

β) i. Αν $\kappa = \lambda$, να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{B\Gamma} \parallel \overrightarrow{\Delta E} \quad \text{και} \quad |\overrightarrow{B\Gamma}| = \kappa \cdot |\overrightarrow{\Delta E}|. \quad (10)$$

ii. Αν $\kappa = \lambda = 2$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ και να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί. (7)

1.4 Συντεταγμένες στο Επίπεδο

❖ Θέματα Β ❖

✓ Θέμα 7

● B14666

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$, $\vec{\beta} = (-2, -1)$ και ορίζουμε τα διανύσματα

$$\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}.$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$. (9)

β) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. (9)

γ) Αν τα $\vec{\beta}, \vec{w}, \vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων K, Λ, M αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά. (7)

✓ Θέμα 8

● B15002

Δίνονται τα σημεία $A(0, 5)$, $\Delta(4, 5)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (3, -3)$, $\overrightarrow{AI} = (3, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο I έχει συντεταγμένες $(3, 6)$. (11)

β) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{GI}$. (6)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{GI}$. (8)

✓ Θέμα 9

● B15043

Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0, 5)$, $B(4, 1)$ και $\Gamma(6, -1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στον χάρτη.

α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BI}$. (6)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και έτσι υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιαστεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς. (7)

- β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό Γ . (12)

(Οι αποστάσεις εκφράζονται σε km)

✓ Θέμα 10

● B15854

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$. (10)
- β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} = -4\vec{\alpha}$. (7)
- γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του μέτρου του διανύσματος $\vec{\alpha}$. (8)

✓ Θέμα 11

● B16147

Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}, \quad \vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}, \quad \vec{\gamma} = -3\vec{j} \quad \text{και} \quad \vec{\delta} = (-1, 1).$$

- α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$. (9)
- β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ με τον άξονα $x'x$. (10)
- γ) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$. (6)

✓ Θέμα 12

● B16151

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.

- α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα $x'x$. (16)
- β) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$. (9)

✓ Θέμα 13

● B16579

Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$ και $B(6, 7)$.

- α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ σε ένα σύστημα συντεταγμένων. (7)
- β) Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$. (8)
- γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπα. (10)

✓ Θέμα 14

● B16580

Δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(11, 5)$, $\Gamma(3, 7)$ και ένα σημείο Δ τέτοιο, ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (12)

β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$. (8)

γ) του σημείου Δ . (5)

✓ Θέμα 15

● B16581

Δίνονται τα σημεία $A(-1, 6)$, $B(1, 2)$ και $\Gamma(3, -2)$.

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (12)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά. (6)

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο B είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$. (7)

✓ Θέμα 16

● B17070

Δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$, $B(2, 1)$, $\Gamma(3, -1)$ και $\Delta(4, 2)$.

α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία σε ένα σύστημα συντεταγμένων. (8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. (9)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (8)

✓ Θέμα 17

● B18878

Ένας εξερευνητής ξεκίνησε πριν τρεις ημέρες από την κατασκήνωσή του (σημείο O : αρχή των αξόνων) για ένα ταξίδι μέσα στη ζούγκλα. Στο τέλος της πρώτης ημέρας έφτασε στο σημείο A , στο τέλος της δεύτερης ημέρας έφτασε στο σημείο B και στο τέλος της τρίτης ημέρας έφτασε στο σημείο T . Οι τρεις ημέρες του ταξιδιού του περιγράφονται από τα διανύσματα

$$\overrightarrow{OA} = (1, 1), \quad \overrightarrow{AB} = (2, 4) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{BT} = (2, 5\sqrt{3} - 5).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OT} = (5, 5\sqrt{3})$. (13)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση (OT) του εξερευνητή από την κατασκήνωση, στο τέλος της τρίτης ημέρας. (12)

(Οι αποστάσεις εκφράζονται σε km)

✓ Θέμα 18

● B19038

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-5, -5)$.

α) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$. (9)

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$. (8)

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ , έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γράφεται στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$. (8)

✓ Θέμα 19

● B21681

Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$ και $\Gamma(2, 5)$.

α) Να βρείτε σημείο Δ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$. (10)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (8)

γ) Να βρείτε το κέντρο O του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. (7)

✓ Θέμα 20

● B22038

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (5, -12)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο ίσο με 1. (12)

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο ίσο με 7. (13)

✓ Θέμα 21

● B22044

Δίνονται τα σημεία $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ και $\Gamma(5, 1)$.

α) Να τοποθετήσετε τα σημεία A, B, Γ σε ένα σύστημα συντεταγμένων. (10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τέταρτου σημείου Δ , έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο. (15)

✓ Θέμα 22

● B22052

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2, 5)$ και $\vec{\beta} = (1, -3)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$. (12)

β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\nu} = (8, -21)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. (13)