

§1.5

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ

οταν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τοτε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \theta$

οταν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ τοτε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

Προσέξτε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι ένας πραγματικός αριθμός

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ

αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$
 $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τοτε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

Θ ΓΩΝΙΑ ΤΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τοτε:

- $\cos \theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|}$
- $\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

**SUPER
ΟΥΑΟΥ!!!
ΙΔΙΟΤΗΤΑ****ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$
- $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$
- $\lambda (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = (\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta}$
- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$
 $\vec{i}^2 = 1$ & $\vec{j}^2 = 1$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$

Βασική εφαρμογή

- $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$ (το ισχύει μονο όταν $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$)
- $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \leq \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2$ (το ισχύει μονο όταν $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$)

Ποιες ταυτότητες ΙΣΧΥΟΥΝ ;

- $(\vec{\alpha} \pm \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \pm 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2$
- $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2$
- $(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + 2\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$

ΚΑΙ ΜΟΝΟΝ ΑΥΤΕΣ

ΧΡΗΣΙΜΑ

- αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2$
- αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ τότε $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$
- αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$

ΠΡΟΣΟΧΗ **δεν ισχύουν τα
αντίστροφα !**

Είναι σωστά ?

$$|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$$

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2$$

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \vec{\gamma} = \vec{\alpha} (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$$

ΟΧΙ

ΣΥΝΘΗΚΕΣ

ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \\ \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \\ \lambda_1 = \lambda_2 \quad \vec{\alpha}, \vec{\beta} \notin y'y \\ |\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \\ (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2 \end{cases}$$

ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 = -1 \quad \vec{\alpha}, \vec{\beta} \notin y'y \\ \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ΟΜΟΡΡΟΠΩΝ

$$\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \quad \mu \epsilon \lambda > 0 \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \\ |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \\ \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = 0 \end{cases}$$

ΑΝΤΙΡΡΟΠΩΝ

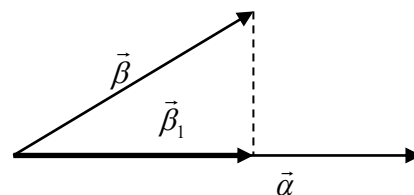
$$\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \quad \mu \epsilon \lambda < 0 \\ |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \left| |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \right| \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \\ \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \pi \end{cases}$$

προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta}$$

ή

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}_1$$



Με απλά λόγια:

στο εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ένα από τα δύο διανύσματα (πχ το $\vec{\beta}$) με τη προβολή του πάνω στο άλλο (δηλ. με το $\vec{\beta}_1$)

Β.Α 1**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ**

Με τον ορισμό
 $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \phi$

Με τις συντεταγμένες
 $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

Αντικαθιστώντας τα
 διανύσματα από τα
 δεδομένα .

Αναλύοντας τα
 διανύσματα με
 διανυσματικές ακτίνες ή
 αθροίσματα

Όταν έχω εσωτερικό γινόμενο
 διανυσμάτων με **κοινή αρχή**

Αντικαθιστώντας το ένα,
 με τη προβολή του στο
 άλλο

Όταν έχω σχήμα
 με ορθές

54. Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ όταν

1.

$$|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, \cos(\angle \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$$

2.

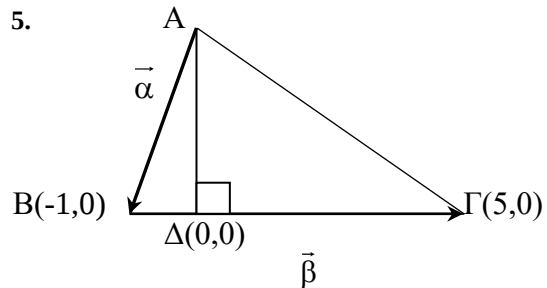
$$\vec{\alpha} = (2, -3), \vec{\beta} = (-2, -5)$$

3.

$$\vec{\alpha} = \vec{v} + \vec{i}, \vec{\beta} = \vec{i} - \vec{v} \text{ και } |\vec{v}| = 10$$

4. Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB και κέντρο O, παίρνουμε σημείο M και ισχύουν $\vec{OB} = \vec{\gamma}, \vec{OM} = \vec{\delta}, \vec{MA} = \vec{\alpha}, \vec{MB} = \vec{\beta}$

5.



