

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.130 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2 - 1)}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 β) Να δείξετε ότι το 1 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

2.131 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = ax + \beta$.

- α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
 β) Αν η C_f και (ε) τέμνονται στην ευθεία $(\eta): x = 1$ και η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$ να βρείτε τα α, β .

2.132 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x^2$ και $g(x) = 2 \ln x$.

- α) Να εξετάσετε αν οι f και g είναι ίσες.
 β) Αν $f \neq g$ να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο οι f και g είναι ίσες.

2.133 Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ και $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f + g$ και $\frac{f}{g}$.

2.134 Α. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $f(x) = g(x) + x^2 - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g .

Β. Έστω οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει $g(x) = f^2(x) - 2f(x) + x^2 + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η C_g τέμνει τον ημιάξονα Oy .

2.135 Έστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - f(x) - 1 = x(x-1)$ (1) για κάθε $x \in A$. Να δείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

2.136 Α. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) = 4e^x(f(x) - e^x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^x - x$ και $g(x) = \frac{3x}{x-2}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις

- α) $f \circ g$ β) $g \circ g$

2.137 Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(f(x)) = 2x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- α) Να δείξετε ότι $f(2x-1) = 2f(x)-1$, $x \in \mathbb{R}$
 β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

- 2.138** Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x-1) - 2f(3-x) = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 i) Να δείξετε ότι:
 α) $f(x) - 2f(2-x) = x^2 + 2x + 2$
 β) $f(2-x) - 2f(x) = x^2 - 6x + 10$
 ii) Να βρείτε την f .
- 2.139** A. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η $f \circ g$ γνησίως φθίνουσα, να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.
 B. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η C_f είναι κάτω από την C_g , να δείξετε ότι $(f \circ f)(x) < (g \circ g)(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 2.140** Έστω η συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$. Αν για τη συνάρτηση f είναι $f(x) = \ln x - g(x)$ για κάθε $x > 0$
 α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 β) Να λύσετε την ανίσωση $2 \ln x < 2 + g(x^2)$ στο $(0, +\infty)$.
- 2.141** Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(e^x - x) + f(1-x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ (1). Να λύσετε την
 α) εξίσωση $f(x) = 0$ β) ανίσωση $f(x^2 - 1) < 0$
- 2.142** Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(5, -2)$.
 α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα
 β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(e^x)) < -2$.
- 2.143** Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f \downarrow \mathbb{R}$, $g \uparrow \mathbb{R}$ και $f(x), g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h = \frac{f}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
 β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^3) \cdot g(2x) - f(2x) \cdot g(x^3) < 0$.
- 2.144** A. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x - \ln x) + f(x-1) = \ln x + 3$, $x > 0$
 Αν η f είναι γνησίως αύξουσα να λύσετε
 α) την εξίσωση $f(x) = 2$ β) την ανίσωση $f(e^x - 1) < 2$
 B. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = e^x + f^3(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι «1-1».

- 2.145** Δίνεται η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$ και $f(x) = x - \ln f(x)$ για κάθε $x \in A$.
α) Να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα.
β) Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$.
- 2.146** Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε την $f(1)$.
β) Να δείξετε ότι η f δεν είναι $1-1$.
γ) Να δείξετε ότι η $g(x) = 2e^{x^2+x} - f(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι $1-1$.
- 2.147** Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = f(x) + e^x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^3 - 5x) = f(2x - 6)$.
- 2.148** Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,2)$ και $B(5,9)$.
i) Να λύσετε τις εξισώσεις
α) $f(x^2 - 1) = 2$ β) $f^2(x) - 11f(x) + 18 = 0$
ii) Να λύσετε τις ανισώσεις
α) $f(x^2 + 1) < 0$ β) $f(x) \cdot (f(x) - 11) < -18$
- 2.149** Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα.
β) Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε να ισχύει: $f(\lambda^2 - 3\lambda) - f(2\lambda - 6) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$.
- 2.150** Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,-2)$.
i) Να συμπληρώσετε τις ισότητες $f(1) = \dots\dots\dots$, $f(3) = \dots\dots\dots$
ii) Να βρείτε τη μονοτονία της f .
iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(3x - 1) + 2 < 0$
iv) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
v) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1}) = 2$
vi) Να συμπληρώσετε τις ισότητες $f^{-1}(2) = \dots\dots\dots$, $f^{-1}(-2) = \dots\dots\dots$
vii) Να λύσετε την εξίσωση $f(-2 + f^{-1}(x + 2)) = 2$.
- 2.151** Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν τα σημεία $A(1,2)$ και $B(-1,3)$ βρίσκονται στη γραφική παράσταση της f .
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
γ) Να βρείτε το λ ώστε $f^{-1}(2 + f^{-1}(e^{\lambda-1})) = -1$.

- 2.152** Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $(1, +\infty)$ και ισχύει $f^2(x) - 2f(x) = e^{2x} - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε την f
β) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την f^{-1} .
- 2.153** Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι:
α) Η f είναι 1-1
β) $f^{-1}(x) = 1 + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
γ) Η C_f δεν έχει κοινά σημεία με την διχοτόμο της γωνίας xOy .
- 2.154** Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(f(x)) = x + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:
α) $f(0) = 0$
β) $f(x) = x + f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in f(\mathbb{R})$.
- 2.155** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \ln(\sqrt{x-1} + 1)$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
β) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1
γ) Να βρείτε την αντίστροφη της f
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x+1) = 3$