

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB . (8)

δ) Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ΣAB να είναι ισόπλευρο. (7)

✓ Θέμα 79

● D15029

Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(1, \sqrt{3})$ και $B(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA , καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$. (6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB , καθώς και τη γωνία φ που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$. (6)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, με $\hat{A} = 90^\circ$. (7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$. (6)

✓ Θέμα 80

● D15275

Θεωρούμε το σημείο $M(2,1)$ και έστω $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε την εξίσωση των ευθειών ε που διέρχονται από το σημείο M και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ . (2)

ii. Για ποιες τιμές του λ οι ευθείες ε σχηματίζουν τρίγωνο με τους άξονες; (5)

β) Έστω ότι οι ευθείες ε τέμνουν τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A, B αντίστοιχα.

i. Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων OA και OB συναρτήσει του λ . (6)

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι ευθείες ε σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες. (6)

iii. Να βρείτε το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται σε κάθε περίπτωση. (6)

✓ Θέμα 81

● D15475

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων τα σημεία $A(2,1)$ και $B(4,3)$ παριστάνουν τη θέση δύο εργοστασίων που βρίσκονται κοντά σε μια ακτή στην οποία πρόκειται να κατασκευαστεί μία αποβάθρα που θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια. (8)

β) Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση $\varepsilon: y = 2x - 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου N της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα, ώστε να ισαπέχει από τα δύο εργοστάσια. (10)

γ) Αν $N(4,1)$, να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό. (7)

✓ Θέμα 82

● D15658

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -2)$ και $\vec{\beta} = (1, 1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο $K(2, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. (4)

β) Αν το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}$, το σημείο B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας AB , τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα πέρατα των διανυσμάτων είναι τα σημεία $A(4, -1)$ και $B(3, 2)$. (5)

ii. Να αποδείξετε ότι $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$. (6)

iii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ , αν το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB και ισχύει ότι $|\vec{K\Gamma}| = \frac{1}{2}|\vec{AB}|$. (10)

✓ Θέμα 83

● D17078

Δίνονται τα σημεία $A(3, 2\alpha)$, $B(4, \alpha)$, $\Gamma(\alpha + 1, 1 - \alpha)$ και $\Delta(\alpha, 1)$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A, B έχει εξίσωση $y = -\alpha x + 5\alpha$. (6)

ii. Τα σημεία Γ, Δ ανήκουν στην ευθεία AB , αν και μόνο αν $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$. (7)

iii. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, όταν και μόνο όταν $\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$. (7)

β) Να αιτιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός:

«Υπάρχει πραγματικός αριθμός α , έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο». (5)

✓ Θέμα 84

● D18568

Δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(3, -2)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου. (4)

β) Αν η ευθεία AB τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα σημείο Δ και η ευθεία $A\Gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο E , τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E . (10)

ii. Να αποδείξετε ότι $\vec{A\Delta} = 2\vec{AB}$ και $\vec{AE} = 2\vec{E\Gamma}$. (6)

γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες DE και $B\Gamma$ είναι παράλληλες. (5)

✓ Θέμα 85

● D21160

Δίνεται τρίγωνο $OBΓ$ με κορυφές τα σημεία $O(0,0)$, $B(\kappa,0)$ και $\Gamma(0,2\kappa)$, όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου $OBΓ$ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $OBΔE$ και $ΟΓΖΗ$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $ΓΔ$ και BZ . (10)

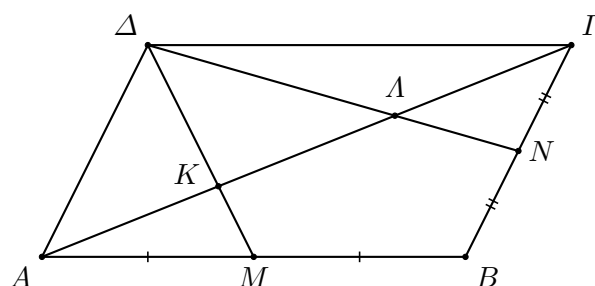
β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ζ του τριγώνου $OBΓ$ που άγεται από την κορυφή O . (7)

γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $ΓΔ, BZ$ και ζ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (8)

✓ Θέμα 86

● D22065

Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(8,0)$, $\Gamma(10,4)$ και $\Delta(2,4)$. Τα σημεία M, N είναι τα μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα, ενώ τα K, Λ είναι τα σημεία που τέμνουν τα τμήματα ΔM και ΔN τη διαγώνιο $A\Gamma$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (5)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και N . (5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $A\Gamma, \Delta M, \Delta N$ και τις συντεταγμένες των σημείων K, Λ . (10)

δ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K και Λ τριχοτομούν τη διαγώνιο $A\Gamma$, δηλαδή τη χωρίζουν σε τρία ίσα τμήματα. (5)

2.2 Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας

❖ Θέματα Β ❖

✓ Θέμα 87

● B15657

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2: x - 2y = -2$.

