

§ 1.5

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ

όριο συνάρτησης όταν

 $X \rightarrow X_0$

**Πως εργαζόμαστε
για την εύρεση
του ορίου όταν**

 $X \rightarrow X_0$

Δοκιμάζουμε στο πρόχειρο αν το όριο υπολογίζεται με κάποια από τις ιδιότητες - θεωρήματα των πεπερασμένων ορίων (αντικαθιστούμε όπου x το x_0) και

- Όταν ΔΕΝ είναι απροσδιόριστη μορφή το υπολογίζουμε με τις συγκεκριμένες ιδιότητες για τα πεπερασμένα όρια.
- Όταν είναι απροσδιόριστη μορφή χρησιμοποιούμε διάφορες τεχνικές για την άρση της απροσδιοριστίας.

Καλή διασκέδαση ψάχνοντας τα όρια...

1. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 5)$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{5x + 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^{2v+1} + 2)^{v-1}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1)^{1996}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3}}{x + 3}$

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x}{|x^2 - 5|}$

7. $f(x) = \begin{cases} \frac{4x+2}{2x-1}, & \text{αν } x < 0 \\ \frac{3\sqrt{x}-2}{x^2+1}, & \text{αν } 0 \leq x < 10 \end{cases}$ στο $x_0 = 0$

2. Έστω μια συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ όταν:

1. $g(x) = 2[f(x)]^3 - 3f(x) - 10$

2. $g(x) = \frac{f(x) - 3}{f(x) - 1}$

3. $g(x) = \sqrt{|f(x)|^2 - f(x) + 1}$

3. Δίνεται $f(x) = \begin{cases} \frac{x+\alpha}{x-1}, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{3x-\alpha^3}{x^2+1}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \in \mathbb{R}$

Απροσδιόριστες μορφές (AM)

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \cdot (\pm\infty), +\infty - \infty$$

Κ.1 ΡΗΤΕΣ

AM: $\frac{0}{0}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Παραγοντοποιώ αριθμητή και παρανομαστή, ώστε να γίνουν απλοποιήσεις και άρση.

4. Υπολογίστε το όριο :

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^v + \beta x^\mu + \gamma}{x - 1} \text{ αν } \alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ και } \mu, v \in \mathbb{N}^*$$

Κ.2 ΑΡΡΗΤΕΣ

AM: $\frac{0}{0}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

α) με τετραγωνικές ρίζες: πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με συζυγή παράσταση ώστε να δημιουργηθεί διαφορά τετραγώνων (και να απλοποιηθούν οι τετραγωνικές ρίζες).

β) με κυβικές ρίζες: πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη μορφή $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ ώστε να δημιουργηθεί διαφορά κύβων (και να απλοποιηθούν οι κυβικές ρίζες).

γ) με νιοστές ρίζες: πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη παράσταση

$\alpha^{v-1} + \alpha^{v-2}\beta + \dots + \beta^{v-1}$ ώστε να δημιουργηθεί διαφορά νιοστών δυνάμεων (και να απλοποιηθούν οι ρίζες).

δ) εξωτικές με πολλαπλές ή διαφορετικής τάξεως ρίζες: προσθαφαιρούμε ότι λείπει...

5. Υπολογίστε τα όρια :

$$1. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x-1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{5x+4} + \sqrt{x}}{x-1}$$

Κ.3 ΑΠΟΛΥΤΑ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- α) Ελέγχουμε μήπως με κατάλληλες πράξεις γίνονται απλοποιήσεις.
- β) Αν το X_0 δεν μηδενίζει κανένα απόλυτο στον τύπο της f , τότε κάνουμε πίνακα προσήμων για τις παραστάσεις που είναι στα απόλυτα και διαλέγουμε κατάλληλη περιοχή κοντά στο X_0 .
Αφού απαλλαγούμε από τα απόλυτα βρίσκουμε το όριο κατά τα γνωστά.
- γ) Αν το X_0 μηδενίζει έστω και ένα απόλυτο στον τύπο της f , τότε κάνουμε πίνακα προσήμων για τις παραστάσεις που είναι στα απόλυτα και θα βρούμε το όριο με τη βοήθεια των πλευρικών ορίων διαλέγοντας κατάλληλες περιοχές αριστερά και δεξιά του X_0 .

