

$$\text{iv} \quad \frac{\alpha^2}{\beta+\gamma} = -\alpha \quad .$$

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}$, $\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta} = 0 \quad .$$

4ο Θέμα

1. 15052

Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες ΕΖ και ΗΘ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν ΚΖ = x και ΚΗ = y, $x, y \in (0, 6)$, τότε:

α) Να υπολογίσετε τα E_1, E_2, E_3, E_4 με τη βοήθεια των

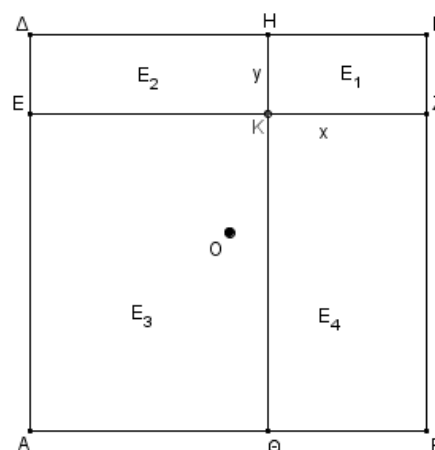
x, y.

β) Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 των τεσσάρων ορθογώνιων του σχήματος όταν $x = 4$ και $y = 2$.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$ $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } xy + 9 = 3(x + y).$$

ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα ΕΖ και ΗΘ διέρχεται από το κέντρο Ο του τετραγώνου.



Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

2ο Θέμα

1. 12922

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in R$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$ για τις οποίες $A = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$.

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in R$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

2. 13266

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in R$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in R$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

β)

1. Να δείξετε ότι $A+B \geq 0$.
2. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A+B=0$;

3. 35050

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2+9$ και $L=2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι: $K-L=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-6\alpha+9)$.
- β) Να δείξετε ότι: $K \geq L$, για κάθε τιμή των α, β .
- γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K=L$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4. 13323

- α) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17.$$

- β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$.

5. 37179

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2$ και $L=2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι: $K \geq L$, για κάθε τιμή των α, β .
- β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K=L$;

6. 36899

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να δείξετε ότι:

$$\alpha) \quad \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \quad .$$

$$\beta) \quad \left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16 \quad .$$

7.14704

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

- α) $x+y$
- β) $2x-3y$
- γ) $\frac{x}{y}$

8.14492

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

- α) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

9. 14475

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$.

β) $\alpha - \beta$.

10. 12673

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$.

Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

2ο Θέμα

1. 13169

Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \leq x \leq 5$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x - 5 \leq 0 < x - 2$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| - |x - 5| = 2$.

2. 14617

Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (I).

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$.

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6, 8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3, 4)$.

3. 36895

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x + 4| = 10$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| > 1$.

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.