

Κανόνες de L' Hospital

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
(πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
(πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Παρατηρήσεις:

1. Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.
2. Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.
3. Με την βοήθεια των παραπάνω θεωρημάτων και κατάλληλους μετασχηματισμούς αντιμετωπίζονται και όρια που έχουν απροσδιόριστες μορφές:
 $0 \cdot (\pm\infty)$, $((+\infty) - (+\infty))$, 0^0 , $1^{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$
4. Στην εφαρμογή των θεωρημάτων de L' Hospital δεν πρέπει γίνεται σύγχυση μεταξύ των
πηλίκων $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ και $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'$

Προσοχή!!!

Πρέπει να **υπάρχει** το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ για να εφαρμόσουμε κανόνες de L' Hospital.

Αν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε χρησιμοποιούμε κλασικό υπολογισμό ορίου.

Παράδειγμα: για τον υπολογισμό του ορίου $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta \mu \frac{1}{x}}{\eta \mu x}$ χρησιμοποιούμε κλασικό υπολογισμό ορίου και δεν παίρνουμε τους παραπάνω κανόνες.

Εύρεση ορίων με κανόνες de L' Hospital

1. Μορφή: $\frac{0}{0}$

Διαπιστώνουμε ότι το όριο αριθμητή και παρονομαστή είναι μηδέν οπότε έχουμε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$.

Εφαρμόζουμε το 1^ο Θεώρημα de L' Hospital, εφόσον υπάρχει το όριο του λόγου των παραγώγων αριθμητή και παρονομαστή.

Αν έχουμε πάλι απροσδιοριστία επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα.

2. Μορφές: $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$

Διαπιστώνουμε ότι το όριο αριθμητή και παρονομαστή είναι $\pm \infty$, οπότε έχουμε απροσδιοριστία $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$.

Εφαρμόζουμε το 2^ο Θεώρημα de L' Hospital, εφόσον υπάρχει το όριο του λόγου των παραγώγων αριθμητή και παρονομαστή.

Αν έχουμε πάλι απροσδιοριστία επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα.

3. Μορφές: $((+\infty) - (+\infty))$, ή $((-\infty) - (-\infty))$

Προκύπτουν απο το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$, όπου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ ή

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$

Βγάζω κοινό παράγοντα μια από τις δυο συναρτήσεις ώστε να προκύψει πηλίκο

• Εκτελούμε τις πράξεις στην $f(x) - g(x)$ ή

• Βγάζουμε κοινό παράγοντα μια από τις δυο συναρτήσεις ώστε να προκύψει πηλίκο

δηλαδή: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right]$ ή

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right]$

4. Μορφές $0 \cdot (\pm \infty)$

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$, τότε για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$ κάνουμε το μετασχηματισμό:

$f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, μορφή $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$ ή $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, μορφή $\frac{0}{0}$.

5. Μορφές 0^0 , $1^{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$

Αυτές οι μορφές εμφανίζονται σε όρια συναρτήσεων της μορφής $h(x) = [f(x)]^{g(x)}$ οι οποίες γράφονται: $h(x) = [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ και υπολογίζουμε το όριο του εκθέτη δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \cdot \ln f(x)]$

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν τα όρια: $\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k}$ $\beta) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^k \cdot \ln x)$, $k > 0$

Λύση:

$$\alpha) \text{ Για } k > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^k)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{k \cdot x^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{k \cdot x^k} = 0$$

$$\begin{aligned} \beta) \text{ Για } k > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^k \cdot \ln x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-k}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-k})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-k \cdot x^{-k-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{k \cdot x^{-k}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{k} x^k \right) = 0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$

Λύση:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) \right] = (+\infty) \cdot (1 - 0) = +\infty \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Παράδειγμα 3

Να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{P(x)} = +\infty$, $\alpha > 0$, όπου $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0$, με

$\alpha_v \neq 0$ πολυωνυμική συνάρτηση.