6. Υπολογίστε τα

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - |x - 2|}{|x + 5| - 6}$

2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x - 4|}{x^2 - 5x + 4}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - v|x|}{x^2 + v|x|}, v \in \mathbb{N}^*$

Κ.4 ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Προσπαθούμε να δημιουργήσουμε (αν δεν δίνεται) τη κατάλληλη ανισότητα ώστε να εφαρμόζεται το κριτήριο παρεμβολής:

7. Αν για συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $x^{1999} - 2000x \leq f(x) \leq x^{2000} + x$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (αν υπάρχει)

9. Αν για συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x^2 f(x) - 2x^3| \leq x^4$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (αν υπάρχει)

8. Έστω μια συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ όταν:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 5}{2 + x} \leq g(x) \leq [f(x)]^2 + \frac{3}{2}f(x)$$

10. Αν για συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x f(x) - 2x| \leq x^3$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (αν υπάρχει)

Κ.5 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

α) αν το $x \rightarrow 0$ τότε προσπαθώ να εμφανίσω το βασικό όριο $\frac{\eta\mu x}{x}$ πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας αριθμητή παρανομαστή με κατάλληλη παράσταση.

β) χρησιμοποιώ τύπους της τριγωνομετρίας ώστε να γίνουν παραγοντοποιήσεις, απλοποιήσεις και άρση

γ) εξωτερική No 1 ξεκινώ με την απόλυτη τιμή της f και τη μεγαλώνω έτσι ώστε εφαρμόζοντας μετά το κριτήριο παρεμβολής να βρω το όριο.

δ) εξωτερική No 2 ξεκινώ με το γνωστό $|\eta\mu x| \leq 1$ ή $|\sigma\upsilon\nu x| \leq 1$ ή $|\eta\mu x| \leq |x|$ και συνθετικά

11. Υπολογίστε τα

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 3\eta\mu x}{4x + \eta\mu x}$$

Κ.6 ΣΥΝΘΕΤΕΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Όταν έχω να βρω το όριο μιας σύνθετης $f(g(x))$:

- θέτω $u=g(x)$ ώστε η $f(u)$ να είναι απλή
- Βρίσκω το $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- Βρίσκω το $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = \ell$

Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = \ell$

ΣΕ ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ

Αν $x \rightarrow 0$ ή $x \rightarrow x_0$ τότε κοιτάζω μήπως με την

αλλαγή μεταβλητής καταλήγω στο $\frac{\eta\mu u}{u}$ με $u \rightarrow 0$

12. Υπολογίστε το

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 3\eta\mu 5x}{4x + \eta\mu 7x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu(x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}}$$

13α. Αν $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 9} f(1 + \sqrt{x})$

13β. Αν $f(x) = \frac{x}{4-x}$ και $g(x) = \ln \frac{x}{4-x}$

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της g και να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 4} g(x).$$

Κ.7 ΑΓΝΩΣΤΟ ΟΡΙΟ ΜΕΣΑ ΣΕ ΓΝΩΣΤΟ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Όταν μας ζητάνε να βρούμε το όριο μιας f χωρίς να μας δίνουν το $f(x)$ αλλά το όριο μιας άλλης παράστασης στην οποία περιέχεται το $f(x)$, τότε :
θα θέτω με $g(x)$ (βοηθητική συνάρτηση) τη παράσταση της οποίας δίνεται το όριο και θα λύνω ως προς $f(x)$.

14. Αν η f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1} = 2$ τότε:

α) να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 1}{\sqrt{x} - 1}$

15. Αν ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) + 3g(x)) = 7$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 4g(x)) = 10$

να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

16. Αν ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x - 1} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 4} - 2)g(x) = 5$ να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)]$

17. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \cdot \eta \mu x + [f(x)]^2 = 2x^2$

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = \theta$, όπου $\theta > 0$, να υπολογίσετε το θ .

