

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**Κοίλα - κυρτά συνάρτησης****ΟΡΙΣΜΟΣ**

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται “κάτω” από τη γραφική της παράσταση (Σχ. α), με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

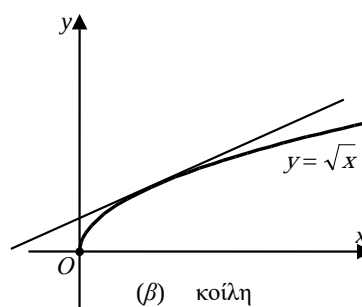
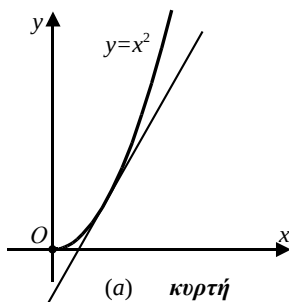
Δηλαδή για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

(το = ισχύει μόνο για $x = x_0$).

Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται “πάνω” από τη γραφική της παράσταση (Σχ. β), με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Δηλαδή για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

(το = ισχύει μόνο για $x = x_0$).

**Παρατήρηση:**

Αν μια συνεχής συνάρτηση f είναι **κυρτή** ή **κοίλη** στο διάστημα Δ τότε η C_f δεν μπορεί έχει τρία συνευθειακά σημεία με τετμημένες στο Δ .

Άμεση συνέπεια: Αν μια συνεχής συνάρτηση f είναι **κυρτή** ή **κοίλη** στο Δ τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha x + \beta$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο Δ .

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

ΣΧΟΛΙΟ

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει δηλαδή αν μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ τότε δεν ισχύει υποχρεωτικά ότι $f''(x) > 0$ ή $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ αντίστοιχα.

Σημείωση:

Για να δηλώσουμε στον πίνακα μεταβολών ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ , χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\cup$ (αντιστοίχως $\cap$).

Σημεία καμπής**ΟΡΙΣΜΟΣ**

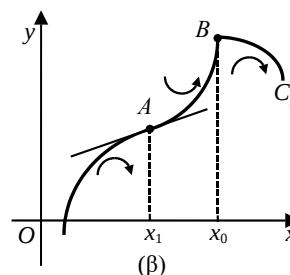
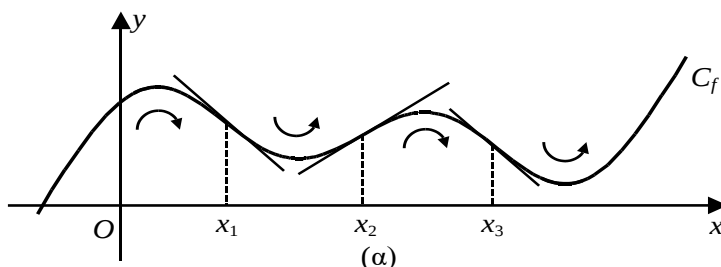
Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f .

Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f , τότε λέμε ότι η f **παρουσιάζει στο x_0 καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**.

Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f “διαπερνά” την καμπύλη.

**Προσοχή!!!**

Στο σχήμα (β) εκατέρωθεν του x_0 αλλάζει η κυρτότητα αλλά δεν είναι σημείο καμπής αφού δεν ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο B.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Άμεση συνέπεια: Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f'' είναι διαφορετική από το μηδέν δεν είναι θέσεις σημείων καμπής.

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει.

Δηλαδή είναι δυνατόν $f''(x_0) = 0$ και το $A(x_0, f(x_0))$ να μην είναι σημείο καμπής της C_f

Παράδειγμα για τη συνάρτηση $f(x) = x^4$ είναι $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$ όμως η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Επειδή δεν ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος, οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

- i) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και
- ii) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''

Με την παρακάτω πρόταση διαπιστώνουμε αν ένα από τα παραπάνω σημεία θα είναι σημείο καμπής.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$,

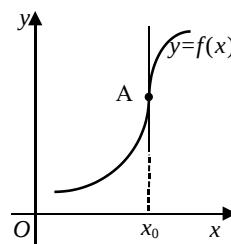
τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

Σημείωση:

Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα σημεία καμπής έχουμε και σε σημεία στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη, αφού στα σημεία αυτά η εφαπτομένη είναι κατακόρυφη.

Επειδή όμως η κατακόρυφη εφαπτομένη είναι εκτός ύλης δεν θα έχουμε εφαπτομένη της C_f σε σημείο που η f δεν είναι παραγωγίσιμη.

Επομένως ο έλεγχος για εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι έλεγχος αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .



Εύρεση διαστημάτων κυρτότητας και σημείων καμπής.

