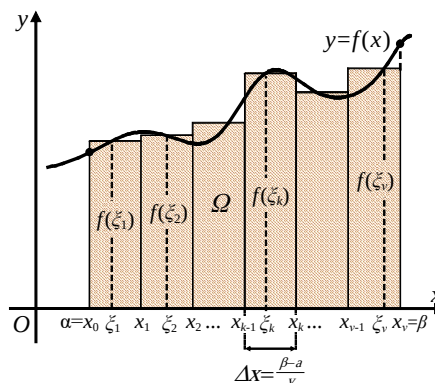


ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός εμβαδού

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$.



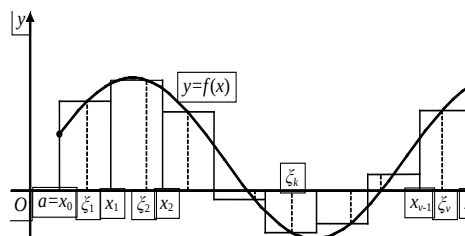
Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω εργαζόμαστε ως εξής:

- ▶ Χωρίζουμε το διάστημα $[a, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{\beta - a}{v}$, με τα σημεία $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_v = \beta$.
- ▶ Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_k και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_k)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι
- ▶ $S_v = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_v)\Delta x = [f(\xi_1) + \dots + f(\xi_v)]\Delta x$.
- ▶ • Υπολογίζουμε το $\lim_{v \rightarrow +\infty} S_v$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{v \rightarrow +\infty} S_v$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_k . Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega)$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega) \geq 0$.

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$. Με τα σημεία $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_v = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[a, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta - a}{v}$.



Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, v\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_v = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_k)\Delta x + \dots + f(\xi_v)\Delta x$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_v = \sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x$.

Αποδεικνύεται ότι:

Το όριο του αθροίσματος S_v , δηλαδή το $\lim_{v \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^v f(\xi_k) \Delta x \right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_k .

Το παραπάνω όριο $\lim_{v \rightarrow \infty} S_v$ ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β , συμβολίζεται με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της f από το α στο β ”. Δηλαδή,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^v f(\xi_k) \Delta x \right)$$

Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον *Leibniz* και ονομάζεται **σύμβολο** ολοκλήρωσης.

Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος S της λέξης *Summa* (άθροισμα).

- ▶ Οι αριθμοί α και β ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης.
- ▶ Η συνάρτηση f λέγεται ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$
- ▶ Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι **σταθερός πραγματικός αριθμός**.

Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ είναι ένας πραγματικός αριθμός, που εξαρτάται μόνο από τη συνάρτηση f και το διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Επομένως τα ολοκληρώματα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ παριστάνουν τον ίδιο αριθμό.

Δηλαδή στην έκφραση $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα.

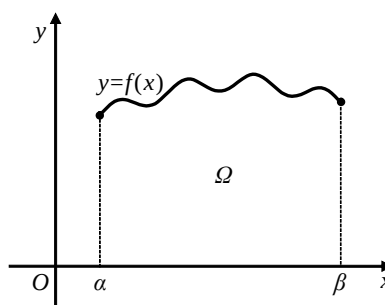
Επομένως έχουμε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \dots$

Είναι, όμως, χρήσιμο να επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό και για τις περιπτώσεις που είναι $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, ως εξής:

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$
- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις



ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$

Δηλαδή,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = E(\Omega).$$

Επομένως ,

$$\text{Αν } f(x) \geq 0, \quad \text{τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0.$$

Προσοχή!!!

Πολλές φορές εμφανίζονται ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$, όπου $\alpha > \beta$ στην περίπτωση αυτή δεν ισχύει η παραπάνω ανισότητα, παράδειγμα ενώ $x^2 \geq 0$ δεν ισχύει $\int_1^0 x^2 dx \geq 0$ αφού είναι $\int_1^0 x^2 dx = -\frac{1}{2}$

Αποδεικνύεται ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha)$$

Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

Με τη βοήθεια του ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

και γενικά

- $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν η f είναι σ υ ν ε χ ή ς σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

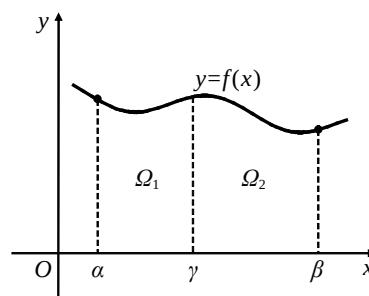
Σημείωση:

Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ η παραπάνω ιδιότητα

δηλώνει ότι: $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$

Αφού $E(\Omega_1) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$, $E(\Omega_2) = \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$

και $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

**Παρατήρηση:**

Στην ιδιότητα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$ το β δεν είναι υποχρεωτικό να είναι ανάμεσα στα α, γ αρκεί να ανήκει στο Δ .

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Έστω f μια σ υ ν ε χ ή ς συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0.$$

Παράδειγμα 15

Αν η f είναι συνεχής και ισχύει: $\int_1^3 f(x) dx = 1$, $\int_2^5 f(x) dx = 2$ και $\int_2^3 f(x) dx = 2$ να

υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_1^2 f(x) dx$ β) $\int_1^5 f(x) dx$ γ) $\int_3^5 f(x) dx$ δ)

Λύση:

α) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^2 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx = 1 - 2 = -1$

β) $\int_1^5 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx =$
 $= \int_1^3 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx = 1 - 2 + 2 = 1$

γ) $\int_3^5 f(x) dx = \int_3^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx = -\int_2^3 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx = -2 + 2 = 0$

2.9 Αν για μια συνεχή συνάρτηση f ισχύει $\alpha f(x) + \beta f(-x) = \gamma$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|\alpha| \neq |\beta|$, να αποδείξετε ότι: $\int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{4\gamma}{\alpha + \beta}$.

- 2.10** Αν η συνάρτηση f , που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, στρέφει τα κοίλα άνω και είναι γνησίως αύξουσα, να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης: $\int_a^b f''(x) dx + \int_a^b f'(x) dx$
- 2.11** Αν για μια συνεχή συνάρτηση f ισχύει $\int_a^b f(x) dx = 0$ με $a < b$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.
- 2.12** Να βρείτε το διάστημα $[a, b]$ στο οποίο το ολοκλήρωμα $\int_a^b (-x^2 + x + 2) dx$ παίρνει τη μέγιστη τιμή.