Β.Α 2

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ

Υπολογίζω το $|\vec{\alpha}|^2 = \vec{\alpha}^2 = \dots = \theta$ οπότε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\theta}$

55. Δίνεται ότι $\vec{\alpha} = (1, \sqrt{3})$, $|\vec{\beta}| = 3$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$
και $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ να βρείτε το $|\vec{u}|$

Θυμήσου:

Ισότητες με διανύσματα μπορούμε να τις υψώσουμε κατά μέλη στη 2^α

56. Αν $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και θ η μεταξύ τους γωνία, να αποδείξετε ότι:

$$|\vec{a} + \vec{\beta}| = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$$

1) Μπορώ να ξεκινήσω υψώνοντας;
Έχω δικαίωμα; Με εξυπηρετεί;

2) Θυμήσου $\sin 2\alpha = ; ; \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = ; ;$

57. Δίνεται ότι $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\gamma}| = 2$ και $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}$ μη συγγραμμικά.
Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$.

Β.Α 3

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΜΕ ΜΕΤΡΟ ή ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

SUPER KOLPAυψώνω κατά μέλη στη 2^α και εφαρμόζω SUPER ΟΥΑΟΥ ιδιότητα

- αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2$
- αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ τότε $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$
- αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$

ΠΡΟΣΟΧΗ

δεν ισχύουν τα αντίστροφα !

58. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ τότε να δείξετε ότι: $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot \sqrt{3}$

59. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$. Αν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3$ και $|\vec{\gamma}| = 5$ υπολογίστε τα

1) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$

2) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}, \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}, \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$

B.A 4

ΕΥΡΕΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Με τον ορισμό δηλ.

$$\cos \phi = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|}$$

Με τις συντεταγμένες δηλ.

$$\cos \phi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

KOLPO: Όταν θέλω ναδείξω $\phi_1 = \phi_2$, αποδεικνύω ότι

$$\cos \phi_1 = \cos \phi_2$$

60. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων: $\vec{\alpha} = (1, 1)$ και $\vec{\beta} = (-2, -2)$

61. Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 45^\circ$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta} - \vec{\alpha}, \vec{\alpha})$ (Δίνεται $\cos 64^\circ = \frac{\sqrt{5}}{5}$)

62. Δίνονται τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

A) Να αποδείξετε ότι ο φορέας του διανύσματος $\vec{u} = |\vec{\beta}| \vec{\alpha} + |\vec{\alpha}| \vec{\beta}$ διχοτομεί τη γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Β.Α 5

ΘΕΜΑΤΑ ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΩΝ – ΟΜΟΡΡΟΠΩΝ - ΑΝΤΙΡΡΟΠΩΝ

Συγγραμμικά

Όταν ξέρω ή θέλω ΝΔΟ $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$:

$$1ος \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$2ος \quad \text{να υπάρχει } \lambda \in \mathbb{R} : \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$$

$$3ος \quad \lambda_1 = \lambda_2 \text{ (εφόσον ορίζονται)}$$

$$4ος \quad |\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \text{ (εφ 1)}$$

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2$$

Ομόρροπα

Όταν ξέρω ή θέλω ΝΔΟ $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$:

$$1ος \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$$

$$2ος \quad \text{να υπάρχει } \lambda > 0 : \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$$

$$3ος \quad (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \text{ ή } \sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1$$

$$4ος \quad |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$$

Αντίρροπα

Όταν ξέρω ή θέλω ΝΔΟ $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$:

$$1ος \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$$

$$2ος \quad \text{να υπάρχει } \lambda < 0 : \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$$

$$3ος \quad (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \pi \text{ ή } \sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = -1$$

$$4ος \quad |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}||$$

63. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύουν: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\gamma}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\gamma}||$ να αποδειχθεί

ότι: α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$ β) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = -|\vec{\alpha}| |\vec{\gamma}|$

64. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύει: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{3}$ να αποδειχθεί ότι:

α) Το $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\beta}$.

β) Το $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{\gamma}$.

B.A 6

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ

SUPER KOLPA

Μπορώ να πολλαπλασιάζω ισότητες διανυσμάτων κατά μέλη με το κατάλληλο διάνυσμα ώστε να δημιουργούνται εσωτερικά γινόμενα κάθετων που κάνουν 0 !!!

Όταν ξέρω ή θέλω ΝΔΟ $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$:

1ος $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

2ος $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

3ος $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ (εφόσον ορίζονται)

4ος $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \pi/2$ ή $\sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$

65. Να δείξετε ότι το $\vec{\alpha} = (2, -5)$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta} = (5, 2)$

1^{ος} με αναλυτική έκφραση

2^{ος} με συντελεστή διεύθυνσης

66. Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\vec{\beta}^2} \vec{\beta} - \vec{x}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$ για κάθε διάνυσμα $\vec{x}$.

67. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν τα διανύσματα που δίνονται είναι κάθετα μεταξύ τους.

α) $\vec{\beta} - \frac{(\vec{\alpha}\vec{\beta})}{\vec{\beta}^2} \vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

β) $(\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}) \vec{\gamma} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}$

γ) $\vec{\beta} - \frac{(\vec{\alpha}\vec{\beta})}{\vec{\alpha}^2} \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}$

B) της 62

Να αποδείξετε ότι ο φορέας του $\vec{w} = |\vec{\beta}| \vec{\alpha} - |\vec{\alpha}| \vec{\beta}$ διχοτομεί τη παραπληρωματική γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

68. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (2, 3)$ και $\vec{v} = (4, -1)$.

Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{w}$ ώστε να είναι $|\vec{w}| = 3$ και $\vec{w} \perp (3\vec{v} - 5\vec{u})$.

69. Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} = \vec{p} + \vec{q}$ με $\vec{p} // \vec{\beta}$ και $\vec{q} \perp \vec{\beta}$ να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha) \vec{p} = \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \vec{\beta} \quad \beta) \vec{q} = \vec{\alpha} - \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \vec{\beta}$$

1ος τρόπος

$$\vec{p} // \vec{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\vec{q} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\text{ξεκινάμε από } \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \vec{\beta} =$$

2ος τρόπος πολλαπλασιάζουμε την $\vec{\alpha} = \vec{p} + \vec{q}$ κατά μέλη με το $\vec{\beta}$

B.A 7

ΕΥΡΕΣΗ ΠΡΟΒΟΛΗΣ

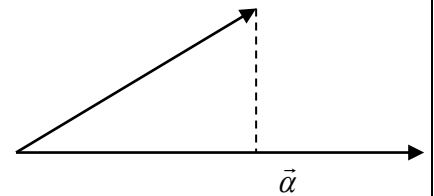
Για να βρώ τη προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{a}$ δηλ το διάνυσμα $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$ ακολουθώ την παρακάτω διαδικασία:

- Επειδή $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} \parallel \vec{a}$ θα ισχύει $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} = \lambda \vec{a}$ (1)
- Από τη θεωρία θα ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$ (2)

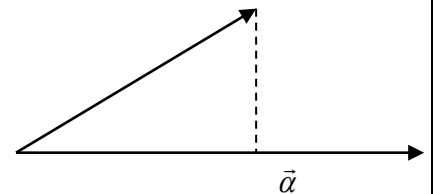
Αντικαθιστώ την (1) στη (2) και βρίσκω το λ

Από την (1) βρίσκω τη $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$

70. Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{v}| = 12$ και $(\hat{\vec{a}}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ να βρείτε την προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{a}$



