

Ανάλυση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

Όριο και

συνέχεια

συνάρτησης

§ 1.2

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ είναι το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που περιέχει όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x ώστε οι αντίστοιχες εικόνες τους (δηλαδή τα y ή αλλιώς τα $f(x)$) να είναι πραγματικοί αριθμοί.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για την εύρεση του πεδίου ορισμού έχουμε υπόψη τα εξής:

- | | | |
|----------------------------|-------------------------------------|--|
| • Οι παρονομαστές $\neq 0$ | • Στο $\ln(h(x))$ το $h(x) > 0$ | • Στο $\varepsilon\phi(h(x))$ το $h(x) \neq \kappa\pi + \pi/2$ |
| • Τα υπόριζα ≥ 0 | • Στο $(h(x))^{g(x)}$ το $h(x) > 0$ | • Στο $\sigma\phi(h(x))$ το $h(x) \neq \kappa\pi$ |

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Σε συνδυασμό των παραπάνω, συναληθεύω.
- Αν δεν έχω κανένα από τα παραπάνω, είναι όλο το $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

2) $f(x) = \frac{3x+2}{3x-1}$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

4) $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

5) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - x + 1}{6x^2 + 5x + 1}\right)$

6) $f(x) = 3^{x^2-1}$

7) $f(x) = \varepsilon\phi\frac{x}{2} - 1$

8) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}$

9) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$

10) $f(x) = \frac{|x-1|+2}{|x+3|-1}$

11) $f(x) = \sqrt{3|x-2|-3}$

12) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x^2}}$

13) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - e^2}}{\sqrt{\ln x - 1}}$

14) $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 3\ln x + 2}$

15) $f(x) = \sqrt{1 - \ln^2 x^2}$

16) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}\sqrt{x-5x+4\sqrt{x}}}$

17) $f(x) = \sqrt{\pi - \sin x}$

18) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3+3}}{12x^3+29x^2+23x+6}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ Είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που έχει για στοιχεία όλες τις τιμές της f . Δηλαδή όλα τα $f(x)$ για κάθε $x \in D_f$. Συμβολίζεται με $f(A)$ και είναι $f(A) = \{ y / y=f(x) \text{ για κάποιο } x \in D_f \}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Αν $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$, τότε ισχύει

A. $f(x) = x + |x|$

B. $f(x) = |x| - x$

Γ. $f(x) = \frac{x + |x|}{2}$

Δ. $f(x) = \frac{|x| - x}{2}$

E. $f(x) = |x|$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \kappa x^2 + \lambda x - 5$. Αν $f(1) = 8$ και $f(-1) = 4$, η τιμή της παράστασης $\kappa + 2\lambda$ είναι ίση με A. 0 B. 8 Γ. 13 Δ. - 11 E. 11

3. Να βρεθεί το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)\sqrt{x+1}}$

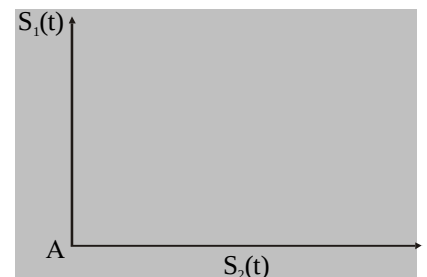
δ) $f(x) = \log(x^2 + x - 2) + \log \frac{x+3}{3-x}$

β) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}-1} + \frac{3}{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}$

ε) $f(x) = \frac{\sin x}{2\eta\mu x - 1} + \frac{1}{\epsilon\phi x - 1}$, $x \in [0, 2\pi]$

γ) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x}}{|x-2|-1} + \frac{1}{|3x-8|-|x|}$

