

α) Να δείξετε ότι $f(x) = d(x, 2) - d(x, 1)$.

β) Αν τα σημεία A και B παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x) = 0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

4. 34322

Μια υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που προκύπτει από τη σχέση:

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \quad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός x είναι ο -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος αριθμός λ ;

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός λ είναι ο 20, ποιος είναι ο εισαγόμενος αριθμός x ;

γ)

i Να δείξετε ότι η σχέση (1) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή:

$$4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0.$$

ii Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5.

Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές που μπορεί να έχει ο εξαγόμενος αριθμός λ .

5. 13312

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda = 0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha \cdot \beta = \lambda$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \leq 9$.

ii. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.

γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α , β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

Ανισώσεις 2ου Βαθμού

2ο Θέμα

1. 14474

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$.

α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

2. 12976

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1 - 2x) \leq -1$.

3. 12722

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 3$

α) Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$

β) Να επιλύσετε την ανίσωση $-2 \cdot f(x) < 0$

4. 37169

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3}-1)x + \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι :

$$\Delta = (\sqrt{3}+1)^2.$$

β) Να παραγοντοποιήσετε το αρχικό τριώνυμο.

5. 37168

Δίνονται οι ανισώσεις : $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1), $x^2 - 16 \leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των (1), (2).

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

6. 14577

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 .

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$, $x \neq 0, x \neq -1$.

7. 35382

Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K.

8. 37182

α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$.

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

γ) Να τοποθετήσετε τον αριθμό $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι ο αριθμός $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β);

9. 35030

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$$

10. 13321

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 16 = 0$. (1)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x \leq 0$. (2)

γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

11. 34162

α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x - 5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$.

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος (α).

12. 36892

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x|}{3} - \frac{|x| + 4}{5} = \frac{2}{3}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

13. 34919

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 10x + 21 < 0$ (1).

β) Αν η ανίσωση (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $3 < x < 7$ και ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω ανίσωσης, να δείξετε ότι η παράσταση $A = |x - 3| + |x - 7|$ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

14. 35035

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του α) ερωτήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

15. 14189

α) Αν $x^2 - 3x - 4 < 0$, να δείξετε ότι $-1 < x < 4$.

β) Δίνεται η παράσταση $A = |2x+2| + |x-5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α). Να αποδείξετε ότι: $A = x+7$.

16. 36887

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{3}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β).

17. 37193

Δίνεται η παράσταση $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

4ο Θέμα

1. 33587

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2,999) \cdot f(-1,002).$$

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

2. 34185

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 5x - 6 < 0$.

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \frac{46}{47} - 6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

3. 33712

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β)

ii Αν $\beta \neq 0$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

iii Πως αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$;

γ) Με τη βοήθεια της απάντησης στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.