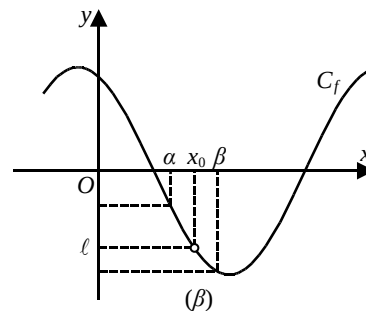
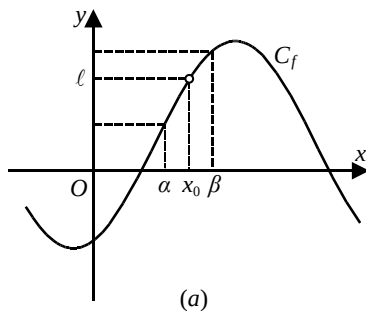


Όριο και διάταξη**ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο**

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και $\ell > 0$, $\ell \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 (Σχ. α)
(το ℓ μπορεί να είναι και $+\infty$)
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και $\ell < 0$, $\ell \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 (Σχ. β)
(το ℓ μπορεί να είναι και $-\infty$)



Το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να απλοποιήσουμε παραστάσεις που έχουν απόλυτες τιμές

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και $\ell > 0$ (ή $\ell = +\infty$) τότε $|f(x)| = f(x)$ «κοντά» στο x_0

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και $\ell < 0$ (ή $\ell = -\infty$) τότε $|f(x)| = -f(x)$ «κοντά» στο x_0

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ τότε για να απλοποιήσω $|f(x)|$ (διώξω το απόλυτο) πρέπει να πάρω πλευρικά όρια. (το x_0 μπορεί να είναι και $\pm \infty$)

Άμεση συνέπεια: Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και $k \neq \ell$ για κάποιο $k \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) \neq k$ «κοντά» στο x_0

Παράδειγμα: Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - k}{f(x) + k} = 0$ να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k$

Απόδειξη:

Θέτω $g(x) = \frac{f(x) - k}{f(x) + k}$ είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ οπότε $[1 - g(x)] \cdot f(x) = kg(x) + k$ (1) επειδή

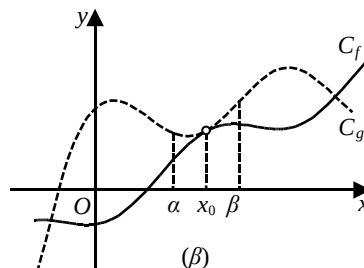
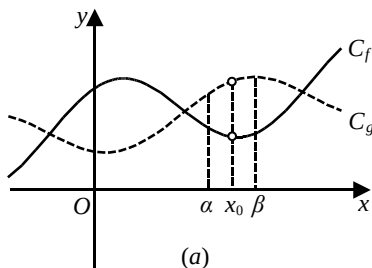
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ είναι $g(x) \neq 1$ «κοντά» στο x_0 άρα απο (1) έχουμε $f(x) = \frac{kg(x) + k}{1 - g(x)}$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{k \cdot 0 + k}{1 - 0} = k$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

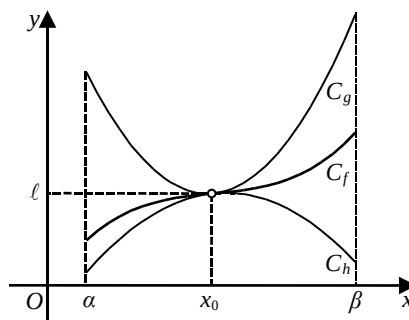
Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ «κοντά στο x_0 », τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$



Κριτήριο παρεμβολής

Υποθέτουμε ότι «κοντά στο x_0 » μια συνάρτηση f “εγκλωβίζεται” ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις h και g . Αν, καθώς το x τείνει στο x_0 , οι g και h έχουν κοινό όριο ℓ , τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, η f θα έχει το ίδιο όριο ℓ .



ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$. (το x_0 μπορεί να είναι και $\pm \infty$)

Παρατήρηση: Απαραίτητη προϋπόθεση να υπάρχουν και να είναι ίσα τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$.

Άμεση συνέπεια: Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ διότι $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ όμως $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} (-|f(x)|) = 0$ άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

Προσοχή!!! Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \ell$, $\ell \neq 0$ τότε δεν είναι σίγουρο ότι το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει

Αντιπαράδειγμα: $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$, είναι $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1$ ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Ασκήσεις

- 2.170** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει: $3x - 2x^2 \leq f(x) - 3 \leq 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 2.171** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $3x^2 - |x - 1| \leq f(x) \leq 3x^3 + 2(x - 1)^2$ για κάθε $x \in (0, 2)$ να βρεθεί, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- 2.172** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει: $\frac{x^3 + 4x^2 + 3x}{x^2 + 2x - 3} \leq f(x) \leq \frac{2(9 - x^2)}{3x^2 + 10x + 3}$, για κάθε $x \in (-4, -3) \cup (-3, -2)$, να βρεθεί, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$.
- 2.173** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει: $\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \leq f(x) \leq \frac{1 - x}{x^2 - 4x + 3}$, για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$, να βρεθεί, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- 2.174** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει: $\eta\mu x - x^2 \leq xf(x) \leq x + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 2.175** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει: $x - x^2 \leq f(x) \leq x + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$
- 2.176** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει: $xf(x) \geq \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- 2.177** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει: $x^2 f(x) \leq x^2 - \eta\mu^2 x \leq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- 2.178** Αν $\eta\mu(ax) \leq \eta\mu(\beta x) + \eta\mu(\gamma x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι: $\alpha = \beta + \gamma$.
- 2.179** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει: $\frac{f(x) - x}{f(x) + x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Όριο σύνθετης συνάρτησης.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0 ,

τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.

