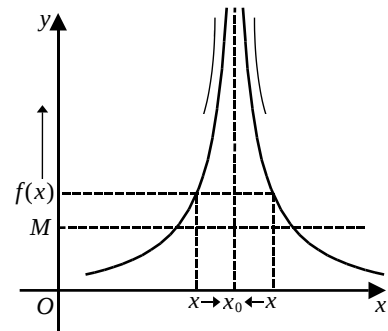


ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ x_0

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0 .

Παρατηρούμε ότι, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$ πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0 , οι τιμές $f(x)$ αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό M .

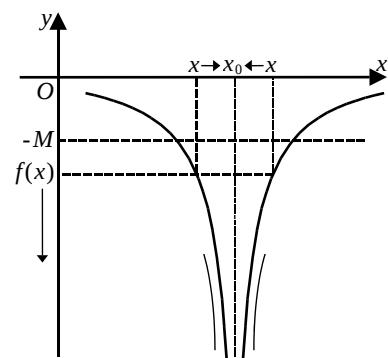
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $+\infty$ και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.



Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0 .

Παρατηρούμε ότι, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$ πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0 , οι τιμές $f(x)$ ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό $-M$ ($M > 0$).

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $-\infty$ και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.



Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \end{aligned}$$

Ισχύουν επίσης οι παρακάτω ιδιότητες:

• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , ενώ
αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$, ενώ
αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$.

• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

• Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές έχουμε:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty$ αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^{2v}} = +\infty$, $v \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty$ αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{(x - x_0)^{2v+1}} = +\infty$, $v \in \mathbb{N}$

ενώ

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty$ αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{(x - x_0)^{2v+1}} = -\infty$, $v \in \mathbb{N}$

Επομένως, δεν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v+1}}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^{2v+1}}$, $v \in \mathbb{N}$.

Το κριτήριο παρεμβολής στο μη πεπερασμένο όριο

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ (ή $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$) και ισχύει $g(x) \geq f(x)$ κοντά στο x_0 (ίσως $x_0 = \pm\infty$) τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ (ή $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = +\infty$)
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ (ή $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$) και ισχύει $h(x) \leq f(x)$ κοντά στο x_0 (ίσως $x_0 = \pm\infty$) τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = -\infty$ (ή $\lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x) = -\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) = -\infty$)

Παράδειγμα: Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^2 \cdot f(x) - 1 \geq 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f(x) \geq \frac{1}{x^2}$, επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

Απροσδιόριστες μορφές

$$(+\infty)+(-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad (+\infty)-(+\infty), \quad (-\infty)-(-\infty), \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 0^0, \quad 1^\infty$$

Για να υπολογίσουμε όρια της μορφής “αριθμός προς μηδέν” εργαζόμαστε ως εξής:

1. Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή.
2. Απομονώνουμε την παράσταση $(x - x_0)^k$ που μηδενίζει τον παρονομαστή.
3. Παίρνουμε πλευρικά όρια αν κ περιττός **Η** Υπολογίζουμε το όριο αν κ άρτιος.

Ασκήσεις

2.214 Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν):

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 1}{(x-1)^2} & \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{(x-3)^3(x+1)} \\ \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{x^2 - 2x + 1} & \text{iv) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^3 + x^2} \\ \text{v) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)(x^2 - 4x + 4)} & \text{vi) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(x + \frac{x-1}{|x^3 - 3x^2 + 3x - 1|} \right) \end{array}$$

2.215 Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν):

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 - x + 1} & \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^4} & \text{iv) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x\sqrt{x}} \\ \text{v) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 6x + 9} & \text{vi) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{(\sqrt{x+1})(x+1)^3} \end{array}$$

2.216 Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν):

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{-x^2 + 11x - 10} + x}{|x-6| - 4} & \text{ii) } \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\eta\mu 4x - \eta\mu x + 2}{\sigma\upsilon\nu^5 x} \\ \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 5x + 3}{\sqrt{4x^2 - 24x + 36}} & \text{iv) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu x + 3}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \\ \text{v) } \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{\frac{8 + 7x - x^2}{2x - 3\sqrt{x} - 2}} & \text{vi) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sigma\upsilon\nu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 9x}{\eta\mu 2x + 4\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x - 2} \end{array}$$

