}{2}(5 + 35)(\sqrt{3})^2 \text{ J} = 20 \cdot 3 \text{ J} \Rightarrow K_{ολ}(\tau\epsilon\lambda) = 60 \text{ J} \quad (5)$$

$$(3) \xrightarrow{(4),(5)} Q = (480 - 60) \text{ J} \Rightarrow Q = 420 \text{ J}$$

δ) Φαινόμενο 3⁰: Συσπείρωση του ελατηρίου.

Θ.Μ.Κ.Ε για το συσσωμάτωμα από το Γ→Δ

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = W_{(m+M)g} + W_{F_{ελ}} \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = -(m + M)gx + \frac{1}{2}k\alpha^2 - \frac{1}{2}k(\alpha - x)^2 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = -(m + M)gx + \frac{1}{2}k\alpha^2 - \frac{1}{2}k\alpha^2 - \frac{1}{2}kx^2 + k\alpha x \xrightarrow{(*)} \rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = -(m + M)gx - \frac{1}{2}kx^2 + k\frac{Mg}{k}x \Rightarrow$$

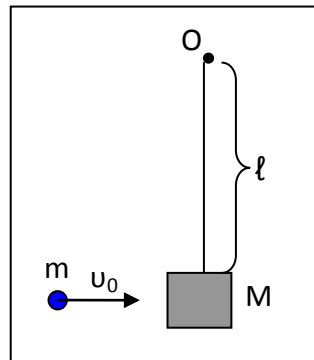
$$-\frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = -mgx - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 + mgx - \frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = 0 \Rightarrow$$

$$10x^2 + 50x - \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -6\text{m} & \text{απορρίπτεται} \\ x = 1\text{m} & \text{δεκτή} \end{cases}$$

Πρόβλημα 5.

Το σώμα του διπλανού σχήματος έχει μάζα $M = 4,8\text{kg}$ και ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου μη εκτατού νήματος μήκους $\ell = 0,18\text{m}$. Σώμα μάζας $m = 0,2\text{kg}$ κινείται με ταχύτητα u_0 και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα M . Να υπολογίσετε:



α) Την ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα m ώστε μετά την πλαστική τους κρούση, το συσσωμάτωμα να διαγράψει μία πλήρη κυκλική τροχιά (να κάνει ανακύκλωση).

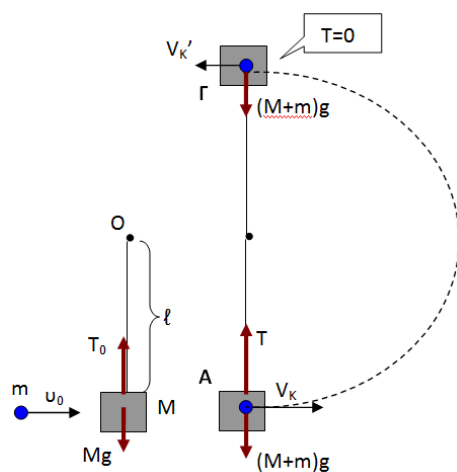
β) Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της μάζας m πριν και μετά την κρούση.

γ) Την τάση T_0 του νήματος πριν την κρούση.

δ) Την τάση T του νήματος αμέσως μετά την κρούση. Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

α)



Φαινόμενο 1^ο: Πλαστική κρούση m - M .

Α.Δ.Ο (λίγο πριν - λίγο μετά)

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$\vec{p}_m + \vec{p}_M = \vec{p}'_m + \vec{p}'_M \Rightarrow$$

$$mu_0 = (m + M)V_K \Rightarrow$$

$$u_0 = \frac{(m + M)V_K}{m} = \frac{(0,2 + 4,8)V_K}{0,2} \Rightarrow u_0 = 25V_K \quad (1)$$

Φαινόμενο 2^ο: Κίνηση συσσωματώματος από το Α στο Γ.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας.

$$K_{\Gamma} - K_A = W_{(m+M)g} + W_T \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m+M)V_K'^2 - \frac{1}{2}(m+M)V_K^2 = -(m+M)g2\ell + 0 \Rightarrow$$

$$V_K^2 = V_K'^2 + 4g\ell \Rightarrow V_K = \sqrt{V_K'^2 + 4g\ell} \quad (2)$$

Φαινόμενο 3^ο: Συνθήκη ανακύκλωσης στο σημείο Γ.

$$\Sigma F_R = F_K \Rightarrow$$

$$T + (M+m)g = (M+m) \frac{V_K'^2}{\ell} \xrightarrow{V_K' \rightarrow \min \Rightarrow T=0}$$

$$V_K'^2 = g\ell \Rightarrow V_K' = \sqrt{g\ell} = \sqrt{10 \cdot 0,18} \text{ m/s} \Rightarrow V_K' = \sqrt{1,8} \text{ m/s} \quad (3)$$

$$(2) \xrightarrow{(3)} V_K = \sqrt{1,8 + 4 \cdot 10 \cdot 0,18} \text{ m/s} = \sqrt{1,8 + 7,2} \text{ m/s} = \sqrt{9} \text{ m/s} \Rightarrow V_K = 3 \text{ m/s} \quad (4)$$

$$(1) \xrightarrow{(4)} u_0 = 25 \cdot 3 \text{ m/s} \Rightarrow u_0 = 75 \text{ m/s}$$

β) Το μέτρο της ορμής της μάζας m πριν την κρούση είναι:

$$p_m = mu_0 = 0,2 \cdot 75 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \Rightarrow p_m = 15 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Το μέτρο της ορμής της μάζας m μετά την κρούση είναι:

$$p'_m = mV_K = 0,2 \cdot 3 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \Rightarrow p'_m = 0,6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του m κατά την κρούση είναι:

$$|\Delta \vec{p}_m| = |p'_m - p_m| = |0,6 - 15| \text{ kg} \cdot \text{m/s} \Rightarrow |\Delta \vec{p}_m| = 14,4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

γ) Επειδή αρχικά το σώμα μάζας M ισορροπούσε: $\Sigma F = 0 \Rightarrow T_0 - Mg = 0 \Rightarrow T_0 = Mg \Rightarrow$

$$T_0 = 4,8 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T_0 = 48 \text{ N}$$

δ) Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση μπαίνει σε κυκλική κίνηση.