- α) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f
- β) Βρίσκουμε τις f' και f''
- γ) Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της f''
- δ) Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f'' , από τον οποίο έχουμε τα διαστήματα κυρτότητας και τα σημεία καμπής της C_f .
- Το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής όταν εκατέρωθεν του x_0 η f'' αλλάζει πρόσημο και στο x_0 η f δέχεται εφαπτόμενη (είναι παραγωγίσιμη)

Ασκήσεις

3.397 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης (αν υπάρχουν) όταν:

- | | |
|--|--------------------------------|
| i) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 12x + 1$ | ii) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ |
| iii) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ | iv) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ |
| v) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ | vi) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ |
| vii) $f(x) = x^4 - 1$ | viii) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ |

3.398 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη όταν:

- | | | |
|--|--------------------------------|---|
| i) $f(x) = x \ln \frac{1}{x}$ | ii) $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$ | iii) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$ |
| iv) $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$ | v) $f(x) = x^x$ | vi) $f(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3}{4} x^2, x > 0$ |
| vii) $f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12} - 3x + 1$ | | |

3.399 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης (αν υπάρχουν) όταν:

i) $f(x) = e^x - x + 1$

ii) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

iii) $f(x) = x \cdot \ln x + e^{-x}$

iv) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

v) $f(x) = \ln x + x - 2$

vi) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

vii) $f(x) = \ln^2 x - \ln x + 2$

viii) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ix) $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$

3.400 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της C_f , όταν:

i) $f(x) = \sqrt{x} \ln \sqrt{x}$

ii) $f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{6}$

iii) $f(x) = 2 \sin x + \frac{x^2}{2}, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

iv) $f(x) = x e^{-x^2}$

v) $f(x) = x^2 \ln x$

vi) $f(x) = \ln(\ln x)$

vii) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

viii) $f(x) = x^4 - 6x \ln x^2 - 12$

ix) $f(x) = \frac{1}{4} e^{2x} - 3e^x + 2$

x) $f(x) = (1+x^2)e^{-x}$.

Περιπτώσεις εύρεσης σημείων καμπής για συναρτήσεις με πολλαπλούς τύπους όπου το x_0 είναι σημείο αλλαγής τύπου

Βρίσκω την $f''(x)$ και το πρόσημο αυτής σε κάθε τύπο ξεχωριστά

Αν εκατέρωθεν του x_0 η f'' αλλάζει πρόσημο, εξετάζω αν η C_f δέχεται εφαπτόμενη στο x_0

Ασκήσεις

3.401 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης (αν υπάρχουν) όταν:

i) $f(x) = x \cdot |x|$

ii) $f(x) = |x^2 - 6x|$

iii) $f(x) = x \cdot |x - 1|$

iv) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ x^3 + x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$

v) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ x^2 - 4, & x \geq 1 \end{cases}$

vi) $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x, & x \leq 1 \\ -x^2 + 8x - 4, & x > 1 \end{cases}$

3.402 Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 \cdot \ln|x|$.

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή προς τα κάτω και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης (αν υπάρχουν).

Υπολογισμός παραμέτρων ώστε η C_f να έχει συγκεκριμένο είδος κυρτότητας ή συγκεκριμένα σημεία καμπής.

Όταν ζητείται να βρούμε τις τιμές μιας παραμέτρου, ώστε:

α) Hf να είναι κυρτή στο Δ απαιτούμε $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ ή

Hf να είναι κοίλη στο Δ απαιτούμε $f''(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ (και η f'' να μηδενίζεται σε μεμονωμένα σημεία του Δ)

β) Hf να παρουσιάζει καμπή στο $x_0 \in \Delta$, απαιτούμε $f''(x_0) = 0$ και η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 .

Ασκήσεις

3.403 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(a - \frac{2}{3}\right)x^3 - \left(a + \frac{1}{2}\right)x^2 - 10x + 7$, να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = \frac{3}{2}$ και στη συνέχεια να βρεθεί το σημείο καμπής της C_f

3.404 Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2$, να βρεθούν οι τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σημείο $A(1,3)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

3.405 Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 + (a+b)x + 5$, να βρεθούν οι τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σημείο $A(-1,2)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

3.406 Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x - 3$, να βρεθούν οι τιμές των $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f να παρουσιάζει ακρότατο στο $x_1 = 1$, η C_f έχει καμπή στο $x_2 = -1$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y + 2x - 3 = 0$.

3.407 Έστω η συνάρτηση $f(x) = a \cdot \ln x + bx^2 + \gamma x - 1$, να βρεθούν οι τιμές των $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f έχει σημείο καμπής το σημείο $A(1, -2)$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 3x - y + 5 = 0$.

