

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της

C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0), \text{ όπου } \lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Δηλαδή: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Εύρεση εφαπτόμενης της C_f σε γνωστό σημείο $(x_0, f(x_0))$

A. Εάν f παραγωγίσιμη στο x_0 βρίσκουμε το $f'(x_0)$ παίρνουμε τον τύπο

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

B. Εάν το x_0 σημείο αλλαγής τύπου ή σημείο μηδενισμού της υπόριζης ποσότητας, εξετάζω αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με τον ορισμό και αν είναι παραγωγίσιμη παίρνω τον τύπο $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Γ. Εάν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε η C_f δεν δέχεται εφαπτόμενη στο x_0 .

Δηλαδή:

i) Αν η f είναι ασυνεχής στο x_0 τότε η C_f δεν δέχεται εφαπτόμενη στο x_0 .

ii) Αν $\kappa = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι διάφορο του $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ τότε η C_f δεν

δέχεται εφαπτόμενη στο x_0

iii) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ τότε η C_f δεν δέχεται εφαπτόμενη στο x_0 .

Παραδείγματα

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 1, x \in \mathbb{R}$. Αν C_f είναι η γραφική παράσταση της f , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(1, \frac{23}{6})$.
Στη συνέχεια να βρείτε σε ποιο σημείο η εφαπτομένη αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

Λύση:

Είναι: $f'(x) = x^2 - 5x + 7, x \in \mathbb{R}$.

Ακόμη $f'(1)=1^2-5\cdot 1+7=3$ και $f(1)=\frac{23}{6}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο

σημείο της $(1, \frac{23}{6})$ είναι: $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - \frac{23}{6} = 3(x-1) \Leftrightarrow y = 3x + \frac{5}{6}$ (1)

Η (1) για $y = 0$ δίνει $3x + \frac{5}{6} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{18}$

Άρα το σημείο στο οποίο τέμνει η εφαπτομένη αυτή τον άξονα $x'x$ είναι το $(-\frac{5}{18}, 0)$.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu(2x + \frac{\pi}{2})$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{8}$.

Λύση:

α) Για κάθε $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ είναι: $f(x) = \eta\mu(2x + \frac{\pi}{2}) = \eta\mu(\frac{\pi}{2} - (-2x)) = \sigma\upsilon\nu(-2x) = \sigma\upsilon\nu(2x)$

και $f'(x) = -\eta\mu(2x) \cdot (2x)' = -2\eta\mu(2x)$.

Έχουμε: $f(\frac{\pi}{8}) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $f'(\frac{\pi}{8}) = -2\eta\mu\frac{\pi}{4} = -2\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$.

Η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$y - f(\frac{\pi}{8}) = f'(\frac{\pi}{8})(x - \frac{\pi}{8}) \Leftrightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}(x - \frac{\pi}{8}) \Leftrightarrow y = -\sqrt{2}x + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}$, $x > 3$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$.

Λύση:

Για $x > 3$ είναι: $f'(x) = \frac{(1 - e^{x-3})'(x-3) - (1 - e^{x-3})(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{-e^{x-3}(x-3) - (1 - e^{x-3})}{(x-3)^2}$,

επομένως: $f'(4) = \frac{-e \cdot 1 - (1 - e)}{1} = -1$

Ακόμη είναι: $f(4) = \frac{1 - e^{4-3}}{4-3} = 1 - e$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(4, f(4))$ είναι:

$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Leftrightarrow y - (1 - e) = -1(x - 4) \Leftrightarrow y = -x + 5 - e$

Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός a και η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - 2x \ln x$ με $x \in (0, +\infty)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να προσδιορίσετε το a , ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση:

Για κάθε $x > 0$ έχουμε : $f'(x) = 2ax - 2\ln x - 2$. Η ζητούμενη εξίσωση είναι: $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

(1)

Είναι $f(1) = a$ και $f'(1) = 2a - 2$ και συνεπώς η (1) γράφεται : $y - a = (2a - 2)(x - 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = 2(a - 1)x + 2 - a.$$

Η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν

$$0 = 2(a - 1) \cdot 0 + 2 - a \Leftrightarrow a = 2.$$

Ασκήσεις

3.103 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f (αν ορίζεται) στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις όταν:

i) $f(x) = \eta\mu 3x + 2\eta\mu x \sqrt{x}$ και $x_0 = 0$

ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ και $x_0 = -2, x_0 = 1$

iii) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ και $x_0 = 0$

iv) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και $x_0 = 0$

v) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{cosec} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ και $x_0 = 0$

3.104 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f (αν ορίζεται) στο σημείο $\eta(x_0, f(x_0))$ για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις όταν:

i) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \in [1, 2] \\ x^2 - 2x, & x \in (2, 3) \end{cases}$ και $x_0 = 2$

ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2}, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$ και $x_0 = 0$

iii) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$ και $x_0 = 1$

iv) $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x + 1}$ και $x_0 = 1$

3.105 Να βρείτε, αν υπάρχει, την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f της συνάρτησης f με $f(x) = \sqrt{|x - 2|} + 2$ στο σημείο $A(2, 2)$.

- 3.106** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f (αν ορίζονται) στο σημείο με τεταγμένη $y_0 = 2$, της συνάρτησης $f : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + x$.
- 3.107** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f (αν ορίζονται) στο σημείο με τεταγμένη $y_0 = -2$, της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 5x + 4$ καθώς και το σημείο τομής τους.
- 3.108** Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x-1} = 3$$
, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(1)$.
 Στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(1, f(1))$.
- 3.109** Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$.
 Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι θετικοί ημιάξονες Ox και Oy με την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = a$, είναι σταθερό για κάθε $a > 0$.
- 3.110** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ και η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $x_0 = 1$.
 Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy .
- 3.111** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3$. Να βρείτε, αν ορίζεται, την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, 1)$.
 Να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τις συντεταγμένες των άλλων κοινών σημείων της εφαπτομένης με τη C_f .

Εύρεση εφαπτομένης της C_f στο x_0 όταν αυτό δεν δίνεται

Αν έχουμε άσκηση με εξίσωση εφαπτομένης είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε το σημείο επαφής $(x_0, f(x_0))$.

Αν αυτό δεν δίνεται ή δεν προκύπτει, άμεσα, από κάποιο δεδομένο, καλό είναι να ξεκινάμε υποθέτοντας «Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο στο οποίο η ευθεία εφάπτεται της C_f οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \dots\dots$ » και βρίσκουμε το x_0 από τα δεδομένα της άσκησης.

Μην ξεχνάμε ότι η εφαπτομένη ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(x_0)$ και να έχουμε υπόψιν μας τις συνθήκες καθετότητας και παραλληλίας ευθειών.

Ενδεικτικά:

Αν δίνεται η συνάρτηση f και ζητείται:

A. Να βρεθεί η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο γνωστό $A(x_1, y_1) \notin C_f$.

$$\text{Απαιτούμε: } y_1 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) \quad (1)$$

B. Να βρεθεί η εφαπτόμενη της C_f που είναι παράλληλη προς γνωστή ευθεία (η)

$$\text{Απαιτούμε: } f'(x_0) = \lambda_\eta \quad (1), \text{ (ο συντελεστής διεύθυνσης } \lambda_\eta \text{ πρέπει να ορίζεται)}$$

Γ. Να βρεθεί η εφαπτόμενη της C_f που είναι κάθετη προς γνωστή ευθεία (η)

$$\text{Απαιτούμε: } f'(x_0) \cdot \lambda_\eta = -1 \quad (1) \text{ με } \lambda_\eta \neq 0 \text{ (αν ο } \lambda_\eta \text{ δεν ορίζεται πρέπει } f'(x_0) = 0)$$

Δ. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f που σχηματίζει γωνία με τον $x'x$ γωνία ω .

$$\text{Απαιτούμε: } f'(x_0) = \tan \omega \quad (1) \text{ με } \omega \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Απο τη σχέση (1) υπολογίζουμε κάθε φορά το x_0 και αντικαθιστούμε την τιμή του στον τύπο της εξίσωσης εφαπτομένης.

Τα προηγούμενα εφαρμόζονται και αν μας ζητούν να αποδείξουμε κάποια συνθήκη ή ύπαρξη με εφαπτομένες.

Ενδεικτικά:

Αν δίνεται η συνάρτηση f και ζητείται:

A. Να αποδείξετε ότι η γνωστή ευθεία (η) εφάπτεται της C_f

Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 ώστε οι ευθείες (η) και

$$\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ ταυτίζονται}$$

$$\text{Ειδικά αν (η) : } y = \alpha x + \beta \text{ αποδεικνύουμε ότι το σύστημα: } \begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ y_0 = \alpha x_0 + \beta \\ f'(x_0) = \alpha \end{cases} \text{ έχει μια}$$

τουλάχιστον λύση (x_0, y_0) που είναι το σημείο επαφής.

B. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν n εφαπτομένες της C_f παράλληλες σε γνωστή ευθεία (η)

Αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = \lambda_\eta$ με $\lambda_\eta \neq 0$ έχει n λύσεις

Εδικά αν η ευθεία (η) είναι ο άξονας $x'x$ (ή (η) παράλληλη στον άξονα $x'x$)

αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει n λύσεις

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν n εφαπτομένες της C_f κάθετες σε γνωστή ευθεία (η)

Αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση $f'(x) \cdot \lambda_\eta = -1$ έχει n λύσεις

(Αν δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης λ_η αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$

έχει n λύσεις όπως στην προηγούμενη περίπτωση)

Παραδείγματα:

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^4-14x^2+24x$. Έστω C_f η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να αποδειχτεί ότι υπάρχουν τρία σημεία $A, B, \Gamma \in C_f$, τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της C_f στα A, B, Γ να είναι παράλληλες προς τον άξονα $x'x$.

Λύση:

Για να δείξουμε ότι υπάρχουν τρία σημεία $A, B, \Gamma \in C_f$, τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της C_f στα A, B, Γ να είναι παράλληλες προς τον άξονα $x'x$, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τρεις λύσεις στο $\mathbb{R}$. Είναι: $f'(x) = 4x^3 - 28x + 24$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε: } f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4x^3 - 28x + 24 = 0 \Leftrightarrow 4(x^3 - 7x + 6) = 0 \stackrel{\text{Horner}}{\Leftrightarrow} 4(x-1)(x^2+x-6) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-1 = 0 \text{ ή } x^2+x-6 = 0) \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-3. \end{aligned}$$

Έστω η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2000 + |\ln(x-1)|$. Έστω c πραγματικός μεγαλύτερος του 2000. Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = c$ και η γραφική παράσταση της f τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τα A και B .

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f , στα A και B , είναι κάθετες μεταξύ τους.

Λύση:

Επειδή $\ln(x-1) > 0 \Leftrightarrow x-1 > 1 \Leftrightarrow x > 2$, ο τύπος της f χωρίς απόλυτη τιμή γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} 2000 + \ln(x-1), & x \geq 2 \\ 2000 - \ln(x-1), & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της ευθείας $y = c$ και της C_f βρίσκονται από τη λύση της

$$\text{εξίσωσης } f(x) = c \Leftrightarrow 2000 + |\ln(x-1)| = c \Leftrightarrow |\ln(x-1)| = c - 2000 \stackrel{c > 2000}{\Leftrightarrow}$$

$$\ln(x-1) = c - 2000 \text{ ή } \ln(x-1) = -(c - 2000) \Leftrightarrow x = e^{(c-2000)} + 1 \text{ ή } x = e^{-(c-2000)} + 1.$$

$$\text{Έστω } x_1 = e^{(c-2000)} + 1, x_2 = e^{-(c-2000)} + 1.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$.

Για να δείξουμε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα A και B είναι κάθετες μεταξύ τους, αρκεί να δείξουμε ότι: $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1$

Για $x > 2$ έχουμε $f'(x) = \frac{1}{x-1}$ και για $1 < x < 2$ έχουμε $f'(x) = -\frac{1}{x-1}$.

Επειδή $c > 2000$ είναι $c - 2000 > 0 \Rightarrow e^{c-2000} > 1$ και $e^{-(c-2000)} < 1$, οπότε $x_1 > 2$ και $0 < x_2 < 2$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } f'(x_1) \cdot f'(x_2) &= \frac{1}{e^{c-2000} + 1 - 1} \cdot \left(-\frac{1}{e^{-(c-2000)} + 1 - 1} \right) = \frac{1}{e^{c-2000}} \cdot \frac{-1}{e^{-(c-2000)}} = \\ &= \frac{-1}{e^0} = -1 \end{aligned}$$

Ασκήσεις

3.112 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ με γραφική της παράσταση C_f .

- A. Να βρεθεί η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $M(2,4)$.
- B. Να βρεθεί η εφαπτόμενη της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$.
- Γ. Να βρεθεί η εφαπτόμενη της C_f που είναι παράλληλη στον $y'y$.
- Δ. Να βρεθεί η εφαπτόμενη της C_f που είναι παράλληλη στην $3x + y - 1 = 0$.
- E. Να βρεθεί η εφαπτόμενη της C_f που είναι κάθετη της: $3x + y - 1 = 0$.
- ΣΤ. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f που σχηματίζει γωνία με τον $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$.
- Z. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην χορδή AB με $A(1,-1)$ και $B(\frac{3}{2},0)$.
- H. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = \lambda x - 1$ να εφάπτεται της C_f .
- Θ. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $9x - 2y + 2\lambda = 0$ να εφάπτεται της C_f .

3.113 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{3}$.

3.114 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + 3$, να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 5x + y - 3 = 0$.

3.115 Δείξτε ότι οι εφαπτομένες της C_f με $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$, στα σημεία που η C_f τέμνει τους άξονες, είναι παράλληλες.

3.116 Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 2$ και $g(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}$.

Να βρεθεί σημείο M του άξονα $y'y$ ώστε οι εφαπτομένες των C_f και C_g που διέρχονται από το σημείο M να είναι κάθετες.

3.117 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$.

Να βρεθεί σημείο M της C_f ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M να τέμνει τους άξονες σε σημεία που έχουν απόσταση ίση με $\frac{2}{e}\sqrt{1+e^2}$.

Εύρεση παραμέτρων ώστε η C_f να έχει συγκεκριμένη εφαπτόμενη στο x_0 ή να ικανοποιεί κάποια συνθήκη.

Παράδειγμα

Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + 9x - 12$. Να προσδιορίσετε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το σημείο $A(2, -10)$ να ανήκει στη C_f και η εφαπτομένη της C_f στο A να έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό -3 .

Λύση:

Έχουμε : $A \in C_f \Leftrightarrow f(2) = -10 \Leftrightarrow a2^3 + \beta 2^2 + 9 \cdot 2 - 12 = -10 \Leftrightarrow 2a + \beta = -4$. (1)

Ακόμη $f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x + 9$, $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης είναι -3 θα έχουμε

$f'(2) = -3 \Leftrightarrow 3a2^2 + 2\beta \cdot 2 + 9 = -3 \Leftrightarrow 3a + \beta = -3$. (2)

Από το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $a = 1$ και $\beta = -6$.

Ασκήσεις

3.118 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} + \lambda x^2 - (\lambda^2 - \lambda)x$, να προσδιορίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να μην δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

3.119 Έστω η συνάρτηση $f(x) = (a - \beta)x^2 + (a + \beta + \gamma)x + a - \beta - \gamma$, να υπολογισθούν οι αριθμοί $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ να σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.

3.120 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 4x, & x \leq 1 \\ \beta x^2 + \gamma x, & x > 1 \end{cases}$ να υπολογισθούν οι τιμές των $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να δέχεται στο σημείο $A(1, f(1))$ εφαπτομένη με κλίση 10.

- 3.121** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 2, & x < 2 \\ \gamma x^2 + x + 4, & x \geq 2 \end{cases}$, να υπολογισθούν οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να δέχεται στο σημείο $A(2, f(2))$ εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x - 3y + 2 = 0$.
- 3.122** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + 9$, να προσδιορίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε ευθεία με εξίσωση $y = 2x$ να είναι εφαπτομένη της C_f .
- 3.123** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \kappa x + 2$, να προσδιορίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχουν εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
- 3.124** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq 1 \\ \frac{\gamma}{x} + 2, & x > 1 \end{cases}$, να υπολογισθούν οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να ορίζεται η εφαπτομένη C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $3x - y + 3 = 0$.
- 3.125** Έστω η συνάρτηση $f(x) = (\alpha x + 1) \cdot e^{x^2 - x + \beta}$, να υπολογισθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, 1)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

Εύρεση κοινής εφαπτόμενης των C_f, C_g

- A.** Εάν έχουμε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό τους σημείο απαιτούμε $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$ και βρίσκω το x_0
- B.** Εάν η κοινή εφαπτόμενη είναι σε διαφορετικά σημεία τότε υποθέτουμε ότι τα σημεία επαφής είναι $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$ και απαιτούμε να ταυτίζονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$ και $\varepsilon_2: y - g(x_2) = g'(x_2) \cdot (x - x_2)$.

Αν το ένα από δύο σημεία είναι γνωστό, έστω το $A(x_1, f(x_1))$, τότε είναι γνωστή και η εφαπτομένη ε_1 της C_f οπότε εξετάζουμε αν η ε_1 εφάπτεται και της C_g

Αν έχουμε κοινή εφαπτομένη μιας μόνο συνάρτησης, έστω της C_f , σε διαφορετικά σημεία της C_f τότε υποθέτουμε ότι τα σημεία επαφής είναι $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ και απαιτούμε να ταυτίζονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$ και $\varepsilon_2: y - f(x_2) = f'(x_2) \cdot (x - x_2)$.

- Γ.** Για να δείξουμε ότι η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ είναι κοινή εφαπτόμενη των C_f, C_g υποθέτουμε ότι $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, g(x_2))$ είναι τα σημεία επαφής των C_f, C_g αντίστοιχα και απαιτούμε η εφαπτομένη $\varepsilon_1: y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$ της C_f στο σημείο $A(x_1, f(x_1))$ να ταυτίζεται με την $y = \alpha x + \beta$ και η εφαπτομένη της C_g $\varepsilon_2: y - g(x_2) = g'(x_2) \cdot (x - x_2)$ στο σημείο $B(x_2, g(x_2))$ να ταυτίζεται και αυτή με την $y = \alpha x + \beta$

- Δ.** Για να δείξουμε ότι οι C_f, C_g εφάπτονται, υποθέτουμε ότι (x_0, y_0) είναι το σημείο επαφής και απαιτούμε $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$.
(Στο κοινό σημείο επαφής θα έχουν και κοινή εφαπτόμενη).

Ασκήσεις

- 3.126** Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1$ και $g(x) = x^2 + x + 2$.
Αν $A(1, y_0)$ είναι κοινό σημείο των C_f και C_g , να υπολογισθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι C_f και C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη.
- 3.127** Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 + \beta x - 1$ και $g(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$. να υπολογισθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι C_f και C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = 1$
- 3.128** Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = -x^2 + 4x$ και $g(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$, να προσδιορίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, 3)$ να εφάπτεται και της C_g .
- 3.129** Αν για την παραγωγίσμη συνάρτηση f ισχύει: $f(x^2 - 1) - 2x = x \cdot f(x + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(0, f(0))$ εφάπτεται της C_f και στο $B(2, f(2))$

Σύνθετες ασκήσεις

- 3.130** Έστω οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ αντίστοιχα τέμνονται σε σημείο M του άξονα $y'y$.
- 3.131** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C που ορίζεται από τις εξισώσεις $x = \sqrt{t}$ και $y = t\sqrt{t} - 1$ στο σημείο για το οποίο $t = 16$.
- 3.132** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$ με γραφικές παραστάσεις C_f, C_g αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:
- A.** Η C_f δέχεται στο σημείο της $M\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$ εφαπτόμενη (ε) η οποία δεν έχει με την C_f άλλο κοινό σημείο.
- B.** Η C_g δέχεται στο σημείο της $N\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$ εφαπτομένη (η) η οποία έχει με την C_g ένα ακόμη κοινό σημείο Λ του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.
- Γ.** Για ποια τιμή του α οι εφαπτόμενες $(\varepsilon), (\eta)$ διέρχονται από το κοινό σημείο των C_f και C_g ;

- 3.133** Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 = 0$, αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$, $\frac{1}{2} \cdot f(x) \cdot g(x)$, έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = 0$, να βρεθεί η εξίσωση της κοινής αυτής εφαπτομένης.
- 3.134** Έστω οι συναρτήσεις f, g, h ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:
 α) Η f είναι παραγωγίσιμη.
 β) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 γ) Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.
 δ) $g(x) = f(x) \cdot h'(x)$ και $[h(x)]^2 + [h'(x)]^2 = 1$
 ε) Οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $M(x_0, y_0)$.
 Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν στο σημείο M κοινή εφαπτομένη.
- 3.135** Έστω η συνάρτηση g ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $g(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(0) = e - 1$. Δείξτε ότι η εφαπτομένη της C_f με $f(x) = (1 + g(x))^x$ στο σημείο $M(0, f(0))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°
- 3.136** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2$, να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f , η οποία έχει με την C_f ένα μόνο κοινό σημείο.
- 3.137** Α. Έστω f ώστε $f(x)e^{f(x)} = e^{x+1}$ να βρεθεί η κλίση της εφαπτόμενης στο $A(0,1)$
 Β. Έστω x παραγωγίσιμη ώστε $g(x^2 + 1) + g(x^2 + x + 1) = x^2 g(1)$ Να δείξετε ότι η εφαπτόμενη στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον $x'x$
- 3.138** Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 Αν η C_g της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A , δείξτε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο A σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°
- 3.139** Έστω η συνάρτηση $y = f(x)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η ευθεία με εξίσωση $y = 2x$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = -1$, να βρεθεί η εφαπτομένη της C_g της συνάρτησης $g(x) = f\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ στο $x_1 = 1$.
- 3.140** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sin x$.
 i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
 ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων στα οποία η εφαπτομένη αυτή τέμνει τους ημιάξονες Ox, Oy .
 iii) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη αυτή με τους ημιάξονες Ox, Oy .

- 3.141** Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, αν ισχύει $g(x) = f(x) - x$ να αποδείξετε ότι των γραφικών παραστάσεων των f, g στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ αντίστοιχα τέμνονται σε σημείο M του άξονα $y'y$.
- 3.142** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f^3(x) + x^3 = x \cdot f(x)$, δείξτε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 1 - x$ εφάπτεται στη C_f .
- 3.143** Θεωρούμε συνάρτηση f με τις ιδιότητες:
 i) Έχει πεδίο ορισμού $A = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
 ii) Είναι παραγωγίσιμη
 iii) Για κάθε $x \in A$ ισχύει: $9f^2(x) + 36 = 4x^2$
 Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $5x - 6y - 9 = 0$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- 3.144** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(1+x) + x = f(1-x) - x$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y = x$.
- 3.145** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(ax)}{x}$ με $a > 0$ και $x > 0$.
 α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.
 β) Να αποδείξετε ότι όλες οι παραπάνω εφαπτόμενες στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, καθώς μεταβάλλεται το a , διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- 3.146** Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει η σχέση:
 $f(2+x) - f(2-x) = -2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $(2, f(2))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y = x$.
- 3.147** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\ln x) = x \ln x - x$, $x > 0$
 α) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη 0.
 γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- 3.148** Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύουν: $f'(4) = 0$ και $(f'(x))^2 = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
 α) να βρεθεί ο τύπος της f .
 β) να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x + 1$.