

✓ Θέμα 18

● B19038

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-5, -5)$.

α) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$. (9)

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$. (8)

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ , έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γράφεται στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$. (8)

✓ Θέμα 19

● B21681

Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$ και $\Gamma(2, 5)$.

α) Να βρείτε σημείο Δ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$. (10)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (8)

γ) Να βρείτε το κέντρο O του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. (7)

✓ Θέμα 20

● B22038

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (5, -12)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο ίσο με 1. (12)

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο ίσο με 7. (13)

✓ Θέμα 21

● B22044

Δίνονται τα σημεία $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ και $\Gamma(5, 1)$.

α) Να τοποθετήσετε τα σημεία A, B, Γ σε ένα σύστημα συντεταγμένων. (10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τέταρτου σημείου Δ , έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο. (15)

✓ Θέμα 22

● B22052

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2, 5)$ και $\vec{\beta} = (1, -3)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$. (12)

β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\nu} = (8, -21)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. (13)

✓ Θέμα 23

● B22060

Δίνονται τα σημεία $A(0, 2)$, $B(3, 0)$, $\Gamma(6, 2)$ και $\Delta(3, 4)$.

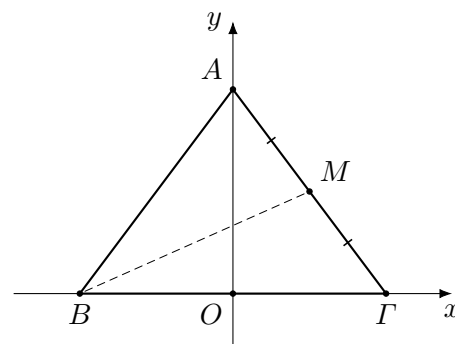
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Delta}$. (12)

β) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$. Τι είδους σχήμα είναι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$; (13)

✓ Θέμα 24

● B22557

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση $B\Gamma$ και ύψος AO . Η κορυφή A είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές B, Γ είναι σημεία του άξονα $x'x$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Έστω $(B\Gamma) = 12$, $(AO) = 8$ και M το μέσο της πλευράς AG .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι κορυφές του τριγώνου είναι τα σημεία $A(0, 8)$, $B(-6, 0)$ και $\Gamma(6, 0)$. (9)

ii. το μέσο της πλευράς AG είναι το σημείο $M(3, 4)$. (9)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου AM . (7)



✓ Θέμα 25

● D17076

Δίνονται τα σημεία $A(-3, -1)$, $B(0, 3)$ και $M(x, y)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (6)

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (6)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \geq 5$. (6)

δ) Να αιτιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός:

«Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4 \text{.} \quad (7)$$

✓ Θέμα 26

● D17077

Τα διανύσματα θέσης των σημείων A, B ως προς την αρχή των αξόνων O είναι τα

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OB} = (\lambda + 1)\vec{i} + (\lambda + 3)\vec{j},$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (\lambda - 1)\vec{i} + 3\vec{j}$. (6)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων A και B συναρτήσει του λ . (7)

γ) Για ποιες τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5; (7)

δ) Να αιτιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός:

«Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος, ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή».

 (5)

✓ Θέμα 27

● D20938

Θεωρούμε τρίγωνο OAB με $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = (6, 8)$, όπου O η αρχή των αξόνων. Για το διάνυσμα $\vec{a}$ γνωρίζουμε ότι έχει συντεταγμένες $(|\vec{a}| - 4, |\vec{a}| - 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{a}| = 2$. (10)

β) Να βρείτε σημείο Γ τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο $OAGB$ να αποτελεί παραλληλόγραμμο. (8)

γ) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η πλευρά OA με τη διαγώνιο AB του παραλληλογράμμου $OAGB$. (7)

1.5 Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

❖ Θέματα Β ❖

✓ Θέμα 28

● B14586

Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ και $\Gamma(5, -2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AI}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή. (9)

β) Αν M είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$, να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{BI}$. (8)

γ) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AM}$. (8)

✓ Θέμα 29

● B14953

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-2, 5)$, $B(7, 8)$ και $\Gamma(1, -4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$. (10)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$. (5)

✓ Θέμα 30

● B15038

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια, ώστε $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (9)

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$. (6)

γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta})(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$. (10)

✓ Θέμα 31

● B15073

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. (8)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (8)

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$. (9)

✓ Θέμα 32

● B15186

Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(6, 3)$, $\Gamma(1, -2)$ και $\Delta(9, 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι το μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4, 2)$ και το μέσο N του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5, 0)$. (8)

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MN} = (1, -2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8, 4)$. (8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$. (9)

✓ Θέμα 33

● B15252

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3, -1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = (1, -2)$. (8)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, με υποτείνουσα την πλευρά AG . (9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (8)