2.217 Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν):

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\eta \mu x} + \sigma \varphi x \right)$$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 - |\varepsilon \varphi 2x + 1|}{\eta \mu^2 x + 2\eta \mu x - 3}$$

$$\text{iii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta \mu^2 x}$$

$$\text{iv)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \nu^2 x + \eta \mu x + 2}{2\varepsilon \varphi x}$$

2.218 Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν):

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$$

$$\text{iii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 15}{1 - \sigma \nu x}$$

$$\text{iv)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 2x}{\varepsilon \varphi x}$$

$$\text{v)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x + 3| - 7}{x - 5\sqrt{x} + 6}$$

2.219 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{2} \cdot \eta \mu x - 1}{\varepsilon \varphi x - 1}$ να βρεθούν τα όρια (αν υπάρχουν)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x)$$

Σε περιπτώσεις στις οποίες μηδενίζεται ο παρονομαστής και ο αριθμητής περιέχει παραμέτρους, εργαζόμαστε ως εξής:

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το όριο του αριθμητή.

- Εάν το όριο του αριθμητή είναι μηδέν έχουμε μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ βρίσκουμε το όριο όπως έχουμε μάθει (παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή κ.λ.π.)
- Εάν το όριο του αριθμητή είναι διάφορο του μηδενός εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη ομάδα ασκήσεων.

2.220 Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\kappa x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - \lambda + \kappa}{|x - 1|}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + 3\kappa x^2 + \lambda x + \kappa - 1}{|x^3 - 6x^2 + 3x + 10|}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\kappa x^2 + \lambda x + \lambda + 1}{x - 1}$$

$$\text{v) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\kappa \sqrt{x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{vi) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\kappa + 1)x + \sqrt{x^4 + x^2 + 2}}{\kappa x^2 - \kappa x}$$

$$\text{vii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 4} - (\kappa x + 2)}{x^3}$$

$$\text{viii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - \lambda}{|x - 2|}$$

Διάφορες περιπτώσεις.

2.221 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x + 1}{f(x)} = +\infty$

2.222 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\kappa x + \kappa^2 - 8}{x + 2}, & x < -2 \\ \frac{4 - 8x - \kappa^2 x^2}{x^2 - 4}, & x > -2 \end{cases}$

Να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$.

2.223 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x} - 2}$, και $g(x) = x + 3$.

i) Να οριστεί η συνάρτηση $h = f \circ g$

ii) Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$

2.224 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ αν $\lim_{x \rightarrow 2} \left(f(x) \cdot \frac{\eta \mu(x - 1)}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} \right) = -\infty$

2.225 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\eta \mu x - 5x}{(x^2 + 2x) \cdot f(x)} = -\infty$

2.226 Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + 5x^2 + 4}{6f(x)} = +\infty$ και η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται για $x \in U(2, \alpha)$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

2.227 Αν $k \in \mathbb{R}^*$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(k-2)(\sin 2x - 1)}{kx^5}$

2.228 Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - \mu x^3 + \mu + 5}{\eta \mu^2 x}$ για τις διάφορες τιμές του μ , $\mu \in \mathbb{R}$.

2.229 Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x}{x - 2} = 4$. Για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $g(x) = \frac{xf(x) - 3\lambda - \lambda^2}{x^2 - 4}$ έχει στο $x_0 = 2$ όριο $L \in \mathbb{R}$. Ποιο είναι τότε το L ;

2.230 Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{\pi}{x} \right) = 0$

2.231 Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot \eta \mu x}{\sqrt{x+1} - 1} = -\infty$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2.232 Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + kx + 2}{2x - 3}, & x < \frac{3}{2} \\ \frac{x^3 + kx + m}{2x^2 - 7x + 6}, & \frac{3}{2} < x < 2 \\ \frac{-k}{x^2 - 4}, & x > 2 \end{cases}$

Αν $m = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x^2 + x) \sin x}{x^2 - x}$ να βρεθούν οι τιμές των k, m ώστε

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty.$$