§ 1.6

ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ

όριο συνάρτησης όταν $X \rightarrow X_0$

Βασικά όρια όταν $x \rightarrow 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v+1}}$ δεν υπάρχει
		$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty$ ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty$	

ΠΡΟΣΟΧΗ

όταν στο πρόχειρο διαπιστώσουμε ότι προκύπτουν μη πεπερασμένα όρια τότε χρησιμοποιούμε τα ανάλογα θεωρήματα και ιδιότητες των **ΜΗ** πεπερασμένων ορίων (§1.6) για να τεκμηριώσουμε την απάντησή μας.

Κ.8 ΡΗΤΕΣμορφή $\frac{1}{0}$ **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ**

θα εργαστούμε σύμφωνα με την πρόταση:

$$\text{αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ και } f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

ενώ

$$\text{αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ και } f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

Κλάσματα της μορφής $\frac{g(x)}{f(x)}$ τα γράφουμε $\frac{1}{f(x)} g(x)$ ώστε να εφαρμόσουμε το παραπάνω στην $\frac{1}{f(x)}$

18. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x + 1}$	2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 1}{ x - 2 \cdot (x + 2)}$	3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^{1999}} + 1 - x^{2000}}{x^3 - x^2 - x + 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+8} + \sin(\pi x) - 5}{x^2 - 4}$	5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 8} - \eta\mu(\pi x) + 3x}{\sqrt{x+3} - 2}$	6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 3\sin x}{(x^2 + 3) \cdot \eta\mu^2 x}$
7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \epsilon\phi x$	8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \kappa}{x^2 - 2x + 1} \quad \kappa \in \mathbb{R}$	

Κ.9 ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ (ώστε να υπάρχει το όριο)**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ**

Όταν θέλω να βρω τη τιμή της παραμέτρου ώστε να υπάρχει το όριο τότε:

- Ψάχνω το όριο για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου (κάνω διερεύνηση για όλες τις δυνατές τιμές της παραμέτρου) και
- Απαντώ εκείνες τις τιμές για τις οποίες έχω διαπιστώσει ότι προκύπτει όριο πραγματικός αριθμός,

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\lambda - 1)x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$, να βρείτε τη τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Κ.10 ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ (όταν γνωρίζω το όριο)**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ**

Όταν ξέρω το όριο μιας παράστασης που περιέχει παράμετρο και μου ζητείται να προσδιορίσω, τότε:

- θέτω την παράσταση αυτή με μια βοηθητική $g(x)$,
- τη λύνω ως προς την παράμετρο και
- υπολογίζω όρια κατά μέλη οπότε βρίσκω τη παράμετρο ή σχέση με τις παραμέτρους που την αξιοποιώ στο αρχικό δεδομένο όριο.

20. Υπολογίστε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 - 4} = 5$

21. Υπολογίστε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\alpha|x+2| + \beta|x-4| - 2}{x^2 - 5x + 6} = 10$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΣΥΛΛΟΓΗ ΑΛΛΩΝ

- 1) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(x)f(y) = yf(x) + xf(y) - xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$. (Χ. Στεργίου)

- 2) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$3f(x+1) - 2f(2-x) = x^2 + 14x - 5, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{f(x)}$. (Χ. Στεργίου)

- 3) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x) \leq x^4$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu f(x)}{x}$. (Β. Παπαδάκης)

- 4) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(4-x)}{f(x)} = \lambda > 0$ να βρείτε το λ . (Β. Παπαδάκης)

- 5) Δίνεται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2f(x) + 3g(x)}$. (Β. Παπαδάκης)