στ) $f(x) = \sqrt{e^x - 1} + \sqrt{1 - \ln x}$



4. Δύο κινητά διασταυρώνονται σε ένα σημείο A και το πρώτο κατευθύνεται βόρεια του A με ταχύτητα $v_1 = 60$ km/h, ενώ το δεύτερο κατευθύνεται ανατολικά του A με ταχύτητα $v_2 = 80$ km/h.
- α) Να εκφράσετε την απόσταση s των κινητών ως συνάρτηση του χρόνου t . Με πόση ταχύτητα απομακρύνεται το ένα από το άλλο;
- β) Αν M το μέσον της απόστασης s να εκφράσετε την απόσταση AM ως συνάρτηση του t .
- γ) Πόσο πρέπει να ελαττωθεί η ταχύτητα του δεύτερου κινητού, ώστε μετά από 4 ώρες το M να απέχει από το A 180 km;
5. Το τμήμα παραγωγής μιας αυτοκινητοβιομηχανίας λειτουργεί 10 ώρες ημερησίως και ο αριθμός των αυτοκινήτων που παράγει κάθε μέρα μετά από t ώρες λειτουργίας είναι $N(t) = 100t - 5t^2$. Το ημερήσιο κόστος $K(x)$ σε χιλιάδες μονάδες “ΕΥΡΩ” για την παραγωγή x αυτοκινήτων είναι $K(x) = 15 + 8x$.
- α) Να βρείτε το ημερήσιο κόστος K ως συνάρτηση του χρόνου λειτουργίας του τμήματος παραγωγής.
- β) Πόσες ώρες μπορεί να λειτουργεί το τμήμα παραγωγής ώστε το ημερήσιο κόστος παραγωγής να μην υπερβαίνει τα 3,885 εκατομμύρια “ΕΥΡΩ”;

6. Για να περιοριστεί η κατανάλωση νερού σε μία πόλη, ανακοινώνεται ότι μια οικογένεια 4 ατόμων, θα πληρώνει το μήνα για τα πρώτα 1.200 κ.μ. νερού, 3 ευρώ ανά 100 κ.μ.. Για παραπάνω κατανάλωση δηλ. από 1.200 - 2.400 κ.μ. θα πληρώνουν 5 ευρώ ανά 100 κ.μ. (για τα παραπάνω από 1200) και αν η κατανάλωση ξεπερνά τα 2.400 κ.μ., θα πληρώνουν 8 ευρώ ανά 100 κ.μ. (για τα παραπάνω από τα 2400) . Να εκφράσετε το μηνιαίο λογαριασμό της οικογένειας σε ευρώ, ως συνάρτηση της ποσότητας του νερού που καταναλώνει.

§ 1.2

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

μορφή	πώς κατασκευάζεται
$f(x) = \alpha x + \beta$	Είναι ευθεία και βρίσκω δύο σημεία με πίνακα τιμών
$f(x) = \alpha x^2$	Είναι παραβολή με κορυφή το (0,0) και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών
$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$	Είναι παραβολή με κορυφή το $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$, τέμνει τον x'x στις ρίζες (αν έχει) και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών
$f(x) = \alpha x^3$	Είναι καμπύλη με κέντρο συμμετρίας το (0,0) και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών
$f(x) = \frac{\alpha}{x}$	Είναι υπερβολή με ασύμπτωτες τους άξονες, κέντρο συμμετρίας το (0,0) και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών
$f(x) = \alpha^x$	Είναι εκθετική καμπύλη και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών
$f(x) = \log_a x$	Είναι λογαριθμική καμπύλη και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών (χρησιμοποιώ δυνάμεις του α)
$f(x) = \eta\mu(\alpha x)$	Είναι ημιτονοειδής καμπύλη με περίοδο $T = \frac{2\pi}{ \alpha }$ και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών (χωρίζω μία περίοδο σε 4 ισομήκη διαστήματα)
$f(x) = \sigma\upsilon\nu(\alpha x)$	Είναι συνημιτονοειδής καμπύλη με περίοδο $T = \frac{2\pi}{ \alpha }$ και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών (χωρίζω μία περίοδο σε 4 ισομήκη διαστήματα)
$f(x) = \epsilon\phi x$	Είναι καμπύλη με περίοδο $T = \pi$ και κατασκευάζεται με πίνακα αρκετών τιμών στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Θέση της C_f ως προς τον $x'x$

Πως βρίσκουμε τα σημεία τομής της C_f με τον $x'x$	Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$
Πως βρίσκουμε τα x για τα οποία η C_f είναι πάνω από τον $x'x$	Λύνουμε την ανίσωση $f(x) > 0$
Πως βρίσκουμε τα x για τα οποία η C_f είναι κάτω από τον $x'x$	Λύνουμε την ανίσωση $f(x) < 0$