α) Να βρείτε το κοινό σημείο M των ευθειών ε_1 και ε_2 . (12)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3: 3x - y = 4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (13)

✓ Θέμα 88

● B21662

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: -x + y - 2 = 0$ και τα σημεία $A(-5, 1)$ και $B(-3, 5)$.

- α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς το σημείο B . (10)
- β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε' που διέρχεται από το σημείο B και είναι κάθετη στην ευθεία ε . (5)
- ii. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε και ε' . (5)
- iii. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου B ως προς την ευθεία ε . (5)

✓ Θέμα 89

● B21964

Δίνεται το σημείο $A(4, -2)$ και η ευθεία $\varepsilon_1: x - y + 2 = 0$.

- α) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1 . (8)
- β) Να βρείτε το σημείο τομής B των ευθειών ε_1 και $\varepsilon_2: y = -x + 2$. (8)
- γ) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία ε_1 . (9)

✓ Θέμα 90

● B22059

Δίνεται το σημείο $A(1, -3)$ και η ευθεία $\varepsilon: 4x + 6y = 1$.

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο A δεν βρίσκεται πάνω στην ευθεία ε . (10)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην ευθεία ε . (15)

✓ Θέμα 91

● B22071

Οι πλευρές AB και AD ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ έχουν εξισώσεις

$$x + 2y + 1 = 0 \quad \text{και} \quad 2x + y + 5 = 0$$

αντίστοιχα. Επίσης, το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο $K(1, 2)$.

- α) i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A έχει συντεταγμένες $(-3, 1)$. (8)
- ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(5, 3)$. (7)
- β) Να βρείτε τις εξισώσεις των δύο άλλων πλευρών $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ του παραλληλογράμμου. (10)

✓ Θέμα 92

● B22072

Δίνονται οι εξισώσεις

$$(1): \lambda x + (\lambda - 1)y - 4 = 0 \quad \text{και} \quad (2): (3\lambda + 1)x - 2\lambda y - 7 = 0.$$

- α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (15)
- β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες. (10)

✓ Θέμα 93

● B22092

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφή $A(1,4)$. Η πλευρά $A\Delta$ και η διαγώνιος $B\Delta$ έχουν εξισώσεις

$$3x - 2y + 5 = 0 \quad \text{και} \quad y = x + 2$$

αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες $(-1, 1)$. (12)
- β) Αν οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και $B\Delta$ του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου $A\Gamma$. (13)

✓ Θέμα 94

● B22171

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x - y = 5$ και $\varepsilon_2: x - y + 1 = 0$.

- α) Να βρείτε το σημείο τομής M των ευθειών ε_1 και ε_2 . (10)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(3, 4)$ και είναι κάθετη στην ευθεία ε_2 . (10)
- γ) Να βρείτε ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία ε_1 . (5)

❖ Θέματα Γ ❖

✓ Θέμα 95

● C15178

Δίνεται η εξίσωση (1): $(\mu + 1)x + (\mu + 2)y = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

- α) i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.
 ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων. (2)
- β) i. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης 0; Ποια είναι η εξίσωσή της; (3)
 ii. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης; Ποια είναι η εξίσωσή της; (3)
- γ) Να βρείτε για ποια τιμή του μ προκύπτει ευθεία η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x' . Ποια είναι η εξίσωσή της; (9)

❖ Θέματα Δ ❖

✓ Θέμα 96

● D14970

Θεωρούμε την οικογένεια ευθειών $\varepsilon_\lambda: y = \lambda(x - 2) + \lambda - 2, \lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν για $\lambda = 1$ και $\lambda = 2$. Στη συνέχεια, να βρείτε το κοινό σημείο M των δύο ευθειών. (7)

Έστω $M(1, -2)$.

- β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες ε_λ διέρχονται από το σημείο M . (5)

- γ) i. Να βρείτε τα σημεία τομής A, B των ευθειών ε_λ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (6)

- ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι ίσο με $\frac{1}{2}$. (7)

✓ Θέμα 97

● D15004

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(4, 2)$ και $B(8, 5)$. (5)

Έστω $\varepsilon_1: 3x - 4y - 4 = 0$.

- β) Να αποδείξετε ότι η οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και $\varepsilon_2: 7x - y - 1 = 0$ είναι 45° . (8)

- γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 . (4)

- δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_3 , έτσι ώστε η ευθεία ε_2 να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_3 . (8)

✓ Θέμα 98

● D15253

Δίνεται η εξίσωση (1): $(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0, \mu \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία ε . (5)

- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ευθείες ε :

- i. είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$. (4)

- ii. είναι παράλληλες στον άξονα $y'y$. (4)