§ 1.7

όριο συνάρτησης όταν

$$x \rightarrow \pm\infty$$

Βασικά όρια όταν $x \rightarrow \pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^v} = 0$	
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = -\infty$, αν v περιττός	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = +\infty$, αν v άρτιος	
	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_v x^v + ... + \alpha_1 x + \alpha_0) \overset{\text{εφόσον}}{\underset{\alpha_v \neq 0}{=}} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha_v x^v$	
	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v + ... + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + ... + \beta_1 x + \beta_0} \right) \overset{\text{εφόσον}}{\underset{\alpha_v, \beta_\mu \neq 0}{=}} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha_v x^v}{\beta_\mu x^\mu}$	

Όταν το $x \rightarrow \pm\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με τη προϋπόθεση ότι:

- οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
- δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

Κ.11 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ – ΡΗΤΕΣ (όταν $x \rightarrow \pm\infty$)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Χρησιμοποιούμε τις προτάσεις για τις πολυωνυμικές και ρητές όταν $x \rightarrow \pm\infty$ προσέχοντας:

- Ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου αν είναι διάφορος του 0 και
- Στις παραμετρικές αν είναι θετικός – μηδέν – αρνητικός.

22. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - x + 5)$	2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^{2v+1} + 2)^{2v-1}$	3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 3}{3x + 3}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 3}{-3x^2 + 3x}$	5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 3}{-3x^3 + 3x}$	6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda^2 + 501}{x^3 + 3x + 2004}$
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\mu^2 + 1)x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 2x]$	8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\lambda^2 + 2\lambda + 3)x^5 - \lambda\mu x^3 + 4x^2 - 2]$	
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\lambda + 2)x^3 - \lambda x^2 + 4x + 1]$	10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\lambda - 2)x^2 + \lambda x - 1}{\lambda x + 3}$	

Προσοχή !!

οι ιδιότητες (+, -, *, /, $\sqrt{\quad}$, | |) των πεπερασμένων ορίων δεν ισχύουν στα ΜΗ πεπερασμένα
Αιτιολογούνται και διατυπώνονται διαφορετικά (θυμήσου την θεωρία στην §1.6)

Κ.12 ΑΡΣΗ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑΣ (όταν $x \rightarrow \pm\infty$)**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ**

1° τέχνασμα Βγάζω κοινό παράγοντα τον μεγιστοβάθμιο όρο (υπερτέχνασμα)

2° τέχνασμα i. Πολλαπλασιάζω και διαιρώ με την συζυγή παράσταση (σε τετραγ. ρίζες).

ii. Χρησιμοποιώ το διώνυμο Newton σε νιοστές ρίζες.

iii. Σε τρία ριζικά (ΧΤΡ) προσθαφαιρώ πολλαπλάσια του x και μετά κάνω το i ή ii.

Χρήσιμο $\sqrt[n]{x^n} = |x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \rightarrow +\infty \\ -x, & \text{αν } x \rightarrow -\infty \end{cases}$

23. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - x + 5}$	2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^4 + 5x^2 + 10}}$	3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+3}$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{(x+1)(ex+\alpha)} - x \right)$	5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x-1}}$	6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{5x+1} + \sqrt{3+x^3} \right)$	8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{3x - \sqrt{x}}$	
9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x \right)$	10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+3}+2x}$	
11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\lambda x^2 - 2\sqrt{x^4+1} \right) \quad \mu \epsilon \lambda \in \mathbb{R}$		
12. Να προσδιορίσετε τη τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x) = \sqrt{x^2+x-2} - kx$ να έχει στο $+\infty$ όριο πραγματικό αριθμό		

Κ.13 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ (όταν $x \rightarrow \pm\infty$)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συνήθως τα ίδια τεχνάσματα με αυτά που είδαμε όταν το x τείνει σε αριθμό

24. Υπολογίστε τα

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{x^2}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sigma\upsilon\nu x}{x^2 + 2}$

Κ.14 ΑΓΝΩΣΤΟ ΟΡΙΟ ΜΕΣΑ ΣΕ ΓΝΩΣΤΟ (όταν $x \rightarrow \pm\infty$)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συνήθως τα ίδια τεχνάσματα με αυτά που είδαμε όταν το x τείνει σε αριθμό

25. Αν η f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x}{x - 1} = 2$ τότε:

α) να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ β) να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 1}{x - 1}$