Θέση της C_f με C_g

Πως βρίσκουμε τα σημεία τομής της C_f με την C_g	Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$
Πως βρίσκουμε τα x για τα οποία η C_f είναι πάνω από την C_g	Λύνουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$
Πως βρίσκουμε τα x για τα οποία η C_f είναι κάτω από την C_g	Λύνουμε την ανίσωση $f(x) < g(x)$

Αν γνωρίζω την C_f τότε πως προκύπτει η C_g ;

• Όταν $g(x) = f(x) + c$	Μετατοπίζουμε τη C_f παράλληλα στο $y'y$ κατά c $\uparrow$ αν $c > 0$ $\downarrow$ αν $c < 0$
• Όταν $g(x) = f(x - c)$	Μετατοπίζουμε τη C_f παράλληλα στο $x'x$ κατά c $\rightarrow$ αν $c > 0$ $\leftarrow$ αν $c < 0$
• Όταν $g(x) = -f(x)$	Βρίσκουμε τη συμμετρική της C_f ως προς τον $x'x$.
• Όταν $g(x) = f(x) $	Όποιο τμήμα της C_f είναι πάνω από τον $x'x$ παραμένει ίδιο και βρίσκουμε το συμμετρικό σε όποιο τμήμα είναι κάτω από τον $x'x$.

Πότε μία f είναι άρτια ή περιττή και τι σημαίνει για την C_f ;

• Η f είναι άρτια όταν $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in D_f$	Η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.
• Η f είναι περιττή όταν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in D_f$	Η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7. Η συνάρτηση g , της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 1 - 2^x$, ως προς τον άξονα $y'y$, έχει τύπο

A. $g(x) = 1 + 2^x$ B. $g(x) = 1 - 2^{-x}$ Γ. $g(x) = 2^x - 1$ Δ. $g(x) = \ln(x - 1)$ Ε. $g(x) = \ln(1 - x)$

8. Η συνάρτηση που έχει γραφική παράσταση τη συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$, είναι η συνάρτηση

A. $y = f(-x)$ B. $y = -f(x)$ Γ. $y = |f(x)|$ Δ. $y = 2f(x)$ Ε. $y = -f(-x)$

9. Το πλήθος των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$ με τον άξονα $x'x$ είναι

A. 6 B. 5 Γ. 4 Δ. 3 Ε. 0

10. Το σύνολο των τετμημένων των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι

A. $\{-1, 1\}$ B. $\{1\}$ Γ. $\{-1, 1, 3\}$ Δ. $\{-1, -3, 1\}$ Ε. $\{1, 3\}$

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = 2 - x$. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων τους είναι οι αριθμοί

A. 1, 0 B. 1, -1 Γ. 1 Δ. 1, 2 Ε. 1, 0, 2

12. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

1) $f(x) = 2x + 3$

2) $f(x) = -2x^2$

3) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

4) $f(x) = e^x$

5) $f(x) = \ln x$

6) $f(x) = -\ln x$

7) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \leq 2 \\ x + 5, & x > 2 \end{cases}$

8) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$

9) $f(x) = \begin{cases} -e^x, & x \leq 0 \\ x - 1, & 0 < x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1$, $x \in [-2, 3]$. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α) $f_1(x) = f(x) + 1$

β) $f_2(x) = -f(x)$

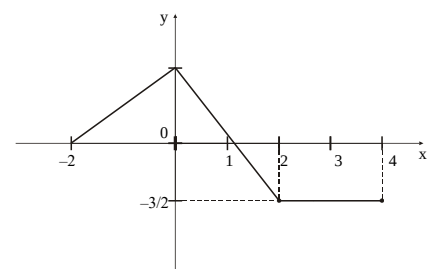
γ) $f_3(x) = |f(x)|$

14. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[2, 4]$. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α) $g(x) = f(x) + 1$

β) $h(x) = -f(x)$

γ) $\varphi(x) = |f(x)|$.



15. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g .

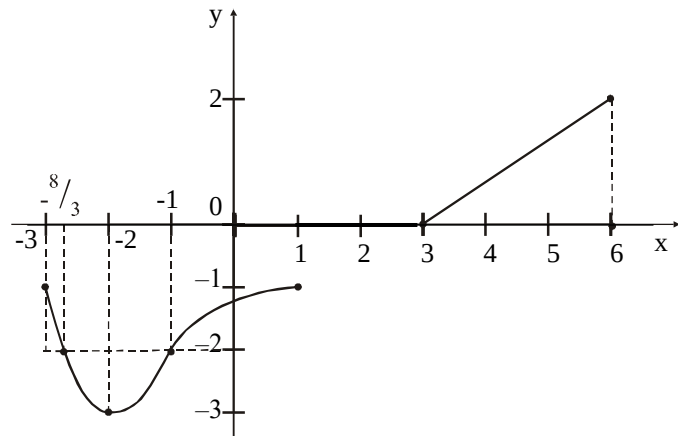
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της g .

β) Να βρείτε τον τύπο της g όταν $x \in [3, 6]$.

γ) Για ποιες τιμές του x ισχύει $g(x) = -1$;

δ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες

ισχύει: i) $-2 < g(x) < 0$ ii) $g(x) \geq 0$



16. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x(x - 2)$, $x \in [0, 2]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in D_f$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x - 1)^2 - 1$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[-1, 0]$.

γ) Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

δ) Να βρείτε τις τιμές του x όταν οι τιμές του $y = 0$ και όταν $y = \frac{3}{4}$.

§ 1.2

ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για να δείξουμε ότι δύο συναρτήσεις είναι ίσες:

- Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού τους και διαπιστώνουμε ότι είναι ίδια
- Δείχνουμε ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε x του πεδίου ορισμού

17. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x) = x + 3$ και $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ είναι ίσες	Σ Λ
18. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2\lambda^2 x + \lambda}{x + 1 - \lambda}$ και $g(x) = \frac{(3\lambda - 1)x + \lambda}{x + \lambda}$ αντίστοιχα Να προσδιορίσετε τις τιμές του λ ώστε οι f και g να είναι ίσες.	
19. Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = x$ είναι ίσες στο $\mathbb{R}$.	Σ Λ
20. Οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, & x \neq 3 \\ 10, & x = 3 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} \frac{4x-12}{(2x-6)^2}, & x \neq 3 \\ 10, & x = 3 \end{cases}$ είναι ίσες.	

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω οι συναρτήσεις $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ	ΤΥΠΟΣ
➤ $f + g$	$D_f \cap D_g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
➤ $f \cdot g$	$D_f \cap D_g$	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
➤ λf	D_f	$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
➤ $\frac{f}{g}$	$D_f \cap D_g - \{ \text{ρίζες της } g(x)=0 \}$	$\left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
➤ $f \circ g$	$\{ x \in D_g \text{ ώστε } g(x) \in D_f \}$	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1ον Βρίσκω το πεδίο ορισμού της νέας συνάρτησης

2ον Βρίσκω το τύπο της νέας συνάρτησης

21. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x - 8$ με $D_f = [-2, 5]$ και $g(x) = 4x^2 - 1$ με $D_g = [-4, 4]$.

Να ορίσετε τις: 1) $f + g$ 2) f / g 3) $g \circ f$

22. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [2, 4] \\ 5, & x \in (4, 7] \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in [1, 5] \\ 2x + 3, & x \in (5, 6] \end{cases}$.

Να ορίσετε την $f + g$

Όταν έχω $\pm \cdot /$ με πολλαπλούς τύπους
κάνω τη πράξη στα ΚΟΙΝΑ υποδιαστήματα

23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} 1 + e^{x+2}, & x \leq 3 \\ 1 - e^{x+2}, & x > 3 \end{cases}$ και $g(x) = 2 + \ln x$.

Να ορίσετε την $f \circ g$

Όταν έχω σύνθεση με πολλαπλούς τύπους
παίρνω ΟΛΟΥΣ τους συνδυασμούς και όπου
ορισθεί (δηλ. το π.ο. της σύνθεσης βγαίνει $\neq \emptyset$)

24. Αν $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(2x - 3)$

25. Να εκφράσετε την f ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων (να γίνει επαλήθευση) αν:

- | | | |
|-------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| 1) $f(x) = \eta\mu^2 x$ | 2) $f(x) = \eta\mu x^2$ | 3) $f(x) = \eta\mu^2 x - 1$ |
| 4) $f(x) = 2 \ln x + 3$ | 5) $f(x) = \ln(e^{2x} + 3)$ | 6) $f(x) = \eta\mu^2(3x^2 - 1)$ |