71. Αν $\vec{a} = (4, 0)$ και $\vec{b} = (2, 2004)$ να βρείτε την προβολή του $\vec{b}$ στο $\vec{a}$



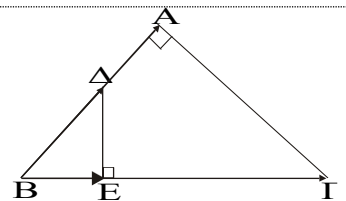
72. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και B' , Δ' οι προβολές του Γ στις AB και $A\Delta$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{A\Delta'} = \overrightarrow{A\Gamma}^2$

Εσωτερικά γιν. με κοινή αρχή! μήπως με προβολές;



73. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στην κορυφή A . Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA'}$.



B.A 8

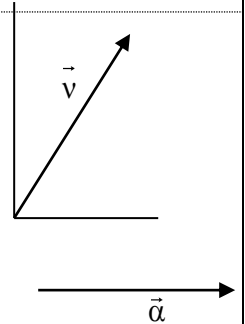
ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ $\vec{v}$ ΣΕ ΚΑΘΕΤΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ

η μία ($\vec{v}_1$) παράλληλη σε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και η άλλη ($\vec{v}_2$) κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$

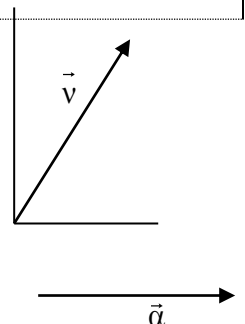
1ος τρόπος

- Η μία συνιστώσα ($\vec{v}_1$): επειδή είναι παράλληλη στο δοθέν διάνυσμα ($\vec{\alpha}$), θα είναι η προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$ οπότε θα βρώ το $\vec{v}_1 = \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$ με τη γνωστή διαδικασία
- Για την άλλη συνιστώσα ($\vec{v}_2$) επειδή ισχύει $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ τη βρίσκω λύνοντας ως προς $\vec{v}_2$

74. Αν $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{v} = (1, -13)$ να αναλύσετε το $\vec{v}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$



75. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{v}| = 12$ και $(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$ να αναλύσετε το $\vec{v}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$



2ος τρόπος μόνον όταν τα διανύσματα δίνονται με συντεταγμένες

θεωρώ $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$ και $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$ και δουλεύοντας με συντεταγμένες δημιουργώ σύστημα χρησιμοποιώντας όλα τα δεδομένα:

- $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$
- $\vec{v}_1 // \vec{\alpha} \Rightarrow \text{ορίζουσα} = 0 \dots$
- $\vec{v}_2 \perp \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{v}_2 \cdot \vec{\alpha} = 0 \dots$

76. Αν $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{v} = (1, -13)$ να αναλύσετε το $\vec{v}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$



B.A 9

ΕΥΡΕΣΗ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ ΕΝΟΣ ΓΡ.ΣΥΝΔ. $\kappa x + \lambda y$

θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa, \lambda)$ και $\vec{\beta} = (x, y)$

οπότε το $\kappa x + \lambda y$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ (H.. πονηριά !)

έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την βασική εφαρμογή

$$|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \Leftrightarrow$$

$$-|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \leq \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \leq |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \Leftrightarrow$$

$$-\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} \sqrt{x^2 + y^2} \leq \kappa x + \lambda y \leq \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} \sqrt{x^2 + y^2}$$

(αρκεί να
γνωρίζου
με τα

$$\kappa^2 + \lambda^2$$

και

$$x^2 + y^2)$$

77. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = 6x - 8y$, αν $x^2 + y^2 = 36$.

78. αποδείξτε ότι: $|6\eta\mu x - 8\sigma\upsilon\nu x| \leq 25$

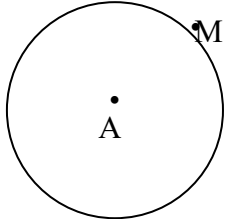
Β.Α 10

ΕΥΡΕΣΗ Γ.ΤΟΠΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ Μ

Σε ασκήσεις αυτού του είδους, πάντα δίνεται μία ή περισσότερες σχέσεις απ' όπου κάνοντας πράξεις, ίσως αντικαταστάσεις με διανυσματικές ακτίνες με σ.α. ένα σταθερό σημείο, θα προσπαθούμε να καταλήξουμε σε μία χαρακτηριστική σχέση με τη διανυσματική ακτίνα του Μ που θα μαρτυρά τον γεωμετρικό του τόπο.

ΜΟΡΦΕΣ ΒΑΣΙΚΩΝ Γ.ΤΟΠΩΝ

Αν Α και Β σταθερά σημεία και Μ σημείο που κινείται και θέλουμε να βρούμε τον γ.τόπο του

ΣΧΕΣΗ	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ	
$ \overrightarrow{MA} = \rho \text{ με } \rho = ct$	Ο γ.τ. των Μ είναι κύκλος με κέντρο το Α και ακτίνα ρ (αφού το Μ απέχει πάντα σταθερή απόσταση από το σταθερό Α)	
$ \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} $	Ο γ.τ. των Μ είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ (αφού το Μ ισαπέχει πάντα από τα σταθερά Α και Β)	
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$	Ο γ.τ. των Μ είναι κύκλος με διάμετρο το ΑΒ (αφού το $MA \perp MB$ δηλ το Μ βλέπει το σταθερό ΑΒ με ορθή γωνία)	

$\vec{AM} \cdot \vec{AB} = 0$	Ο γ.τ. των Μ είναι η κάθετη ευθεία στην ΑΒ στο Α (αφού το $MA \perp AB$)	
-------------------------------	--	---

79. Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:
 $\vec{AB} \cdot \vec{AM} + \vec{AG} \cdot \vec{AM} = 0$.

80. Εστω Ο και Α δύο σταθερά σημεία του επιπέδου με $|\vec{OA}| = 3\sqrt{2}$.

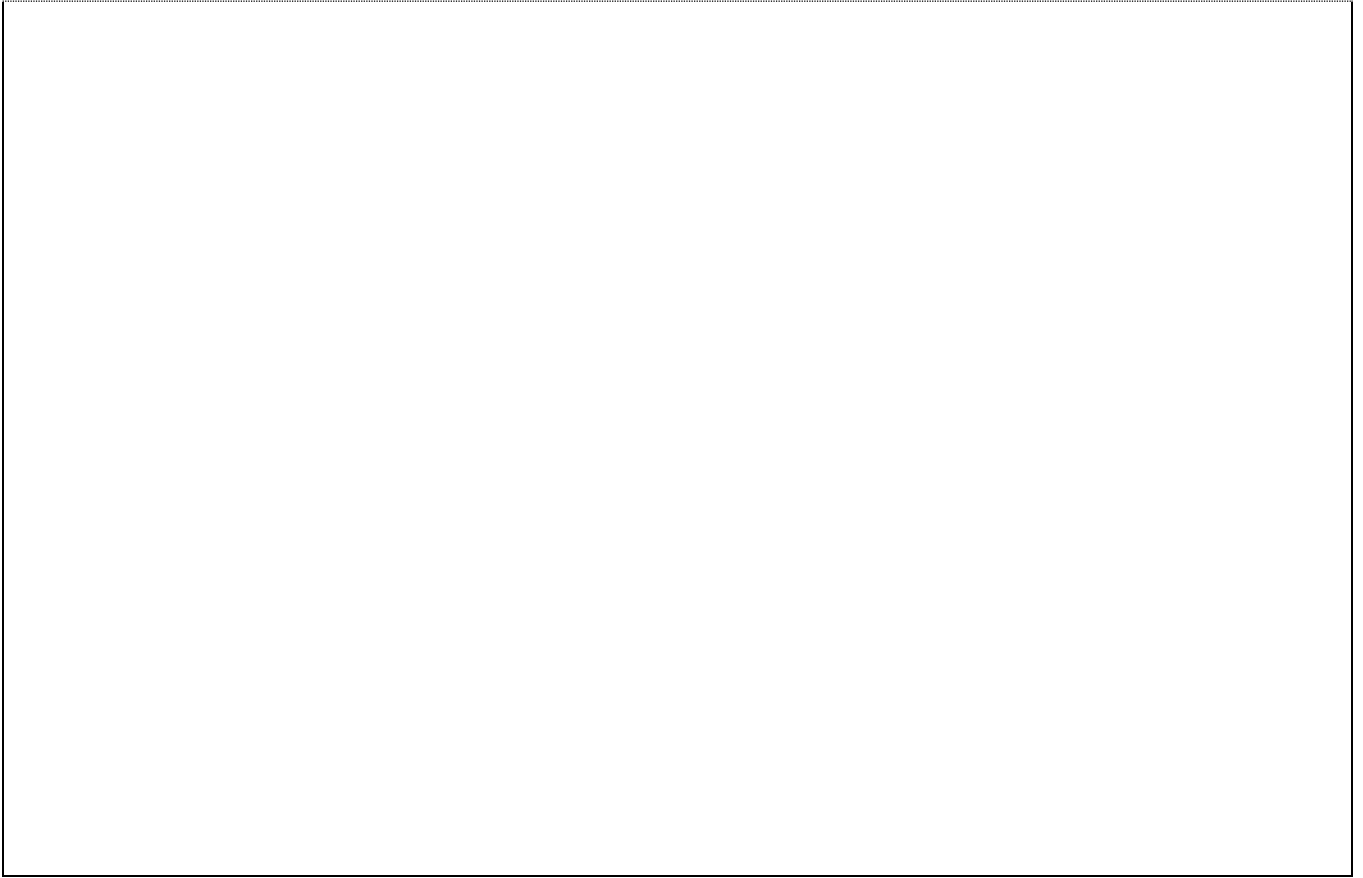
Ποια γραμμή γράφουν τα σημεία Μ του επιπέδου για τα οποία είναι $\vec{OM} \cdot (\vec{OM} - 2\vec{OA}) = 7$;

Εσωτερικό γιν. με κοινή
αρχή! μήπως με
προβολές;

81 Έστω A, B δυο σταθερά σημεία με $AB = 3$.

Να βρείτε το σύνολο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -2$.

82. Έστω A, B , σημεία του επιπέδου με O μέσο του AB και K τυχαίο σημείο του επιπέδου. Να βρείτε το σύνολο των σημείων M για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{KM}^2 = 2\overrightarrow{KO} \cdot \overrightarrow{KM} - \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB}$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

83. Να υπολογιστεί το γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|\vec{a}| = 1, |\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$

β) $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 75^\circ$

γ) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}, |\vec{\beta}| = \sqrt{12}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 135^\circ$

84. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$. Αν $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ να βρεθούν:

α) $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ β) $\vec{a}^2 + \vec{\beta}^2$ γ) $(\vec{a} + \vec{\beta})^2$ δ) $|\vec{a} + \vec{\beta}|$ ε) $(2\vec{a} + 3\vec{\beta})(4\vec{a} - 5\vec{\beta})$

85. Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων: $\vec{a} = (-1, 4)$ και $\vec{\beta} = (1, -2)$.

86. Αν $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$.

Να υπολογιστεί η γωνία των διανυσμάτων: $\vec{u} = 2\vec{a} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{a} - \vec{\beta}$

87. Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{a} + \vec{\beta}) \perp (\vec{a} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{a} - \vec{\beta}| = 2$, δείξτε ότι $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}| = 1$.

88. Αν $\vec{u}(-3-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3})$ και $\vec{v}(-1-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3})$ και $0 < (\vec{u}, \vec{v}) < \pi$.

Να αποδείξετε ότι: $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{12}$

89. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, τέτοιο ώστε $\vec{x} \parallel (\vec{a} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{a} + \vec{x})$.

90. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 1)$ και $\vec{\beta} = (5, 10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{a}$.

91. Αν $\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{a})\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ με $1 + \vec{a} \cdot \vec{\beta} \neq 0$, να αποδείξετε ότι $\vec{x} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\gamma}}{1 + \vec{a} \cdot \vec{\beta}}$.

92. οι ασκήσεις 7 και 8 σελ 49 σχ. βιβλίου

93. Γνωρίζουμε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ ισχύει: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ (1)

α) Με τη βοήθεια του (1) να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = -3x + 4y$ αν $x^2 + y^2 = 81$.

β) Με τη βοήθεια του (1) αποδείξτε ότι: $|12\eta\mu\chi - 5\sigma\upsilon\nu\chi| \leq 13$

94. Αν $\vec{a} = (1, 2)$ και $\vec{b} = (3, 4)$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως:

α) $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$ β) $\vec{p} // \vec{a}$ γ) $\vec{q} \perp \vec{b}$

95. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ τέτοια ώστε να είναι: $(\lambda\vec{a} + \kappa\vec{b}) \perp (\kappa\vec{a} - 2\lambda\vec{b})$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \perp \vec{b}$.

β) Να βρεθεί το $|\vec{b}|$ στην περίπτωση που είναι $|\vec{a}| = 2$.

96. Αν $\vec{a} = ((x-1)\sqrt{3}, 2x)$ και $\vec{b} = (-\sqrt{3}, 1)$, να βρείτε το x , ώστε $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

97. Αν $\vec{a} = (2, 3)$ και $\vec{b} = (-1, 4)$, να βρείτε την προβολή του $\vec{a}$ πάνω στο $\vec{b}$.

98. Α) Για δύο οποιαδήποτε μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$, να δείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$

Β) Εστω τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 3)$ και $\vec{b} = (3, 4)$. Να βρεθεί η $\text{προβ}_{\vec{b}} \vec{a}$

Γ) Εστω τα διανύσματα $\vec{a} = (4, -3)$ και $\vec{b} = (2, 5)$. Να βρεθεί η $\text{προβ}_{\vec{a}} (2\vec{a} - 3\vec{b})$

99. Εστω Α, Β, σημεία του επιπέδου με $AB = 2\alpha$.

α) Αν Ο είναι το μέσο του ΑΒ και Μ τυχαίο σημείο του επιπέδου, να δείξετε ότι $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OM}^2 - \alpha^2$.

β) Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \kappa$, όπου κ σταθερός αριθμός.

100. οι ασκήσεις 4, 5, 6 σελ 49 σχ. βιβλίου

ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΗΝ 1.5

20) Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

21) **Να αποδείξετε** τον τύπο που υπολογίζει το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους (αναλυτική έκφραση του εσωτ. γινομένου)

22) **Αποδείξτε** τις παρακάτω ιδιότητες :

$$\alpha) (\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$$

$$\beta) \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$$

$$\gamma) \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} \lambda_{\vec{\beta}} = -1 \quad (\text{εφόσον βέβαια } \vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0})$$

23) Αν θ η γωνία δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ **να αποδείξετε** ότι :

$$\cos \theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|} \quad \text{και} \quad \sin \theta = \frac{|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|}$$

24) Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ του επιπέδου :

α) τι ονομάζουμε προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$

β) **αποδείξτε** ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = |\vec{\alpha}| \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$

25) Συμπληρώστε τα παρακάτω :

- | | |
|--|--|
| 1) $ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} $ $ \vec{\alpha} \vec{\beta} $ | 5) $\cos \angle(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \leq$ |
| 2) $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2$ $ \vec{\alpha} ^2 \vec{\beta} ^2$ | 6) αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ τότε $\cos \angle(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) =$ |
| 3) όταν $ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \vec{\beta} $ τότε | 7) αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\cos \angle(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) =$ |
| 4) όταν $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha} ^2 \vec{\beta} ^2$ τότε | 8) αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\sin \angle(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) =$ |