Λύση:

Για $\alpha > 0$ είναι:

$$P'(x) = v \cdot \alpha_v x^{v-1} + (v-1) \cdot \alpha_{v-1} x^{v-2} + \dots + \alpha_1$$

$$P''(x) = v \cdot (v-1) \cdot \alpha_v x^{v-2} + (v-2) \cdot (v-1) \cdot \alpha_{v-1} x^{v-3} + \dots + \alpha_2$$

.....

$$P^{(v)}(x) = v \cdot (v-1) \cdot (v-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot \alpha_v = \alpha_v \cdot v! \quad \text{όπου} \quad v! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (v-2) \cdot (v-1) \cdot v$$

$$\text{και} \quad (e^{\alpha x})' = \alpha \cdot e^{\alpha x}, \quad (e^{\alpha x})'' = \alpha^2 \cdot e^{\alpha x}, \dots, \quad (e^{\alpha x})^{(v)} = \alpha^v \cdot e^{\alpha x}$$

$$\text{άρα} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{\alpha x})' \cdot \frac{+\infty}{+\infty}}{(P(x))'} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{\alpha x})^{(v)}}{(P(x))^{(v)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^v \cdot e^{\alpha x}}{\alpha_v \cdot v!} = +\infty$$

Παράδειγμα 4

$$\text{Να βρεθεί το όριο} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$$

Λύση:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) \stackrel{0 \cdot (+\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x} \right)'}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

Παράδειγμα 5

$$\text{Να βρεθεί το όριο} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x), \quad x > 0$$

Λύση:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x) \stackrel{0^0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \ln x} = e^0 = 1 \quad \text{διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

Παράδειγμα 6

$$\text{Να βρεθεί το όριο} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(1+2x)^{\frac{1}{x}} \right]$$

Λύση:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(1+2x)^{\frac{1}{x}} \right] \stackrel{(+\infty)^0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(1+2x)}{x}} \text{ το όριο του εκθέτη είναι:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(1+2x)]'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+2x)'}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+2x} = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(1+2x)^{\frac{1}{x}} \right] \stackrel{(+\infty)^0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(1+2x)}{x}} = e^0 = 1$$

Παράδειγμα 7

$$\text{Να βρεθεί το όριο } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(1+2x)^{\frac{1}{x}} \right]$$

Λύση:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(1+2x)^{\frac{1}{x}} \right] \stackrel{1^{(+\infty)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(1+2x)}{x}} \text{ το όριο του εκθέτη είναι:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln(1+2x)]'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+2x)'}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{1+2x} = 2$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(1+2x)^{\frac{1}{x}} \right] \stackrel{1^{(+\infty)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(1+2x)}{x}} = e^2$$

Παράδειγμα 8

$$\text{Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης } f \text{ στο } +\infty \text{ με } f(x) = x^{\frac{x+1}{x}} \cdot (\sqrt{x^2+1} - x), \quad x > 0.$$

Λύση:

Η f ορίζεται στο $(0, +\infty)$ επομένως έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου της στο $+\infty$.

$$\text{Για } x > 0, \text{ έχουμε: } x^{\frac{x+1}{x}} = e^{\frac{x+1}{x} \ln x} \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x =$$

$$= 1 \cdot (+\infty) = +\infty. \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x+1}{x} \ln x} = +\infty.$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1 \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Έτσι οδηγούμαστε σε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) \cdot 0$.

Εργαζόμαστε λοιπόν ως εξής: $x^{\frac{x+1}{x}} = x^{1 + \frac{1}{x}} = x \cdot x^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x \cdot x^{\frac{1}{x}} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} [x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)] = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = e^0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Παράδειγμα 9

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης f στο $+\infty$ με $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^{\frac{1}{x}}$.

Λύση:

Επειδή πρέπει $x \neq 0$ και ισχύει $x^2 - 2x + 3 > 0$, ($\Delta = -8 < 0$) το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{0\}$. Άρα έχει νόημα λοιπόν η αναζήτηση του ορίου της f στο $+\infty$.

$$\text{Έχουμε } f(x) = (x^2 - 2x + 3)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x^2 - 2x + 3)}{x}}, \quad x \neq 0.$$

$$\text{Θα βρούμε αρχικά το όριο της συνάρτησης } g(x) = \frac{\ln(x^2 - 2x + 3)}{x} \text{ στο } +\infty.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 2x + 3) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$$

$$(\text{θέσαμε } y = x^2 - 2x + 3, \text{ οπότε όταν } x \rightarrow +\infty \text{ τότε και } y \rightarrow +\infty) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του de L' Hospital και έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 2x + 3)}{x} &\stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2 - 2x + 3} \cdot (x^2 - 2x + 3)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x^2 - 2x + 3)}{x}} = e^0 = 1.$$

Παράδειγμα 10

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 3 \\ \frac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$

Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{1}{9}$.

Λύση:

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 3)$ ως πολωνυμική και στο $(3, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών.

Άρα για να είναι η f συνεχής θα πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0 = 3$

Επομένως πρέπει: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$.

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-e^{x-3}}{x-3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(1-e^{x-3})'}{(x-3)'} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-e^{x-3}) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (\alpha x^2) = 9\alpha, \quad f(3) = 9\alpha.$$

$$\text{Άρα: } 9\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{9}.$$

Ασκήσεις

3.464 Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta \mu x}{x^3}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\eta \mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^x - \ln(x+1)}{x}$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{\sin x - 1}$

vi) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x)$

vii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \ln x}{x-1}$

viii) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

ix) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1-x} - 2 - x}{1 - \sin x}$

3.465 Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln x}{x + \ln x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 \cdot e^{-x})$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k}$

v) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{e^{1/x}}$

vi) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\eta \mu x} \right)$

vii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \phi x - x}{x - \eta \mu x}$

viii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{\ln x} - x}{\ln x}$

ix) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-4x}}{\ln(x+1)}$

3.466 Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta \mu x} - \frac{1}{x^2 - x} & \text{ii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{1}{x} + x \right) & \text{iii)} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) \\ \text{iii)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right) & \text{iv)} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x & \text{v)} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{x}} \\ \text{vi)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

Χρησιμοποίηση των κανόνων de L' Hospital για αποδείξεις, υπολογισμό ασυμπτώτων, παραμέτρων, κλπ.

3.467 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f όταν:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} f(x) = \frac{\ln x}{x} & \text{ii)} f(x) = x^2 \cdot \ln x & \text{iii)} f(x) = \frac{e^x}{x} \\ \text{iv)} f(x) = x^2 \cdot e^{-x} & \text{v)} f(x) = x e^{\frac{1}{x^2}}. \end{array}$$

3.468 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, δείξτε ότι f συνεχής και $f'(0) = 0$.

3.469 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 2\eta \mu x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$, δείξτε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0, -1)$ είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 2x + y - 3 = 0$

3.470 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1, & x \leq 0 \\ x^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$, να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f και η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$

3.471 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{2^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ \ln 2, & x = 0 \end{cases}$. Να δείξετε ότι $f'(0) = \frac{1}{2} \ln^2 2$.

3.472 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x}, & 0 < x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{array}{ll} \alpha) \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής} & \beta) f'(1) = -\frac{1}{2}. \end{array}$$

3.473 Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) + e^{\eta\mu x} = f(x)\eta\mu x + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την $f(0)$.

3.474 Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(1 - \sin x)f(x) = \ln(1+x) - x$ για κάθε $x > -1$. Να βρείτε την $f(0)$.

3.475 Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^x - \beta x}{x^2} = 12 \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \alpha) \cdot e^x - (1 + \alpha) \cdot x + \beta}{x^2} = 2$$

3.476 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x + \alpha x - \beta, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{1}{e^x} \ln(-x) + \alpha, & x < 0 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

3.477 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες στο x_0 όταν:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \alpha e^x - 1, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \beta \sin x, & x > 0 \end{cases} \text{ και } x_0 = 0. \quad \beta) f(x) = \begin{cases} \ln x + \alpha - 1, & x > 1 \\ e^{x-1} + \beta x - \beta, & x \leq 1 \end{cases} \text{ και } x_0 = 1.$$

3.478 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \cdot e^x + \alpha, & x \leq 0 \\ \beta x - x^2 \cdot \ln x, & x > 0 \end{cases}$, να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

3.479 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot e^x + 1, & x \leq 0 \\ \eta\mu 2x - \beta + 3, & x > 0 \end{cases}$, να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

3.480 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (\alpha - 1) \cdot e^x - 1, & x \leq 0 \\ \eta\mu 2x - \beta, & x > 0 \end{cases}$, να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

3.481 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha + e^x, & x \leq 1 \\ \eta\mu(\pi x) + \beta x + 2, & x > 1 \end{cases}$, να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η

συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Εύρεση ορίου και συνέχειας παραγώγων.