Κ.15 ΕΚΘΕΤΙΚΗ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ

$x \rightarrow x_0$	ΕΚΘΕΤΙΚΗ	$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha^x = \alpha^{x_0}$	
	ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ	$\lim_{x \rightarrow x_0} (\log_\alpha x) = \log_\alpha x_0$	
$x \rightarrow \pm\infty$	ΕΚΘΕΤΙΚΗ	$\alpha > 1$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$
		$0 < \alpha < 1$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$
	ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ	$\alpha > 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \log_\alpha x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_\alpha x = +\infty$
		$0 < \alpha < 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \log_\alpha x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_\alpha x = -\infty$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- Όταν $x \rightarrow x_0$ τότε εφόσον το x_0 ανήκει στο π.ο. της και δεν οδηγούμεθα σε ΑΜ κάνουμε αντικατάσταση (λόγω ότι είναι συνεχής), Αν έχουμε ΑΜ χρησιμοποιούμε τις τεχνικές που έχουμε μάθει στα προηγούμενα.
- Όταν το $x \rightarrow \pm\infty$ εξετάζω αν χρησιμοποιώντας τα όρια εκθετικής και λογαριθμικής και εφαρμόζοντας τα θεωρήματα προκύπτει αποτέλεσμα
(αντικαθιστούμε νοερά όπου x το $\pm\infty$ και βλέπουμε αν καταλήγουμε σε κάποια από τα θεωρήματα των ορίων).
- Αν ΝΑΙ τότε τεκμηριώνουμε τη σκέψη μας με τις συγκεκριμένες προτάσεις.
 - Αν ΟΧΙ τότε θα έχουμε ΑΜ και για την άρση της προσπαθώ
ή να δημιουργήσω εκθετικές δυνάμεις που τείνουν στο 0 (το πετυχαίνω με το να βγάλω κοινό παράγοντα ή να Πολ/ζω και διαιρώ με την κατάλληλη δύναμη)
ή να βγάλω κοινό παράγοντα τον μενιστοβάθμιο όρο x^v (υπερτέννασια)

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3^x = 3^2 = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} 2^{-x} = \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (\log_2 x) = \log_2 4 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow e^2} (\ln x) = \ln e^2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \stackrel{\text{εφόσον}}{=} 0 \quad 0 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x \stackrel{\text{εφόσον}}{=} 0 \quad \frac{3}{2} > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x =$$

26. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4^x - 7 \cdot 2^x + 10}{2^x - 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow e^2} \frac{501 \ln^2 x - 2004}{\ln x - 2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2 x - \ln x + e}{\ln x - 2}$$

27. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + x - 5^x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x^2 e^x + 1}{x^2 - 2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+2} - 2}{3^{x+2} + 5}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x + 3^x - 2^x}{3^x + 5^x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x - 2^x}{\alpha^x + 2^x} \quad \mu\epsilon \quad \alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^6 + \ln x + e^{2x+1})$$

Κ.15 ΟΡΙΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Οι ακολουθίες είναι συναρτήσεις που έχουν μεταβλητή το v που είναι φυσικός διάφορος του μηδενός οπότε η εύρεση ορίου της περιορίζεται όταν το $v \rightarrow +\infty$, οπότε ισχύουν ότι γνωρίζουμε όταν $x \rightarrow +\infty$

28. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

1. $\lim_{v \rightarrow +\infty} (-v^5 + v - 5)$

2. $\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{v - v^2 e + 1}{v - 2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{4-x}}$.

α) Να βρείτε το D_f .β) Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^v - 1}{x - 1}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^v - 1}{x}$.

3. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \eta \mu x}{x}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{\sqrt{x}}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 - 2x}{x}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \varphi 2x}{\eta \mu x}$

4. Να βρεθεί ο θετικός ακέραιος v σε καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x + \eta \mu 2x + \dots + \eta \mu vx}{x} = 28$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x \cdot \eta \mu 2x \cdot \dots \cdot \eta \mu vx}{x^v} = 120$

5. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - 2x)$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x^2)$

6. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x - 7^x)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 3 \cdot 5^x}{5 \cdot 3^x + 2 \cdot 7^x}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x - 8^x}{5 \cdot 3^x + 3 \cdot 7^x}$

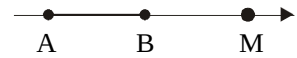
δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1-x^3}{|x|+2}}$

ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \{ \ell n(x-1) - 2 \ell n(x+1) \}$

7. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \eta\mu \frac{1}{x})$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \eta\mu \frac{1}{x})$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \eta\mu^p \frac{1}{x})$ με $p \in \mathbb{N}^*$ και $p \geq 2$

8. Δίνεται ένα τμήμα AB και στην προέκτασή του προς το B παίρνουμε σημείο M.



Να βρείτε το όριο του λόγου $\frac{AM}{BM}$, καθώς το M απομακρύνεται στο άπειρο.

9. Το ποσοστό της ανεργίας σε μια χώρα είναι 12% και εκτιμάται ότι σε x έτη από τώρα θα δίνεται από τον τύπο $f(x) = \frac{16x + 36}{2x + 3}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 8 + \frac{12}{2x + 3}$.

β) Να εξηγήσετε γιατί η ανεργία δεν θα πέσει ποτέ κάτω από το 8%.

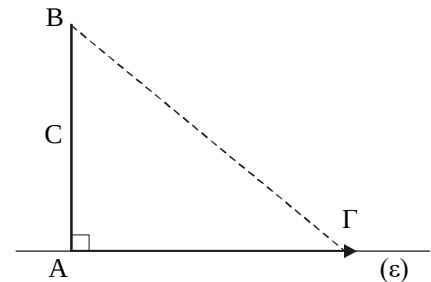
10. Αν $f(x) = \ell \ln \frac{x-3}{2x}$, να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f β) τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

11. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 2)x^3 + (\mu + 1)x + 1}{\mu x^2 + 1}$, αν $\mu \in \mathbb{R}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \lambda x - \mu)$, αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

12. Το ευθύγραμμο τμήμα AB του διπλανού σχήματος έχει σταθερό μήκος C. Το σημείο Γ κινείται απομακρυνόμενο από το A επάνω στην (ε). Να αποδείξετε ότι τα μήκη των BΓ και ΑΓ τείνουν να γίνουν ίσα.