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ**Μορφή 1''**

Όταν μας δίνουν τη **fog** και τη **g** και ζητάνε την **f**

Θέτω $g(x) = u$ και

- σύμφωνα με τους περιορισμούς του x , βρίσκω τους περιορισμούς για το u (θα είναι το π.ο. της f)
- αντικαθιστώ στο τύπο της fog και βρίσκω το

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ**Μορφή 2''**

Όταν μας δίνουν τη **fog** και την **f** και ζητάνε τη **g**

- Γράφω την $f(g(x))$ από την fog
 - Γράφω την $f(g(x))$ από την f (όπου x το $g(x)$)
- Τα πρώτα μέλη ίσα, άρα και τα δεύτερα ...

26. Αν $(f \circ g)(x) = \sqrt{1+x^2}$ και $g(x) = -x^2$ να ορίσετε την f

27. Αν $(f \circ g)(x) = \frac{1+x^2}{x}$ με $x \in \mathbb{R}^*$ και $f(x) = \frac{x-1}{x}$ με $x \in \mathbb{R}^*$ να ορίσετε την g .

28. Να αποδείξετε ότι η σύνθεση:

A) Δύο άρτιων είναι άρτια

B) Δύο περιττών είναι περιττή

29. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $xf(x) + f(-x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)

ΛΕΕΑ Αφού η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ μπορώ να θέσω όπου x το $-x$ οπότε να έχω άλλη μία σχέση με αγνώστους τα $f(x)$ και $f(-x)$, και να γίνει ένα ωραίο συστηματάκι, για να βρω το $f(x)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

30. Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \leq -3 \\ 5-2x, & -3 < x \end{cases}$ και $f_2(x) = \begin{cases} 4x+3, & x < 2 \\ 7x-5, & 2 \leq x \end{cases}$

Να βρείτε τον τύπο της F με $F(x) = 3f_1(x) - 2f_2(x)$.

31. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Τότε ισχύει: $fog = f \cdot g$ Σ Λ
 $fog = gof.$ Σ Λ

32. Έστω $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$ και $h(x) = x$. Τότε θα ισχύει η ισότητα $fog = h$ Σ Λ

33. Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 4 - x^2$, τότε το πεδίο ορισμού της fog είναι
 Α. $(-\infty, 2]$ Β. $[-2, 2]$ Γ. $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ Δ. $(-2, 2)$ Ε. $(0, 2)$

34. Αν $f(x) = x^4 - 4x^3 - 3x + 7$ και $g(x) = 7$, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ έχει τύπο

- A. $7x^4 - 28x^3 - 21x + 49$ B. $x^2 - 4x - 14$ Γ. 289 Δ. 7 Ε. $(x^2 - 7)^2$

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{5}{x-3} + 3(x-3)$. Να γράψετε την f ως σύνθεση δύο συναρτήσεων.

36. Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια, η g περιττή και $h = g \circ f$, $\varphi = f \circ g$, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x	f (x)	g (x)	h (x)	φ (x)
- 3	0	0		
- 2	2	2		
- 1	2	2		
0	0	0		
1				
2				
3				

37. Καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις μπορεί να γραφεί στη μορφή $f(g(x))$. Να βρείτε σε κάθε περίπτωση κατάλληλες συναρτήσεις f και g .

α) $h(x) = \sin^2 x$ β) $h(x) = 3(x^2 + 2)^3$ γ) $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ δ) $h(x) = \eta\mu\left(\frac{1}{x^v}\right)$ ε) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

38. Αν $f(x) = ax + \beta$ με $a \neq 0$, να προσδιορίσετε τα a, β έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$(f \circ f)(x) + f(1-x) = f(x+2)$$

§ 1.3

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ γνησίως αύξουσας

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του Π.Ο. της, όταν για οποιαδήποτε

$$x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \text{ ισχύει } f(x_1) < f(x_2)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ γνησίως φθίνουσας

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του Π.Ο. της, όταν για οποιαδήποτε

$$x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \text{ ισχύει } f(x_1) > f(x_2)$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για την εύρεση της μονοτονίας:

