

Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

2ο Θέμα

1. 14849

α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$.

β) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$.

2. 37192

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις)

$$\sqrt{2} \approx 1,41$$

$$\sqrt{3} \approx 1,73$$

$$\sqrt{5} \approx 2,24$$

$$\sqrt{7} \approx 2,64$$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών, πως θα μπορούσατε να

υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$

3. 14774

α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}$.

4. 34157

Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

5. 15051

α) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $(2 + \sqrt{5})^2$.

β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9 - 4\sqrt{5}$ και $9 + 4\sqrt{5}$

6. 36778

Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$.

α) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

7. 12943

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ και $\beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$.

8. 34152

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

9. 14452

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$.

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$.

10. 37194

α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$

11. 34155

Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B .

12. 37199

Δίνονται οι αριθμοί: $A=(\sqrt{2})^6$ και $B=(\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$.

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\sqrt{2}, 1, \sqrt[3]{2}$$

13. 14682

Δίνονται οι αριθμοί: $A=(\sqrt{3})^6$ και $B=(\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A-B=18$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$.

14. 37172

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A=(\sqrt{2})^6, \quad B=(\sqrt[3]{3})^6, \quad \Gamma=(\sqrt[6]{6})^6.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $A+B+\Gamma=23$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

15. 37198

Δίνεται η παράσταση $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$.

16. 37197

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x=-3$ να αποδείξετε ότι $A^3+A^2+A+1=0$.

4ο Θέμα

1. 14931

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

2. 36678

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους αριθμούς:

$$0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}.$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$.

3. 14652

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha} \text{ αιτιολογώντας την απάντησή σας.}$$

ii. Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$.

Εξισώσεις

Εξισώσεις 1ου Βαθμού

2ο Θέμα

1. 14224

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $A = \frac{x+1}{x}$.

β)

i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.