Προσοχή: Η τάση του νήματος δεν ισούται με το βάρος του συσσωματώματος ($T \neq (M+m)g$) και η συνισταμένη της τάσης και του βάρους είναι η κεντρομόλος δύναμη.

$$\Sigma F_R = F_K \Rightarrow T - (M + m)g = (M + m) \frac{V_K^2}{\ell} \Rightarrow T = (M + m)g + (M + m) \frac{V_K^2}{\ell} \xrightarrow{(4)}$$

$$T = \left(50 + 5 \frac{9}{0,18} \right) N \Rightarrow T = 300 N$$

Πρόβλημα 6.

Κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k , έχει το κάτω άκρο του δεμένο στο έδαφος και στο άνω άκρο του έχουμε δέσει μικρό σώμα Σ_2 μάζας $m_2=3\text{kg}$. Το σώμα ισορροπεί με το ελατήριο συσπειρωμένο κατά $d=0,3\text{m}$. Στην ίδια κατακόρυφο με τον άξονα του ελατηρίου και σε ύψος $d_0=0,2\text{m}$ πάνω από το Σ_2 αφήνουμε ένα μικρό σώμα Σ_1 μάζας $m_1=1\text{kg}$. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά. Το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση των σωμάτων.

β) Να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς του ελατηρίου και την περίοδο ταλάντωσης που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα.

γ) Να υπολογίσετε την ενέργεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

δ) Να γράψετε την εξίσωση της επιτάχυνσης του συσσωματώματος σε σχέση με το χρόνο, θεωρώντας θετική φορά κατακόρυφη προς τα επάνω και λαμβάνοντας ως χρονική στιγμή $t=0$ τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση.

Δίνεται: $g=10\text{m/s}^2$

Λύση

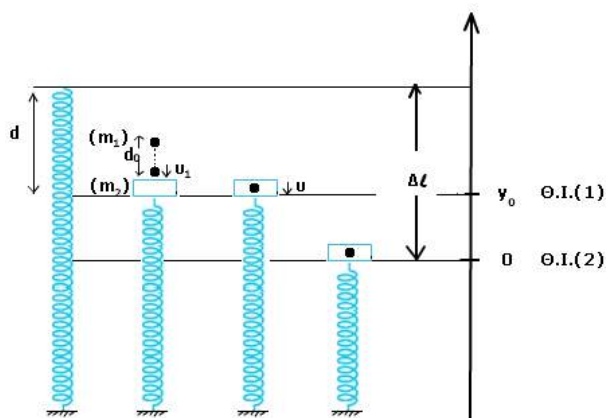
α) Για την κίνηση του Σ_1 , εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\epsilon\lambda)} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1v_1^2 = m_1gd_0 \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{2gd_0} \Rightarrow v_1 = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Κατά την κρούση η ορμή του συστήματος διατηρείται άρα αν u η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, τότε:

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)u \Rightarrow u = 0,5\frac{\text{m}}{\text{s}}$$



β) Στην αρχική θέση ισορροπίας, Θ.Ι. (1), πριν την κρούση των σωμάτων ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} - W_{w_2} = 0 \Rightarrow kd - m_2g = 0 \Rightarrow k = \frac{m_2g}{d} \Rightarrow k = 100\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Επειδή $D=k$ ισχύει ότι:

$$k = (m_1 + m_2) \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\text{Άρα: } T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,4\pi \text{ s}$$

γ) Στην περίπτωση πλαστικής κρούσης σωμάτων, όπου το ένα είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου, αν το ελατήριο είναι κατακόρυφο ή πλάγιο, το συσσωμάτωμα έχει νέα θέση ισορροπίας. Αν στη νέα θέση ισορροπίας το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell$, θα πρέπει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - W_{o\lambda} = 0 \Rightarrow k\Delta\ell = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \Delta\ell = 0,4\text{m}$$

Συνεπώς αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε σχέση με τη νέα θέση ισορροπίας σε απομάκρυνση μέτρου: $y_0 = \Delta\ell - d = 0,1\text{m}$.

Η ενέργεια της ταλάντωσης ισούται:

$$E = K + U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v^2 + \frac{1}{2}ky_0^2 \Rightarrow E = 1\text{J}$$

δ) Η επιτάχυνση του (m_1+m_2) περιγράφεται από την εξίσωση $a = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$.

Από την ενέργεια ταλάντωσης του συσσωματώματος έχουμε: $E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = 0,1\sqrt{2}\text{m}$

Η απομάκρυνση του (m_1+m_2) περιγράφεται από την $y = A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$. Την $t=0$ είναι (S.I.):

$$y = y_0 \Rightarrow 0,1\sqrt{2} \cdot \eta\mu\varphi_0 = 0,1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{4}\text{rad} \text{ ή } \varphi_0 = \frac{3\pi}{4}\text{rad}$$

Όμως (θετική φορά προς τα πάνω) $v < 0 \Rightarrow \text{syn}\varphi_0 < 0$. Άρα $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}\text{rad}$

Συνεπώς, η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$a = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow a = -2,5\sqrt{2} \eta\mu(5t + \frac{3\pi}{4}) \quad (\text{S.I.})$$