- 3.408** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2x^3 - (\lambda - 5)x + \lambda^2$, να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία καμπής της είναι κάθετες.
- 3.409** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (1 - 2\alpha)x^2 - \alpha x + \alpha^2$, να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής στο οποίο η εφαπτομένη της C_f , στο σημείο αυτό, να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- 3.410** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, έχει σημείο καμπής το σημείο $M(-2,1)$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .
- 3.411** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - (\alpha + 1)x^2 + 1$, να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- 3.412** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + \alpha$, να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ να είναι συνευθειακά, όπου x_1, x_2 θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f και x_3 θέση σημείου καμπής της C_f .
- 3.413** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \frac{3x^2}{2} + 1$, να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- 3.414** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{\alpha}{6}x^3 + 2x^2 - x + 5$, να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- 3.415** Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = -x^4 + 2\alpha x^3 - 6x^2 + 3x - 1$ να είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

H C_f δεν έχει σημεία καμπής

Για να αποδείξουμε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής

Αποδεικνύουμε ότι η $f''(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο ή

Υποθέτουμε ότι το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής οπότε πρέπει $f''(x_0) = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Ασκήσεις

- 3.416** Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $[f'(x)]^3 + 2f'(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 7$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.
- 3.417** Έστω συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, όπου Δ ανοικτό διάστημα, δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ για την οποία ισχύει: $2x^2 + f^2(x) + x \cdot f(x) - 4f(x) + 5x = 0$ για κάθε $x \in \Delta$, δείξτε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.
- 3.418** Έστω συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, όπου Δ ανοικτό διάστημα, δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ για την οποία ισχύει: $3x^2 + f^2(x) - x \cdot f(x) - 2x = 0$ για κάθε $x \in \Delta$, δείξτε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.
- 3.419** Έστω συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, όπου Δ ανοικτό διάστημα, δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ για την οποία ισχύει: $-2x^2 - f^2(x) - 4x = 0$ για κάθε $x \in \Delta$, δείξτε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.
- 3.420** Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^4 - x^3 + \beta x^2 - x + \alpha\beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha, \beta > \frac{3}{8}$, δείξτε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.
- 3.421** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2\alpha x^3}{3} + \left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}\right)x^2 + (\alpha^3 + 7)x - 5\alpha^2$, δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η C_f δεν έχει σημεία καμπής.
- 3.422** Να αποδείξετε ότι η C_f της συνάρτησης: $f(x) = 2x^4 + 4\alpha x^3 + 3(2\alpha^2 - 4\alpha + 5)x^2 + \alpha x + 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ δεν έχει σημεία καμπής.
- 3.423** Έστω g μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(g(x))^2 = 5g(x) - e^x - \alpha^x + 2005$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $1 \neq \alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι η C_g δεν έχει σημεία καμπής.
- 3.424** Έστω f μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) για την οποία ισχύει: $[f(x)]^2 = 2x(x-2)$, $x \in (\alpha, \beta)$. Να δείξετε ότι η f δεν έχει σημείο καμπής.

Απόδειξη ότι η f είναι κυρτή ή κοίλη σε ένα διάστημα Δ .

Από τη σχέση που δίνεται θα αποδεικνύουμε ότι $f''(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ή $f''(x) \leq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ (και η f'' να μηδενίζεται σε μεμονωμένα σημεία του Δ).

Ασκήσεις

3.425 Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$ και $x_0 \in \Delta$ με $f''(x_0) = 0$ και $f^{(3)}(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta - \{x_0\}$, να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα $(\alpha, x_0]$ και κοίλη στο διάστημα $[x_0, \beta)$.

3.426 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x) < x$ και

$$f'(x) = \frac{x}{x - f(x)} \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να δείξετε ότι:}$$

α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

β) Η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Απόδειξη ανισότητας αν δίνεται ότι η f είναι κυρτή ή κοίλη.

Από τη σχέση που μας δίνεται να αποδείξουμε θα επιλέγουμε δυο διαστήματα στα οποία θα αποδεικνύουμε ότι ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Στη συνέχεια αφού $\xi_1 < \xi_2$ και $f' \uparrow$ ή $f' \downarrow$ θα βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει τα $f'(\xi_1)$ και $f'(\xi_2)$ και αντικαθιστώντας τα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής θα καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Ασκήσεις

3.427 Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι;

α) αν η f στρέφει τα κοίλα άνω, τότε $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$

β) αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω, τότε $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) > \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$

3.428 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν $f'(1) = 2$ και η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι: $f(x) \geq f(1) + 2(x - 1)$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

3.429 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$.

α) Να βρείτε το Π.Ο. A_f της f .

β) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη στο A_f .

γ) Αν $\alpha, \beta \in A_f$, να δείξετε ότι $\ln \frac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{\ln \alpha \cdot \ln \beta}$.

3.430 Α. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και κυρτή στο Δ .

Αν $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha < \beta$, να αποδειχθεί ότι: $f(\alpha) + f(\beta) > 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$.

Β. Να αποδειχθεί ότι:

α) η συνάρτηση $g(x) = x \ln x$ είναι κυρτή στο διάστημα $(0, +\infty)$.

β) $\alpha^\alpha \beta^\beta > \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^{\alpha + \beta}$ για κάθε $0 < \alpha < \beta$

3.431 α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι συνάρτηση $g(x) = \ln 2x + 2x \ln x + x^2 - 3$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = 1$.

δ) Να δείξετε ότι: $x + \ln x > \sqrt{4x - 3}$ για κάθε $x > 1$.

Θεωρητικές.

3.432 Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι αν η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, τότε αυτό είναι και ολικό ελάχιστο της f .

3.433 Για την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , να αποδείξετε ότι δεν είναι δυνατόν η f να έχει στο x_0 τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής.

3.434 Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g κοίλη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) γραφικές τους παραστάσεις θα έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία

β) Αν οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη σε κάποιο κοινό σημείο τους, τότε οι C_f και C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

3.435 Αν μια συνάρτηση είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και για το εσωτερικό σημείο x_0 του Δ ισχύει: $f''(x_0) = 0$ και $f'''(x_0) \neq 0$, να αποδείξετε ότι το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f .

Εύρεση γεωμετρικού τόπου σημείων καμπής της C_f .

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής $M(g(\lambda), f(g(\lambda)))$, θέτουμε $x = g(\lambda)$, $y = f(g(\lambda))$, απαλείφουμε το λ , βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει τα x, y από την οποία προκύπτει και ο γ. τ..

Ασκήσεις

3.436 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων καμπής της C_f της οικογένειας των συναρτήσεων $f_\lambda(x) = 2\lambda e^x - x^2$, $\lambda > 0$

3.437 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - \frac{\lambda x^2}{2}$, $\lambda > 0$

α) Να βρείτε τα σημεία καμπής M της C_f

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών των τετμημένων των σημείων καμπής M της C_f

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων καμπής M της C_f

Διάφορες κατηγορίες.

3.438 Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^4 - 2x^3 + \beta x^2 - x + 1$ με $a, \beta \in \mathbb{R}^*$, αν η C_f έχει δύο σημεία καμπής, δείξτε ότι $2a\beta < 3$.

3.439 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 5ax^4 + 10\beta x^3 + 10\gamma x^2 + 4x - 3$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, αν η C_f έχει τρία σημεία καμπής, δείξτε ότι $a^2 > \beta$

3.440 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - ax^2$, δείξτε ότι για κάθε $a > 0$ η C_f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής από το οποίο διέρχεται η C_g της $g(x) = \frac{1}{2}e^x(2 - x^2)$

3.441 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x \cdot (1 + e^x) - (a + 2) \cdot e^x + 2$, δείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ η C_f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής το οποίο βρίσκεται πάνω στη C_g της $g(x) = 2(1 - e^x) + x$.

3.442 Να αποδείξετε ότι η C_f της συνάρτησης: $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $a \neq 0$ και $\beta^2 = 3a\gamma$ δέχεται στο σημείο καμπής της οριζόντια εφαπτομένη.

3.443 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, δείξτε ότι η C_f έχει τρία σημεία καμπής συνευθειακά

3.444 α) Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0, +\infty)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = \ln(f(x))$, $x \in \Delta$, στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει: $f(x) \cdot f''(x) \geq [f'(x)]^2$ για κάθε $x \in \Delta$.
β) Να βρείτε το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x) = \ln(x^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

3.445 Αν $a > \frac{1}{6e}$, δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + e^x$ έχει ένα τουλάχιστο σημείο καμπής με τετμημένη $x_0 \in (-1, 1)$.

3.446 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x - x \cdot \ln x + x - 1$, $x > 0$

i) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f

ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής με τετμημένη $x_0 \in (1, 2)$

iii) Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2}$

3.447 Αν η συνάρτηση $f(x) = (\alpha - 1) \cdot \eta\mu(x - \alpha) + \frac{\beta}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα

$\Delta \subseteq (0, +\infty)$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (1 - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(x - \alpha) + \beta \cdot \ln x$ στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα Δ .