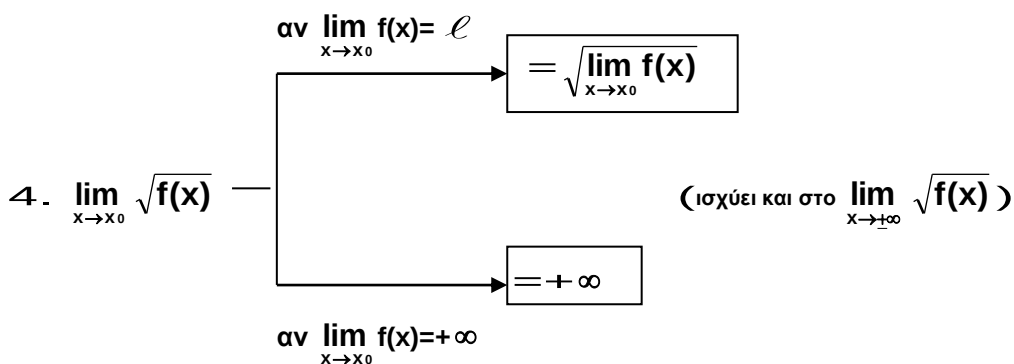
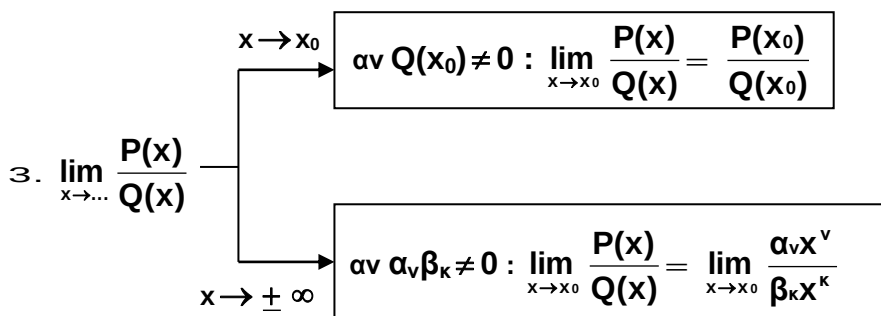
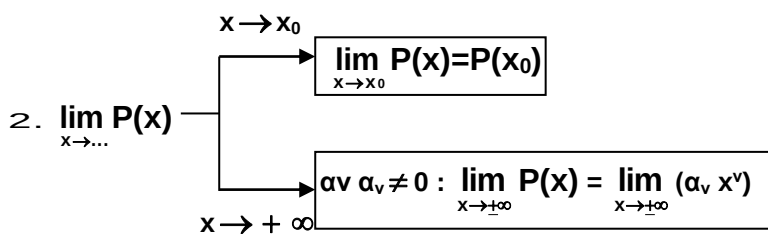
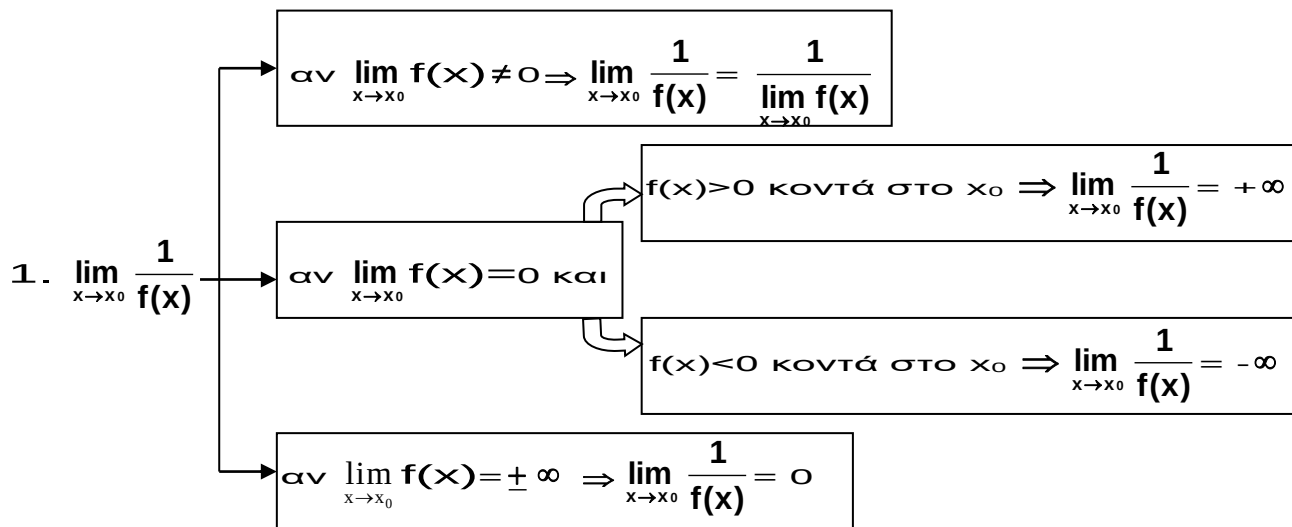


13. Αν $|x| < 1$ και $|f(x) - 3| \leq |x|$, $|g(x) + 4| \leq |x|$, να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x))$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x))$

14. Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια στο $x = x_0$:

α) της $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{|x|}$, $x_0 = 0$ β) της $g(x) = \frac{|x - 1|}{2 - x}$, $x_0 = 2$.

ΑΝΑΖΗΤΩΝΤΑΣ ΤΑ ΟΡΙΑ ΜΑΣ

5. Το κριτήριο Παρεμβολής ισχύει και στο x_0 και στο $\pm \infty$