Αν για το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ισχύουν οι προϋποθέσεις των Θεωρημάτων De L' Hospital και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \text{ πρέπει οι } f' \text{ και } g' \text{ να είναι συνεχείς στο } x_0.$$

Όταν δεν δίνεται ότι είναι συνεχείς στο x_0 , από τον ορισμό της παραγώγου θα αποδεικνύουμε

$$\text{ότι: } \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0) \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g'(x) = g'(x_0).$$

Ασκήσεις

3.482 Έστω συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f'' συνεχή στο $\mathbb{R}$, να δείξετε

$$\text{ότι: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

3.483 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' συνεχή στο $\mathbb{R}$, αν $f'(0) = f(0) + 1 = 1$

$$\text{να υπολογίσετε το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(x)}{1 - \sin x}$$

3.484 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' συνεχή στο $\mathbb{R}$, αν $f'(3) = f(3) = 1$ να

$$\text{υπολογίσετε το } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) - 1}{x - 3}$$

3.485 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' συνεχή στο $\mathbb{R}$, αν

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} > 0 \text{ δείξτε ότι η συνάρτηση } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα.}$$

3.486 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' συνεχή στο $x_0 = 1$, αν $f'(1) \neq 0$,

$$\text{δείξτε ότι το όριο } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot \eta\mu \frac{\pi x}{2} - f(1)}{f(x) \cdot \sin(\pi x) + f(1)} \text{ δεν εξαρτάται από τη συνάρτηση } f$$

3.487 Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{(x+1) \cdot f''(x)} = 2. \text{ Δείξτε ότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x+1) \cdot f'(x)} = \frac{2}{3}$$

3.488 Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(0) = 2$ και $f(0) = f'(0) = 0$.

α) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$

β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{\eta \mu x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}. \text{ Είναι η συνάρτηση } g'(x) \text{ συνεχής στο } x_0 = 0;$$

3.489 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν $f'(0) = f(0) = 0$, να βρείτε

$$\text{το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + f(x)}{x \cdot f'(x)}.$$

3.490 Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'''(x)}{xf''(x)} = 2.$$

$$\text{Να υπολογίσετε το } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{xf'(x)}.$$

3.491 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής για την οποία ισχύει: $x \cdot f(x) = e^x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης και τα διαστήματα μονοτονίας

ii) Να δείξετε ότι η f' είναι συνεχής

iii) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$

3.492 Σε ένα διάλογο μέσα στην τάξη τέθηκε από μαθητή το εξής ερώτημα:
«Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) τότε η f' είναι
συνεχής σ' αυτό το διάστημα».

Δικαιολογήθηκε από τον ίδιο το μαθητή ως εξής:

«Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) τότε για το τυχαίο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1) \text{ και χρησιμοποιώντας τον κανόνα De L' Hospital}$$

$$\text{παίρνουμε: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \quad (2).$$

Από (1), (2) έχουμε $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$, άρα η f' είναι συνεχής στο σημείο x_0 ».

α) Βρείτε το λάθος στην απόδειξη του μαθητή.

$$\beta) \text{ Ελέγξτε με τη βοήθεια της συνάρτησης } f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ αν ο ισχυρισμός}$$

του μαθητή ευσταθεί.

Διάφορες περιπτώσεις.

3.493 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
 $f^2(x) + 2f(-x) \cdot \eta \mu x = -\ln(1 + x^2)$. Να βρείτε τον αριθμό $f'(0)$.

3.494 Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία
 $y = 5x + 1$, να βρεθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot f(x) - 3x^2 + x \cdot \eta \mu x}{x^2 \cdot f(x) - 5x^3}$.

3.495 Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(0) = \frac{3}{2}$ και $f(0) = f'(0) = 0$.

$$\text{Να αποδειχθεί ότι: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{1 - \sigma \upsilon \nu x} = 3.$$

3.496 Αν $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + f'(x)] = L \neq 0$, να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.

3.497 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \in \mathbb{R}^*$$

$$\beta) \text{ υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow \infty} (xf'(x)) = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}. \text{ Να αποδειχθεί ότι } \lim_{x \rightarrow \infty} (xf''(x)) = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}.$$

3.498 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

$$\text{Να αποδείξετε ότι: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 3f(x) + 2f(x-h)}{h^2} = 3f''(x).$$

- 3.499** Έστω οι συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) + x + \ln(x+1) - \ln x$ για κάθε $x > 0$.
Αν η ευθεία $\psi = x+3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.
- 3.500** Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η $g(x) = xf(e^{-x})$. Αν η ευθεία $\psi = 2x+1$ εφάπτεται της C_f στο $x_0 = 0$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.