

4ο Θέμα

1. 14931

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

2. 36678

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους αριθμούς:

$$0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}.$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$.

3. 14652

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha} \text{ αιτιολογώντας την απάντησή σας.}$$

ii. Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$.

Εξισώσεις

Εξισώσεις 1ου Βαθμού

2ο Θέμα

1. 14224

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $A = \frac{x+1}{x}$.

β)

i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2. 12917

Δίνεται η εξίσωση $(|α - 1| - 3)x = α + 2$ (1), με παράμετρο $α ∈ ℝ$.

α) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $α = 0$ και $α = 5$.

β)

1. Να βρείτε για ποιες τιμές του $α$ ισχύει $|α - 1| = 3$.
2. Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις τιμές του $α$ που βρήκατε στο ερώτημα β) i.

3. 34872

Δίνεται η εξίσωση $kx + 3 = 2x$, με παράμετρο $k ∈ ℝ$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για $k = 1$ και για $k = 3$.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για $k = 2$.

4. 36896

Δίνεται η εξίσωση $(λ - 1)x = λ^2 - 1$, με παράμετρο $λ ∈ ℝ$. (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το $λ$, να γράψετε τρεις εξισώσεις.

β)

- i. Να βρείτε την τιμή του $λ ∈ ℝ$, ώστε η (1) να έχει μια και μοναδική λύση.
- ii. Να βρείτε την τιμή του $λ ∈ ℝ$, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) να ισούται με 4.

5. 34163

Δίνεται η εξίσωση $λx = x + λ^2 - 1$, με παράμετρο $λ ∈ ℝ$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(λ - 1)x = (λ - 1)(λ + 1), \quad λ ∈ ℝ.$$

β) Να βρείτε τις τιμές του $λ$ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

γ) Για ποια τιμή του $λ$ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

6. 34146

Δίνεται η εξίσωση: $(α + 3)x = α^2 - 9$, με παράμετρο $α ∈ ℝ$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν $α = 1$.

ii) Όταν $α = -3$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $α$, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

7. 12857

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x - 2\lambda + 2 = 0$.

- α) i. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = -2$.
 ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης.
 β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα.

4ο Θέμα

1. 36673

Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$.

β) Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$, τότε:

- i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

2. 14649

Δίνεται η παράσταση $K = |x+1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x+3, & \text{αν } x \geq -1 \\ 1-x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$.

β)

III Να λυθεί η εξίσωση $|x-2|=4$.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

3. 13170

Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά $\varepsilon\%$ (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι $\varepsilon\%$).

α) Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο $x \in \mathbb{E}$ με επιτόκιο $\varepsilon\%$, ύστερα από δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο $x \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^2 \in \mathbb{E}$.

β) Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα A με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα B με επιτόκιο 3%. Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το α) ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811 €. Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα B.

i) Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης