

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ROLLE – ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ**Θεώρημα Rolle**

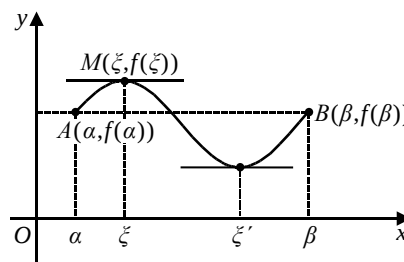
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) και
- $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρική ερμηνεία

Υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .

**Σχόλια – Παρατηρήσεις**

Για να εφαρμόζεται το Θεώρημα **Rolle** πρέπει να ισχύουν και οι τρεις προϋποθέσεις διαφορετικά δεν ισχύει το συμπέρασμα

Το αντίστροφο του θεωρήματος **Rolle** δεν ισχύει, δηλαδή μπορεί να υπάρχει ρίζα της παραγώγου χωρίς να ισχύει κάποια από τις προϋποθέσεις

Για να είναι συνεχής μια συνάρτηση f στο $[a, \beta]$ δεν απαιτείται συνέχεια στα a, β αλλά πρέπει να είναι συνεχής στο (a, β) και επιπλέον να ισχύουν $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$,

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta).$$

Επομένως αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) τότε θα είναι και συνεχής στο (a, β) και αν επιπλέον ισχύουν $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$ και $f(a) = f(\beta)$ ισχύουν και οι τρεις προϋποθέσεις του θεωρήματος **Rolle**.

Το Θεώρημα **Rolle** εξασφαλίζει ότι μεταξύ δύο ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f' .

Ομοίως μεταξύ δύο ριζών της f' μιας δυο φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f'' κ.ο.κ.

Ασκήσεις

3.1 Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται και στη συνέχεια να βρείτε τα αντίστοιχα ξ όταν:

i) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $[-1, 1]$

ii) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^x$, $[-1, 1]$

iii) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$, $[-2, 2]$

iv) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in [-1, 0) \\ x + 1, & x \in [0, 1] \end{cases}$, $[-1, 1]$

v) $f(x) = |x - 1|^3$, $[0, 2]$

vi) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 4}, & x \in [0, 3] \\ \frac{x^2}{4} + 2, & x \in (3, 5] \end{cases}$, $[0, 5]$

Αν ζητείται ο προσδιορισμός παραμέτρων ώστε να εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, έχοντας υπόψη ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$ σχηματίζουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις και προσδιορίζουμε τις παραμέτρους

3.2 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x < 0 \\ 3 + (\gamma - \alpha)x, & x \leq 0 \end{cases}$, να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[-1, 1]$, και στη συνέχεια να βρεθεί $\xi \in [-1, 1]$ ώστε να ισχύει $f(\xi) = 0$

3.3 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \in [-1, 0) \\ \gamma x^2 + 4x + 4, & x \in [0, 1] \end{cases}$, να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[-1, 1]$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Θ.Μ.Τ.)

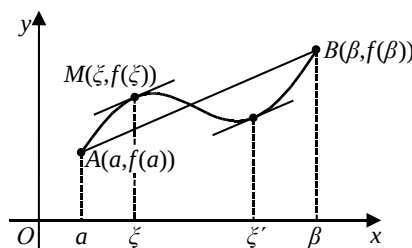
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Γεωμετρική ερμηνεία

Υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .



Σχόλια – Παρατηρήσεις

Το Θεώρημα **Rolle** είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος **Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού**.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[α, β]$ τότε είναι και συνεχής στο $[α, β]$ άρα το Θ.Μ.Τ. ισχύει.

Το Θεώρημα **Μέσης Τιμής** μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $ξ ∈ (α, β)$ τέτοιο, ώστε: $f(β) - f(α) = f'(ξ) \cdot β - α$

Ισχύει: $\frac{f(β) - f(α)}{β - α} = \frac{f(α) - f(β)}{α - β}$ αρκεί $α \neq β$

Ασκήσεις

3.4 Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα που αναφέρεται και στη συνέχεια να βρείτε τα αντίστοιχα $ξ$ όταν:

$$\begin{aligned} \text{i)} f(x) &= \begin{cases} x^2 & , x \in [0, 1] \\ 2x - 1 & , x \in (1, 2] \end{cases}, [0, 2] & \text{ii)} f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} & , x \geq \frac{1}{2} \end{cases}, [0, 1] \\ \text{iii)} f(x) &= \begin{cases} \frac{x}{x^2 + 1} & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}, [-1, 1] & \text{iv)} f(x) = \begin{cases} x - 3 & , x < 3 \\ \frac{\ln(x - 2)}{x - 2} & , x \geq 3 \end{cases}, [1, 4] \end{aligned}$$

Ασκήσεις στη Γεωμετρική ερμηνεία θεωρημάτων Rolle - Μέσης Τιμής

Αν ζητείται να αποδείξουμε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ τότε έχοντας υπόψη τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Rolle, δείχνουμε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle.

Αν ζητείται να αποδείξουμε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς παράλληλη προς τη χορδή M_1M_2 όπου $M_1(α, f(α))$, $M_2(β, f(β))$ τότε έχοντας υπόψη τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής δείχνουμε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Αν ζητείται να προσδιορίσουμε και το αντίστοιχο $ξ$, το λύνοντας την εξίσωση $f'(ξ) = 0$ (για το Θεώρημα Rolle) ή από την $f'(ξ) = \frac{f(β) - f(α)}{β - α}$ (για το Θ.Μ.Τ.).

Ασκήσεις

- 3.5** Να εξετασθεί εάν για τις παρακάτω συναρτήσεις υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 1)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ όταν:

$$\begin{array}{lll} \text{i) } f(x) = e^{x^2} & \text{ii) } f(x) = \begin{cases} \ln(1-x), x \in [-1, 0) \\ \ln(1+x), x \in [0, 1] \end{cases} & \text{iii) } f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2} \\ \text{iv) } f(x) = e^{|x|} & \text{v) } f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}} & \end{array}$$

- 3.6** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - x^3$ με $x \in [-2, 1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της C_f σε αυτό, να είναι παράλληλη στην χορδή AB που ορίζεται από τα σημεία $A(-2, 6)$ και $B(1, 0)$.

- 3.7** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, να βρεθεί σημείο $N(\alpha, \beta)$ της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της, να είναι παράλληλη στην χορδή AB που ορίζεται από τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2, \frac{1}{2})$.

- 3.8** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$, να βρεθεί σημείο $M(\alpha, \beta)$ με $1 < \alpha < 3$ της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της, να είναι παράλληλη στην χορδή AB που ορίζεται από τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(3, 9)$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΥΠΑΡΞΗΣ

- 1.** Όταν μας ζητούν να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ ώστε να ικανοποιεί κάποια σχέση, εφαρμόζουμε κάποιο από τα ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΥΠΑΡΞΗΣ τα οποία είναι:

Bolzano**Ενδιάμεσων Τιμών****Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής**Τα τρία πρώτα θεωρήματα το συμπέρασμα μας πληροφορεί για την f **Θεώρημα ROLLE****Θεώρημα Μέσης Τιμής**Στα δυο τελευταία το συμπέρασμα μας πληροφορεί για την f' .

- 2.** Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $f(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) τότε:

α) Εφαρμόζουμε μια από τις μεθόδους που αναφέρθηκαν στη συνέχεια.

Υπενθυμίζουμε συνοπτικά:

- Βρίσκουμε μια προφανή ρίζα της εξίσωσης

- Με το θεώρημα Bolzano
- Με απαγωγή σε άτοπο
- Με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών
- Με το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης
- Με το σύνολο τιμών

Αν τα παραπάνω δεν δίνουν λύση τότε:

β) Βρίσκουμε συνάρτηση F τέτοια ώστε $F'(x) = f(x)$ για την οποία αποδεικνύουμε ότι ισχύει το Θεώρημα Rolle στο $[a, b]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε: $F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 0$. (Την συνάρτηση F την λέμε αρχική ή παράγουσα της f)

α) Να μπουν τύποι ευρεσης παραγουσων

3. Αν ζητείται να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία το πολύ ρίζα στο (a, b) (ή το πολύ δύο κτλ.), τότε:

α) Εφαρμόζουμε μια από τις μεθόδους που αναφέρθηκαν στη συνέχεια.

Υπενθυμίζουμε συνοπτικά:

αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1» ή γνησίως μονότονη ή με απαγωγή σε άτοπο ή ευθεία απόδειξη

β) Με απαγωγή σε **άτοπο** από θεώρημα Rolle

Υποθέτουμε ότι έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 στο (a, b) (ή τρεις κτλ.), οπότε λόγω της μορφής της f θα ισχύει το Θεώρημα Rolle στο $[\rho_1, \rho_2]$ (ή και στο $[\rho_2, \rho_3]$), άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, από το οποίο καταλήγουμε σε **άτοπο** ή επειδή η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη ή επειδή οι ρίζες της $f'(x) = 0$ δεν ανήκουν στο διάστημα (a, b) ή με άλλο τρόπο.

4. Αν ζητείται να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο (a, b) τότε:

Με το 2 δείχνουμε ότι έχει τουλάχιστον μία και με το 3 ή άλλο τρόπο αποκλείουμε να έχει δύο.

Παρατηρήσεις:

Στις ασκήσεις τέτοιες ερωτήσεις μπορεί να διατυπώνονται και με άλλο τρόπο. Ενδεικτικά αναφέρονται μερικές περιπτώσεις διατύπωσης ερωτημάτων και τι αρκεί να αποδείξουμε:

- 1) Να δειχθεί ότι υπάρχει ξ , ή x_0 , ή ρ στο (a, b) ή στο $[a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ ή $f(\xi) = 0$ ή $f(\rho) = 0$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε ένα από αυτά τα διαστήματα.

- 2) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση f δέχεται σε κάποιο σημείο της (μπορεί να μας περιορίζει και σε διάστημα) οριζόντια εφαπτομένη (ή εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x'). Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

- 3) Ναδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (δηλαδή η C_f) τέμνει άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.
Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Και σε αυτή την περίπτωση μπορεί η άσκηση να μας περιορίζει σε διάστημα.
- 4) Ναδειχθεί ότι δύο συναρτήσεις (έστω οι f, g) έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο (ή τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο).
Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 για το οποίο ισχύει $f(x_0) = g(x_0)$. Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ και προσπαθώ να αποδείξω ότι αυτή έχει μία τουλάχιστον ρίζα, όπως και στο (1).
- 5) Σε περιπτώσεις που μας ζητείται να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα ξ , ή x_0 , ή ρ (σε διάστημα ή και όχι) ώστε να ικανοποιείται μια ισότητα (π.χ. στην περίπτωση που μας δίνεται η ισότητα $(x^2 - 1)\sin x = -2x\eta\mu x + 1$), μεταφέρω όλες τις συναρτήσεις (σταθερές και μη, π.χ. εδώ σταθερή συνάρτηση είναι το $+1$) στο πρώτο μέλος (κοινώς «τα πάω όλα στο πρώτο μέλος») και αφού καταλήξω σε μορφή «1^ο μέλος = 0» (στη δική μας περίπτωση $(x^2 - 1)\sin x + 2x\eta\mu x - 1 = 0$), θεωρώ συνάρτηση $f(x) = 1^o$ μέλος.
Το θέμα ανάγεται σε εύρεση τουλάχιστον μίας ρίζας για την f (στη δική μας περίπτωση πάλι, της $f(x) = (x^2 - 1)\sin x + 2x\eta\mu x - 1$).
- 6) Ναδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f (δηλαδή της C_f) στο σημείο αυτό (δηλαδή στο $M(x_0, f(x_0))$) να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = \alpha x + \beta$ ή στην ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$.
Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(x_0) = \alpha$ ή $f'(x_0) = -\frac{A}{B}$, ($B \neq 0$) αντίστοιχα.
- 7) Ναδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f (δηλαδή της C_f) στο σημείο αυτό (δηλαδή στο $M(x_0, f(x_0))$) να είναι κάθετη στην ευθεία $y = \alpha x + \beta$ ή στην ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$.
Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 τέτοιο ώστε να ισχύει:
 $f'(x_0) \cdot \alpha = -1$, ($\alpha \neq 0$) ή $f'(x_0) \cdot \left(-\frac{A}{B}\right) = -1$, ($B \neq 0$) αντίστοιχα.

Να σημειωθεί ότι η έκφραση «υπάρχει τουλάχιστον ένα» μπορεί να αντικατασταθεί από άλλες παρόμοιες, όπως «υπάρχει ακριβώς ένα», ή «υπάρχουν το πολύ τρία». Σε αυτές τις περιπτώσεις προσαρμόζουμε την άσκηση σε αυτό που μας ζητείται

Γενικά αυτές οι μορφές ασκήσεων αποτελούν τις τυποποιημένες περιπτώσεις όπου μας ζητείται να εφαρμόσουμε τεχνικές πλήθους ριζών εξίσωσης. Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχουν και άλλες ασκήσεις στις οποίες πιθανόν να χρησιμοποιήσουμε παρόμοια τακτική, ούτε ότι το πλήθος ριζών εξίσωσης σαν μεθοδολογία λύνει οπωσδήποτε όλες τις παραπάνω μορφές ασκήσεων. Είναι όμως αρκετά πιθανό να τις λύνει.

Σημείωση:

Οι εκφράσεις «τουλάχιστον μια ρίζα», «ακριβώς μια ρίζα», «το πολύ μια ρίζα» σημαίνουν:

Το «τουλάχιστον μια ρίζα»: μια ή περισσότερες ρίζες

Το «ακριβώς μια ρίζα»: μόνο μια ρίζα

Το «το πολύ μια ρίζα»: μια ή καμία

Ασκήσεις

3.9 Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και η παραγωγός της f' είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) . Αν υπάρχει $\gamma \in (a, b)$ ώστε $f(a)=f(b)=f(\gamma)$, δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

3.10 Έστω οι συναρτήσεις f, g με τις εξής ιδιότητες:

i) f, g συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$

ii) f, g παραγωγίσιμες στο διάστημα (a, b)

iii) $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$

iv) $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$

v) $f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b) = 0$

Δείξτε ότι:

α) Εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ στο διάστημα $[a, b]$

β) Υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε: $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$

3.11 Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) , να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε: $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{1}{a - x_0} + \frac{1}{b - x_0}$, αφού πρώτα εφαρμόσετε θεώρημα Rolle στο διάστημα $[a, b]$

3.12 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$, αν $f(a) = a$, $f(b) = b$ και υπάρχει $\gamma \in (a, b)$ ώστε $f(\gamma) = \gamma$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε: $f''(\xi) = 0$.

3.13 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) , αν $\frac{f(a)}{e^a} = \frac{f(b)}{e^b}$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_0) = -f(x_0)$.

3.14 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[e, e^2]$ για την οποία ισχύει $f(e^2) = 2f(e)$, δείξτε ότι:

i) Εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{\ln x}{f(x)}$ στο διάστημα

$[e, e^2]$

ii) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (e, e^2)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) \cdot \ln \xi = f(\xi)$

3.15 Έστω οι συναρτήσεις, f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $g(x) = (x^2 - 1) \cdot f(x)$, δείξτε ότι:

i) Εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση g στο διάστημα $[-1, 1]$

ii) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \frac{2\xi}{1-\xi^2} \cdot f(\xi)$.

3.16 Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow (0, +\infty)$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, αν $f'(\alpha) \cdot f(\beta) - f'(\beta) \cdot f(\alpha) = 0$, δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f''(\xi) \cdot f(\xi) - f'(\xi) \cdot f'(\xi) = 0$.

17. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και οι αριθμοί $f(\alpha)$, $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $f(\beta)$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha}$ και $\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\beta)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta}$ είναι ίσοι.

β) Να αποδείξετε ότι η δεύτερη παράγωγος της f μηδενίζεται σ' ένα τουλάχιστον σημείο.

3.17 Η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) για τη συνάρτηση $F(x) = \frac{f(x)}{x - c}$, $c \notin [\alpha, \beta]$, υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(c_0) = 0$$

ii) υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(c_0, f(c_0))$ να διέρχεται από το σημείο $(c, 0)$.

3.18 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, +\infty)$, αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και $f(1) = e - 1$, δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = 2\xi(1 + f(\xi))$ [Υπόδειξη: Θωρήστε την $g(x) = \ln(1 + f(x)) - x^2$]

3.19 Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάθε $x \in \mathbb{Z}$ ισχύει $f(x+1) = f(x) + 1$

i) Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \ln(\alpha + x)$ στο διάστημα $[0, 1]$

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{e-1}{1+(e-1) \cdot \xi}$$

- 3.20** Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν $f(2) = 2f(1)$, δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \xi \cdot f'(\xi)$.
- 3.21** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1,3]$, και παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ αν $f(1) = 3$, $f(3) = 9$ δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- 3.22** Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) . Να αποδείξετε ότι :
- Η συνάρτηση $F(x) = e^{f(x)} \cdot (x - a) \cdot (x - \beta)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[a, \beta]$
 - Υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{a + \beta - 2\xi}{(\xi - a) \cdot (\xi - \beta)}$.
- 3.23** Έστω ότι για τη συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:
- η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$
 - η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β)
 - $f(a) = \beta$, $f(\beta) = a$.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -1$.
- 3.24** Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (a, β) και είναι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $\frac{f(\beta) - f(a)}{g(\beta) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.
- 3.25** Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,5)$ και είναι $\frac{f(5) - f(3)}{f(3) - f(0)} = \frac{2}{3}$ τότε υπάρχει $x_0 \in (0,5) : f''(x_0) = 0$
- 3.26** Εάν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,2]$ και $f(1) = -1$, να βρείτε την τιμή $f(2)$, ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$ στο διάστημα $[1,2]$ και στη συνέχεια δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $k \in (1,2)$ τέτοιο ώστε: $k \cdot f'(k) = 3f(k)$.
- 3.27** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^5 + 4x^3 + 5x + 27 = 0$, έχει μια μόνο πραγματική ρίζα.
Ομοίως για την εξίσωση $x^3 + 4x + \alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 3.28** Δείξτε ότι η εξίσωση $(1-x) \cdot \sin x - \eta \mu x = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

✎ Όταν ζητείται να δείξουμε ότι υπάρχουν n τουλάχιστον σημεία ενός διαστήματος για τα οποία επαληθεύεται κάποιο θεώρημα ύπαρξης ή ότι ισχύει κάποια συνθήκη, τότε χωρίζουμε το διάστημα σε n υποδιαστήματα και εφαρμόζουμε κάποιο θεώρημα ύπαρξης

σε καθένα από αυτά.

✎ Όταν ζητείται να δείξουμε ότι υπάρχουν το πολύ n σημεία τα ώστε να ικανοποιούν τη συνθήκη (Σ) τότε υποθέτουμε ότι υπάρχουν $n+1$ σημεία που ικανοποιούν την (Σ) και καταλήγουμε σε άτοπο.

✎ Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 που να ικανοποιεί κάποια σχέση (σ) τότε:
Δείχνουμε:

α) Την ύπαρξη δηλαδή ότι υπάρχει x_0 ώστε να ικανοποιεί την (σ) .

β) Την μοναδικότητα: δηλαδή ότι το x_0 είναι μοναδικό.

Την μοναδικότητα την εξασφαλίζουμε με:

απαγωγή σε άτοπο

αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1» ή γνησίως μονότονη με ευθεία απόδειξη.

✎ Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει το πολύ ένα x_0 που ικανοποιεί κάποια σχέση (σ) τότε υποθέτουμε ότι υπάρχουν δυο σημεία του (α, β) που ικανοποιούν τη σχέση (σ) και καταλήγουμε σε άτοπο

Ασκήσεις

3.29 Δείξτε ότι δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $x^3 - 3x + \lambda = 0$ να έχει δύο πραγματικές ρίζες στο διάστημα $(0,1)$.

3.30 Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 = x \cdot \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x$ από μία ακριβώς ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\pi, 0)$ και $(0, \pi)$.

3.31 Δείξτε ότι η εξίσωση $x^4 + \alpha x + \beta = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες

3.32 Δείξτε ότι η εξίσωση $x^{2v+1} + \alpha x + \beta = 0$, $v \in \mathbb{N}^*$, έχει το πολύ 3 πραγματικές ρίζες.

3.33 Δείξτε ότι η εξίσωση $x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha > 0$, έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

3.34 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right) \cdot x^2 + (\gamma - \delta) \cdot x + \delta$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

3.35 Να βρείτε πόσες πραγματικές ρίζες και σε ποια διαστήματα έχει η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x(x+1)(x-2)(x+3)$.

- 3.36** Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f' = g$ και $g' = -f$. Να αποδείξετε ότι αν x_1 και x_2 είναι δύο ρίζες της f και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ τότε η g έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) .

Θέμα εξετάσεων 1^{ης} Δέσμης 1996

- 3.37** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, αν $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + f(\pi)$, δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_0) = \sin x_0$

- 3.38** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = x_0$.

- 3.39** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνον ένας αριθμός $x_0 \in (1, e)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) + x_0 \cdot \ln x_0 = x_0$

- 3.40** Έστω $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + \mu$ όπου $\mu \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δυο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα $(1, 2)$

- 3.41** Εάν ισχύει $\alpha^2 < 3\beta$, δείξτε ότι η εξίσωση $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία πραγματικές ρίζες.

- 3.42** Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $2f'(x) + x \cdot f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία πραγματικές ρίζες.

- 3.43** Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3 + 2\alpha x^2 + 3\beta x + 4\gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $4\alpha^2 - 9\beta < 0$, έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

- 3.44** Θεωρούμε τη συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\Delta = (0, 1)$ ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες:

$$1) 0 < f(x) < \frac{1}{2} \text{ για } x \in \Delta \qquad 2) 0 < f'(x) < 1 \text{ για } x \in \Delta$$

$$3) f''(x) + \frac{1}{2} \neq 0 \text{ για } x \in \Delta \qquad 4) f(0) = f(1) + \frac{1}{4}$$

Να δείξετε ότι:

α) Υπάρχει μοναδικό σημείο $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f(x_0) = x_0$,

β) Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f'(x_0) = -\frac{1}{2}x_0$

- 3.45** Δίνεται η συνάρτηση $f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{e^x}{3}(1-x)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$
- 3.46** Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) + f(x) \cdot g'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .
- 3.47** Έστω $f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x)x \ln x = e^x - 1$
 Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$
 Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

Όταν μας ζητάνε να δείξουμε ότι υπάρχουν x_1, x_2 που ανήκουν στο (α, β) ώστε να ικανοποιούν κάποια συνθήκη (Σ) εργαζόμαστε συνήθως ως εξής:

Χωρίζουμε το (α, β) στα υποδιαστήματα $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right), \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ και εφαρμόζουμε

κάποιο θεώρημα ύπαρξης για κατάλληλη συνάρτηση ή

Χωρίζουμε το (α, β) σε κατάλληλα για τις ανάγκες τις άσκησης διαστήματα

$(\alpha, \gamma), (\gamma, \beta)$ και εφαρμόζουμε θεώρημα ύπαρξης για κατάλληλα επιλεγμένη συνάρτηση. ή

Εφαρμόζουμε δυο φορές κάποιο θεώρημα ύπαρξης για δυο κατάλληλα επιλεγμένες συναρτήσεις στο (α, β)

Ασκήσεις

- 3.48** Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α, β) και είναι $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν σημεία $x_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $x_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.
- 3.49** Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν σημεία $x_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $x_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ και $\kappa \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = 2f'(\kappa)$.
- 3.50** Εάν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 4]$, δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in (0, 4)$ τέτοια ώστε:
 $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) + f'(\xi_4) = 0$.

- 3.51** Έστω $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι:
- i) Υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 1 - x_0$
 - ii) Υπάρχουν $\alpha, \beta \in (0,1)$ τέτοια, ώστε $f'(\alpha) \cdot f'(\beta) = 1$.
- 3.52** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν η ευθεία $\varepsilon: y - 2x = 0$ τέμνει την C_f σε σημεία με τετμημένες $x_1, x_2, (x_1 < x_2)$, δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_0) = \frac{4x_0}{x_1 + x_2}$

Απόδειξη ανισοτικών σχέσεων με το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Απόδειξη ανισότητας με δύο μεταβλητές.

Εξετάζουμε αν υπάρχει κατάλληλη συνάρτηση f για την οποία αποδεικνύουμε ότι ισχύει το Θεώρημα της Μέσης Τιμής σε διάστημα $[\alpha, \beta]$, άρα θα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$

τέτοιοι ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ (1).

Λύνοντας την (1) ως προς ξ βρίσκουμε $\xi = \varphi(\alpha, \beta)$, οπότε από τη σχέση $\alpha < \xi < \beta$ με κατάλληλες πράξεις καταλήγουμε στη ζητούμενη ανισότητα.

Απόδειξη ανισότητας με μία μεταβλητή.

Θεωρούμε κατάλληλη συνάρτηση f για την οποία εφαρμόζουμε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής στο $[\alpha, x]$ ή $[x, \alpha]$, όπου α κατάλληλα επιλεγμένος αριθμός (συνήθως 0 ή 1).

Ασκήσεις

- 3.53** Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[1,2]$, αν $f(1) = 3$ και $-2 < f'(x) < 1$ για κάθε $x \in (1,2)$, δείξτε ότι: $1 < f(2) < 4$.
- 3.54** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[-1,10]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,10)$, αν ισχύουν $f(-1) = 0$ και $1 \leq f'(x) \leq 2$ για κάθε $x \in (-1,10)$, δείξτε ότι: $11 \leq f(10) \leq 22$.
- 3.55** Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, να δείξετε ότι: $\alpha \cdot e < \left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} < \beta \cdot e$
- 3.56** Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάθε $x \geq 0$ ισχύουν $f(x) \geq x$ και $f'(x) \leq 1$, δείξτε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$
- 3.57** Για κάθε $x > 1$, δείξτε ότι: $\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$

3.58 Εάν $0 < \alpha < \beta$, δείξτε ότι: $v \cdot \beta^{v-1} \cdot (\alpha - \beta) < \alpha^v - \beta^v < v \cdot \alpha^{v-1} \cdot (\alpha - \beta)$

3.59 Εάν $0 < \alpha < \beta$, δείξτε ότι: $e^\alpha \cdot (\beta - \alpha) < e^\beta - e^\alpha < e^\beta \cdot (\beta - \alpha)$.