1 ^{ος} τρόπος Συνθετικά	Θεωρούμε τυχαία $x_1 < x_2$ στο D_f και συνθετικά προσπαθούμε να φτάσουμε σε $f(x_1) < \text{ή} > f(x_2)$
2 ^{ος} τρόπος με το λ	Με $x_1 \neq x_2$ στο D_f , υπολογίζουμε το $\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ και • Αν $\lambda > 0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ • Αν $\lambda < 0$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ • Αν $\lambda = 0$ σταθερή
3 ^{ος} τρόπος με την παράγωγο	

39. Να εξετάσετε τη μονοτονία της : $f(x) = \sqrt{x-1}$

40. Να εξετάσετε τη μονοτονία της : $f(x) = 2\ln(x-2) - 1$

41. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.
Να αποδείξετε ότι η $g(x) = f(x) - 2x$ είναι επίσης μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

42. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.
Αν ισχύει $f(a - \ln a) > f(a - 2)$ να υπολογίσετε το a

43. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και περιττή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ τότε :

1) υπολογίστε το $f(0)$

2) λύστε την ανίσωση $f(x-1) + f(x-2) + f(0) < 0$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ ολικού μεγίστου

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό **μέγιστο** το $f(x_0)$ όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$

ΟΡΙΣΜΟΣ ολικού ελαχίστου

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό **ελάχιστο** το $f(x_0)$ όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για την εύρεση των ακρότατων :

1 ^{ος} τρόπος	Θεωρούμε $x \in A$ και συνθετικά προσπαθούμε να φτάσουμε σε $f(x) \leq$ ή $\geq f(x_0)$ όπου x_0 στοιχείο του A
Συνθετικά	
2 ^{ος} τρόπος	με την παράγωγο

44. Να εξετάσετε ως προς τα ακρότατα την : $f(x) = \sqrt{x-1} - 3$

45. α) Για κάθε $a > 0$, να δείξετε ότι $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{1}{x}$ με $x > 0$.

46. Η μονοτονία μιας συνάρτησης f φαίνεται στον πίνακα.

x	0	1	2	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$f(1)=0$	$f(2)=-1$	$+\infty$

Τότε δεν ισχύει ότι :

- Α. Η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- Β. Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(0, 1]$ και $[2, +\infty)$
- Γ. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 2]$
- Δ. Η f έχει μέγιστο το 0 και ελάχιστο το -1
- Ε. Είναι $f(x) < 0$ όταν $0 < x < 1$

ΈΝΑ ΠΡΟΣ ΕΝΑ (1 – 1)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνάρτηση 1 – 1 ,

αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$

Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι 1 – 1

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για να δείξω ότι μία συνάρτηση είναι 1 – 1 :

1 ^{ος} τρόπος με αν/φη του ορισμού	Θεωρούμε τυχαία x_1, x_2 στο D_f με $f(x_1) = f(x_2)$ και προσπαθούμε να καταλήξουμε ότι $x_1 = x_2$
2 ^{ος} τρόπος με τη μονοτονία	Αρκεί Ν.Δ.Ο. είναι γνησίως μονότονη
3 ^{ος} τρόπος με την εξίσωση $f(x) = \psi$	Αρκεί Ν.Δ.Ο. για κάθε ψ του συνόλου τιμών, η εξίσωση $f(x) = \psi$ έχει μοναδική λύση ως προς x
4 ^{ος} τρόπος από την C_f	Αρκεί Ν.Δ.Ο. δεν υπάρχουν σημεία της C_f με την ίδια τετμημένη (κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f σε ένα μόνο σημείο)
5 ^{ος} τρόπος με τον ορισμό	Θεωρούμε τυχαία x_1, x_2 στο D_f με $x_1 \neq x_2$ και συνθετικά προσπαθούμε να καταλήξουμε ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$

47. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι 1-1: A. $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ B. $f(x) = x^2 + x - 2$

48. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι 1-1: A. $f(x) = 3\sqrt{x-1}$ B. $f(x) = |x-1|$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και σύνολο τιμών $f(A)$ η οποία είναι 1-1, τότε ορίζεται μια συνάρτηση που τη συμβολίζουμε με f^{-1} η οποία έχει πεδίο ορισμού το $f(A)$, σύνολο τιμών το A και ισχύει

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \quad \mu \epsilon \quad x \in A \quad \kappa \alpha \iota \quad y \in f(A)$$

Πολύτιμες συνέπειες του ορισμού

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \alpha \nu \quad x \in A$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \alpha \nu \quad y \in f(A)$$

