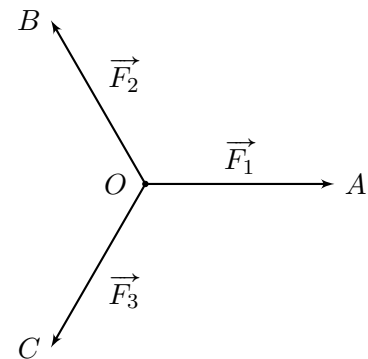


❖ Θέματα Δ ❖

✓ Θέμα 2

● D22068

Σε ένα υλικό σημείο O εφαρμόζονται τρεις δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ οι οποίες σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120° , έτσι ώστε το υλικό σημείο O να ισορροπεί.



- α) Ποια σχέση ανάμεσα στα διανύσματα $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ εκφράζει την συνθήκη ισορροπίας; (5)
- β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$ είναι αντίθετα. (5)
- γ) Αν A, B, Γ, Δ είναι τα πέρατα των διανυσμάτων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ και $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ αντίστοιχα (θεωρούμενων ως διανυσμάτων με αρχή το σημείο O), να αποδείξετε ότι:
- $A\hat{O}\Delta = B\hat{O}\Delta = 60^\circ$. (5)
 - $O\hat{\Delta}B = 60^\circ$. (5)
- δ) Να αποδείξετε ότι $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$. (5)

1.3 Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα

❖ Θέματα Β ❖

✓ Θέμα 3

● B15010

Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία A, B, Γ και τα διανύσματα $\vec{B\Delta}, \vec{\Gamma E}$ τέτοια, ώστε

$$\vec{B\Delta} = \vec{BA} + \vec{B\Gamma} \quad \text{και} \quad \vec{\Gamma E} = \vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma B}.$$

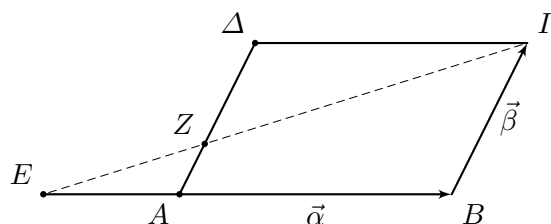
- α)
 - Να αποδείξετε ότι $\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}$ και $\vec{A\vec{E}} = \vec{\Gamma B}$. (8)
 - Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{A\vec{E}}$ είναι αντίθετα. (8)
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί τα σημεία A, Δ και E είναι συνευθειακά. (9)

✓ Θέμα 4

● B21165

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$. Τα σημεία E και Z είναι τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Delta}.$$



α) Να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{2}\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3}\vec{\beta}. \quad (10)$$

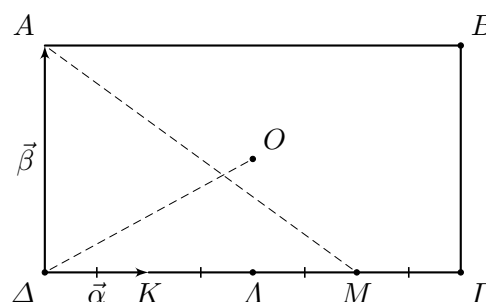
β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{Z\Gamma} = 2\overrightarrow{EZ}$. (9)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία E, Z και Γ είναι συνευθειακά. (6)

✓ Θέμα 5

● B22042

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O . Τα σημεία K, Λ, M χωρίζουν την πλευρά $\Delta\Gamma$ σε τέσσερα ίσα τμήματα.



Αν $\overrightarrow{\Delta K} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta A} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε καθένα από τα ακόλουθα διανύσματα ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

α) $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ (8)

β) $\overrightarrow{MA}$ (8)

γ) $\overrightarrow{O\Delta}$ (9)



✓ Θέμα 6

● D21885

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ, E εσωτερικά των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{AB} = \kappa \cdot \overrightarrow{A\Delta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \cdot \overrightarrow{AE},$$

όπου κ, λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε:

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. (8)

β) i. Αν $\kappa = \lambda$, να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{B\Gamma} \parallel \overrightarrow{\Delta E} \quad \text{και} \quad |\overrightarrow{B\Gamma}| = \kappa \cdot |\overrightarrow{\Delta E}|. \quad (10)$$

ii. Αν $\kappa = \lambda = 2$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ και να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί. (7)

1.4 Συντεταγμένες στο Επίπεδο

❖ Θέματα Β ❖

✓ Θέμα 7

● B14666

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$, $\vec{\beta} = (-2, -1)$ και ορίζουμε τα διανύσματα

$$\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}.$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$. (9)

β) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. (9)

γ) Αν τα $\vec{\beta}, \vec{w}, \vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων K, Λ, M αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά. (7)

✓ Θέμα 8

● B15002

Δίνονται τα σημεία $A(0, 5)$, $\Delta(4, 5)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (3, -3)$, $\overrightarrow{AI} = (3, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο I έχει συντεταγμένες $(3, 6)$. (11)

β) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{GI}$. (6)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{GI}$. (8)

✓ Θέμα 9

● B15043

Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0, 5)$, $B(4, 1)$ και $\Gamma(6, -1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στον χάρτη.

α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BI}$. (6)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και έτσι υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιαστεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς. (7)