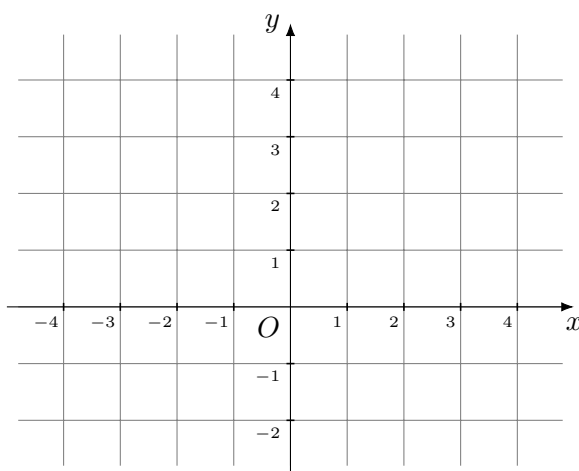
✓ Θέμα 34

● B15317

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (3, 0)$ και $\vec{w} = (-3, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{v} \nparallel \vec{w}$. (12)

β) i. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$. (10)



ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$. (3)

✓ Θέμα 35

● B15379

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 3)$ και $\vec{\beta} = (3, -1)$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και τη γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. (13)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. (12)

✓ Θέμα 36

● B15463

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3, -1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = (1, -2)$. (8)

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$. (9)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$. (8)

✓ Θέμα 37

● B15825

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$. (8)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$. (10)

γ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$. (7)

✓ Θέμα 38

● B15852

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 2)$ και $\vec{\beta} = (-2, 1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. (7)

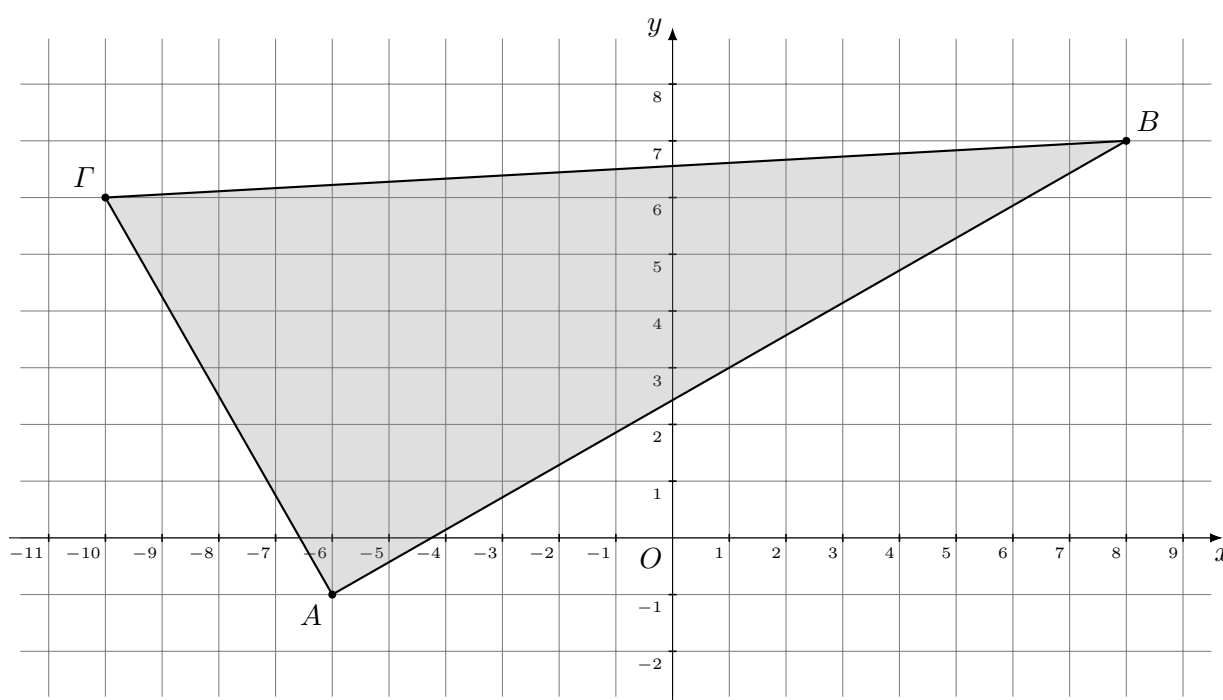
β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$. (6)

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{v}$. (12)

✓ Θέμα 39

● B15996

Δίνονται τα σημεία $A(-6, -1)$, $B(8, 7)$ και $\Gamma(-10, 6)$ τα οποία ορίζουν τρίγωνο.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$ και του αθροίσματός τους $\vec{AB} + \vec{B\Gamma}$. (10)

β) Ένας μαθητής βλέποντας το παραπάνω σχήμα ισχυρίστηκε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την ορθότητα του ισχυρισμού αυτού. (15)