Η γραφική παράσταση της αντίστροφης είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, με άξονα συμμετρίας την διχοτόμο του 1^{ου} – 3^{ου} τεταρτ. (δηλ. την ευθεία $y = x$)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για να βρούμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης f όταν ξέρουμε τον τύπο της f :

Αφού βρούμε το D_f

α) δείχνω ότι είναι 1-1 (αν δεν είναι τότε δεν υπάρχει αντίστροφη)

β) λύνω την εξίσωση $f(x) = \psi$ ως προς x και

♥ ότι περιορισμοί προκύπτουν για το ψ είναι πεδίο ορισμού της αντίστροφης και

♥ η μοναδική λύση της ως προς x , είναι ο τύπος της αντίστροφης δηλ. $x = f^{-1}(\psi)$

49. Να βρεθεί η αντίστροφη (αν υπάρχει) της $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

50. Να βρεθεί η αντίστροφη (αν υπάρχει) της $f(x) = \ln(x-1)$

51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$,

A) να βρείτε την αντίστροφή της f B) να γίνει η γραφική παράσταση της C_f (μέσω της αντίστροφης)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για να βρούμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης f όταν ξέρουμε μια συναρτησιακή σχέση με την f :

α) δείχνω ότι είναι 1-1

Θεωρώ ότι $f(x_1) = f(x_2)$ και συνθετικά σχηματίζω μέρος της συναρτησιακής, ώστε να καταλήξω σε

$$x_1 = x_2$$

β) Θέτω $f(x) = \psi$ (ή $x = f^{-1}(\psi)$) στη συναρτησιακή και προσπαθώ να λύσω ως προς x (ή $f^{-1}(\psi)$)

52. Έστω μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(f(x))^3 + f(x) + x = 0$

Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για την επίλυση συναρτησιακών εξισώσεων:

$$\text{Με την 1-1 δηλ. } f(g(x)) = f(h(x)) \xrightarrow{f(1-1)} g(x) = h(x)$$

53. Έστω μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f(f(x)) + (f(x))^3 = 2x + 3$$

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

B. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$

Γενικές ασκήσεις

54. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2\lambda x + 1 - \lambda}{x + \lambda + 2}$ και $g(x) = \frac{(\lambda^2 - 3)x - 2\lambda + 4}{x + 2\lambda - 1}$

α. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f = g$

β. Αν $f = g$ να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε την αντίστροφή της

55. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \in [-2, 0] \\ 3x + 2, & x \in (0, 4] \end{cases}$ είναι 1-1.

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3^x}{2 + 3^x}$

α. Να αποδείξετε ότι είναι 1-1

β. Να υπολογίσετε την f^{-1}

57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - \sqrt{x - 2}$. Να βρείτε την αντίστροφή της (αν ορίζεται)

58. Αν για την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(xy) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}_+ \text{ και } f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

να δειχθεί ότι :

α. $f(1) = 0$

β. $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0$

γ. Η συνάρτηση είναι 1-1

δ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x^2 - 2) = 0$

59. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι 1-1, δεν είναι περιοδική

β. Αν ισχύει $(f \circ f)(x) = 3x + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η f δεν είναι περιοδική

γ. Να αποδείξετε ότι η f έχει ρίζα το 0.

60. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(|x|) = f(x)$.

61. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, $x \neq 0$, να βρείτε το $f(2)$.

62. Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = x^x$, $x > 0$ ως σύνθεση δύο άλλων συναρτήσεων.

63. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$, οι οποίες είναι γνησίως μονότονες και έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας (είναι και οι δύο γνησίως αύξουσες ή και οι δύο γνησίως φθίνουσες).

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων $f \circ f$ και $g \circ g$.

γ) Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \ln[\ln(x)]$, $x > 1$.

64. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της f .

65. Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Από αυτό να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f

β) το σύνολο τιμών της f

γ) το διάστημα και το είδος μονοτονίας της f

δ) τα ακρότατα της f

ε) τον τύπο της f , αν είναι γνωστό ότι:

στο διάστημα $[-1, 0)$ είναι υπερβολή της μορφής $y = \frac{a}{x}$ και

στο διάστημα $[0, 2)$ είναι παραβολή της μορφής $y = ax^2$.