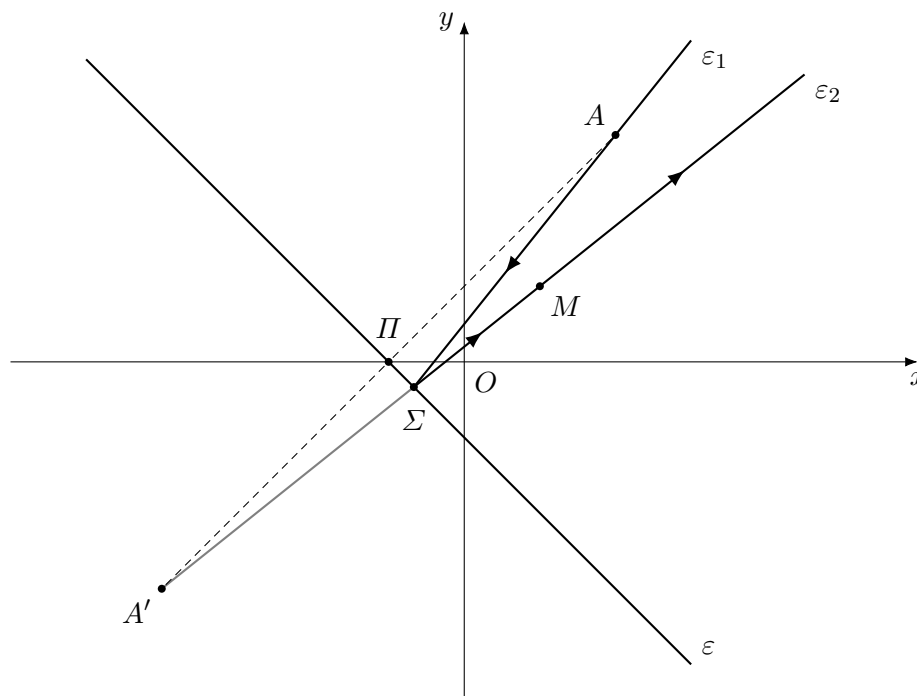
- iii. διέρχονται από την αρχή των αξόνων. (4)

- γ) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες ε που προκύπτουν από την εξίσωση (1) διέρχονται από σταθερό σημείο. (8)

✓ Θέμα 99

● D15439

Μια φωτεινή ακτίνα ε_1 , διερχόμενη από το σημείο $A(2, 3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία ε με εξίσωση $x + y + 1 = 0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$.



- α) i. Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία ε είναι το σημείο $\Pi(-1, 0)$. (7)
- ii. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία ε είναι το σημείο $A'(-4, -3)$. (5)
- β) i. Αν η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία ε_2 η οποία διέρχεται από τα σημεία A', Σ, M , τότε να βρείτε την εξίσωσή της. (4)
- ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου πρόσπτωσης Σ της φωτεινής ακτίνας ε_1 πάνω στην ευθεία ε . (5)
- γ) Αν $\Sigma\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, να βρείτε την εξίσωση της προσπίπτουσας ακτίνας ε_1 . (4)

✓ Θέμα 100

● D16003

Θεωρούμε την οικογένεια ευθειών $\varepsilon_\alpha: (\alpha - 4)x - 2\alpha y + \alpha + 4 = 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν για $\alpha = 0$ και $\alpha = 1$. Στη συνέχεια, να βρείτε το κοινό σημείο M των δύο ευθειών. (8)
- β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες ε_α διέρχονται από το σημείο M . (6)
- γ) Έστω ότι μία από τις ευθείες ε_α τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία A, B αντίστοιχα. (8)

i. Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha < 4$. (6)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $(OA) = 2(OB)$. (5)

✓ Θέμα 101

● D16477

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων οι ευθείες $\varepsilon_\lambda: \lambda x + (1 - \lambda)y + 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνουν τις φωτεινές ακτίνες που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ . Επίσης, ένα φορτηγό πλοίο είναι αγκυροβολημένο στο σημείο $O(0, 0)$.

α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ . (10)

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από τον φάρο προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο. (5)

β) Ένα ρυμουλκό πλοίο P βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ και η φωτεινή ακτίνα που το φωτίζει έχει εξίσωση $x + y + 4 = 0$. Η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι μήκους 4 ναυτικών μιλίων. Να βρείτε τις συντεταγμένες του ρυμουλκού πλοίου P . (10)

✓ Θέμα 102

● D18244

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \sqrt{3}x$ και $\varepsilon_2: y = x$.

α) Να σχεδιάσετε τις ευθείες ε_1 και ε_2 στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. (6)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μία από τις ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα x' . (6)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι 15° . (3)

δ) Να αποδείξετε ότι $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$. (10)

✓ Θέμα 103

● D21652

Δίνονται οι εξισώσεις

$$(1): \lambda x + y = 2\lambda \quad \text{και} \quad (2): x + \lambda y = \lambda + 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες ε_λ και η_λ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες ε_λ και η_λ τέμνονται. (6)

γ) Για $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$:

i. Να βρείτε συναρτήσει του λ τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των ευθειών ε_λ και η_λ . (7)

ii. Αν $M\left(\frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda}{\lambda + 1}\right)$, να αποδείξετε ότι το σημείο M κινείται στην ευθεία $\zeta: x - y = 1$. (6)