2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και

3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ , δηλαδή ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Στη συνέχεια τα όρια της μορφής $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ με τα οποία θα

ασχοληθούμε θα είναι τέτοια, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη: « $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 » και γι αυτό δεν θα ελέγχεται.

Άμεση συνέπεια: Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ με $f(x) \neq 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{f(x)} = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - 1}{f(x)} = 0$$

Ασκήσεις

2.180 Να αποδείξετε ότι:

α) Αν η f είναι άρτια συνάρτηση τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -x_0} f(x)$

β) Αν η f είναι περιττή συνάρτηση τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = - \lim_{x \rightarrow -x_0} f(x)$

γ) Αν g είναι άρτια συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left[g(x) + \frac{1}{x+3} + \frac{6}{x^2-9} \right] = \frac{11}{6}$$

Όρια που μετατρέπονται ώστε να εφαρμόζεται το κριτήριο παρεμβολής.

Αν έχουμε να βρούμε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$ και γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και για τη

συνάρτηση g ισχύει $|g(x)| \leq M$ για κάποιο $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, «κοντά στο x_0 » τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0 \text{ διότι } |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M \cdot |f(x)| \text{ «κοντά στο } x_0 \text{»}$$

Άρα $-M \cdot |f(x)| \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot |f(x)|$ «κοντά στο x_0 »

Ομως $\lim_{x \rightarrow x_0} (M \cdot |f(x)|) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} (-M \cdot |f(x)|) = 0$ άρα, σύμφωνα με το κριτήριο

παρεμβολής, έχουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$

Ειδικά:

Όταν έχουμε να βρούμε όρια της μορφής $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{g(x)}$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{g(x)}$ όπου

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (δηλαδή προκύπτει αποτέλεσμα $0 \cdot \eta\mu \frac{1}{0}$ ή $0 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{0}$) θα παίρνω

κανόνα παρεμβολής χρησιμοποιώντας την ανισωτική σχέση $|\eta\mu x| \leq 1$ και $|\sigma\upsilon\nu x| \leq 1$ ισχύει επίσης $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$.

Πράγματι, για $x \neq 0$ έχουμε $\left| x \eta\mu \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x|$,

οπότε $-|x| \leq x \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x|$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, έχουμε:

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$.

Ασκήσεις

2.181 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$\left| x \cdot f(x) - \eta\mu^2 x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq x^2.$$

2.182 Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες σε σύνολο της μορφής $U(0, \alpha)$, αν για κάθε $x \in U(0, \alpha)$ ισχύει: $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 2x \cdot f(x)$, να υπολογιστούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

2.183 Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|x f(x) - \eta\mu 2x| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να βρεθεί (αν υπάρχει) το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2.184 Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -1} \left[(x^2 - 1) \cdot \eta\mu \frac{4}{x+1} \right] \qquad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^3 - 1) \cdot \eta\mu \frac{2}{x-1} + x^{1995} + 1 \right]$$

2.185 Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$x^2 \cdot (f(x))^2 + (g(x))^2 \leq x^4 \cdot \eta\mu^2 \left(\frac{\pi}{x} \right), \text{ να υπολογιστούν τα όρια: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

2.186 Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x) - x \leq x^2 \leq f(x+1) - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Όρια συναρτήσεων που εμπλέκονται σε άλλα όρια

Όταν γνωρίζω το όριο κάποιας παράστασης που περιέχει μια συνάρτηση f της οποίας ψάχνω το όριο εργάζομαι ως εξής:

α) Αν από την εκφώνηση είναι δεδομένο ότι το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει (π.χ. να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ εφόσον υπάρχει στο $\mathbb{R}$) τότε εφαρμόζω ιδιότητες ορίων.

β) Αν δεν είναι δεδομένο ότι το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει τότε:

1. Θα θέτω την παράσταση ίση με μια συνάρτηση
2. Θα λύνω την ισότητα ως προς $f(x)$
3. Θα βρίσκω το όριο της παράστασης με την οποία ισούται η συνάρτηση $f(x)$.

Το ίδιο κάνω και όταν έχω δύο συναρτήσεις με τη διαφορά ότι έχω να λύσω σύστημα.

Ασκήσεις

2.187 Αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 11x}{6x^2 - 54} = 9$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

2.188 Αν $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) + 9}{x - 5} = 12$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$.

2.189 iii) Αν $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - 2x^2 + 5x + 1] = 4$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

2.190 Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - x^2}{x + \eta\mu 2x} = 1$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2.191 Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{x+1} - 1] \cdot g(x) = 4$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)]$.

2.192 Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 5$ και $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x) \cdot (2x^2 + x - 10)] = 3$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \cdot g(x)]$.

2.193 Αν $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 2g(x)) = 5$ και $\lim_{x \rightarrow 2} (3f(x) + g(x)) = 6$ να βρεθούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

2.194 Αν $\lim_{x \rightarrow 1} (5f(x) + g(x)) = 11$ και $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 4g(x)) = -2$ να βρεθούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

2.195 Εάν $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 11}, & x \leq 2 \\ 3x - 1, & x > 2 \end{cases}$ και $g(x) = \frac{f(x) + 5}{f^2(x) - 15}$ να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

2.196 Εάν $f(x) = \frac{\lambda\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$ και $g(x) = \frac{\eta\mu 2x - x}{x}$

i) Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

ii) Εάν $\lambda = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $[\lim_{x \rightarrow 0} f(x)]^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2.197 Αν υπάρχουν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha \cdot \eta\mu x + \beta \cdot \eta\mu 2x + \gamma \cdot \eta\mu 3x \leq \eta\mu 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε θα ισχύει:
 $\alpha + 2\beta + 3\gamma = 4$.

2.198 Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{\eta\mu x} = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-1}{\eta\mu x} = \beta$,
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$, υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot g(x) - 1}{\eta\mu x}$.

2.199 Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$x^2 \cdot (f(x))^2 + (g(x))^2 \cdot \eta\mu^2 x \leq x^3 \cdot \eta\mu^2 \left(\frac{\pi}{x} \right), \text{ να υπολογίσετε τα } \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

2.200 Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot \eta\mu x - x \cdot f(x)}{2x} = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot \eta\mu x + x \cdot f(x)}{2\eta\mu x} = 1, \text{ υπολογίστε τα όρια } \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

2.201 Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

η f είναι **άρτια**

η g είναι **περιττή**

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x)}{x^2 + 4x} = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1 - \sqrt{x+5}}{g(x)} = 2, \text{ βρείτε το όριο } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Εύρεση παραμέτρων

Σε περιπτώσεις στις οποίες ψάχνουμε την τιμή παραμέτρων ώστε να υπάρχει και να είναι **πραγματικός αριθμός** το όριο κάποιας συνάρτησης της οποίας το όριο του **παρονομαστή** είναι 0 εργαζόμαστε ως εξής:

1. Απαιτώ το όριο του αριθμητή να είναι μηδέν έτσι προκύπτει μια εξίσωση με τις παραμέτρους (θέτοντας τον αριθμητή ίσο με μια συνάρτηση της οποίας βρίσκω το όριο ίσο με μηδέν, πρέπει δηλαδή τα όρια για τον αριθμητή που βρίσκω με τους δύο διαφορετικούς τρόπους να είναι ίσα).

2. Παραγοντοποιώ και απλοποιώ τους παράγοντες $x - x_0$ που προκύπτουν.

(αν έχω τριγωνομετρικούς αριθμούς συνήθως διαιρώ με κατάλληλη παράσταση ή «σπάω» το κλάσμα ώστε να έχω όρια της μορφής $\frac{\eta\mu ax}{x}$ ή $\frac{\epsilon\phi ax}{x}$ ή $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigmaυνα x - 1}{x}$)

3. Από τη ισότητα με το όριο που βρίσκω, μετά την απλοποίηση, προκύπτει δεύτερη εξίσωση για τις παραμέτρους.

4. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων που προέκυψαν βρίσκω τις τιμές των παραμέτρων.

Σημείωση: Αν έχω περισσότερες από δύο παραμέτρους εφαρμόζω τα παραπάνω δύο ή και περισσότερες φορές.

Ασκήσεις

2.202 Έστω συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 + \alpha x + 2\beta - 10}{x^2 - 4}$, να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{19}{4}.$$

2.203 Αν $f(x) = \frac{\alpha |x + 2| + \beta |x - 4| - 2}{x^2 - 5x + 6}$ να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10.$$

2.204 Αν $f(x) = \frac{x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(x - 2)^2}$ να υπολογιστούν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

2.205 Αν $f(x) = \frac{2x + \lambda \eta \mu x}{|x|}$, να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2.206 Αν $f(x) = \frac{\alpha x^4 + \beta x^5 - 5}{x - 1}$, να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

2.207 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\lambda - 2) \cdot |x - 7| + x^2 - 49}{x - 7}$, να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$.

2.208 Αν για την συνάρτηση f ισχύει $f(x + 2) = x^2 + 4x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 3}{f(x)}$.

2.209 Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1} = 3$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 1}{x - 1}$.

2.210 Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\alpha x^2 + 3x}{x - 2} + \beta x \right) = 3$.

2.211 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + \beta - 1}{x - 1}, & x < 1 \\ \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$

Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

2.212 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 3} - \alpha + 1}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$

Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

2.213 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x}{x^2 - 4} = 4$

Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 4\alpha}{x^2 - 4}$ να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός