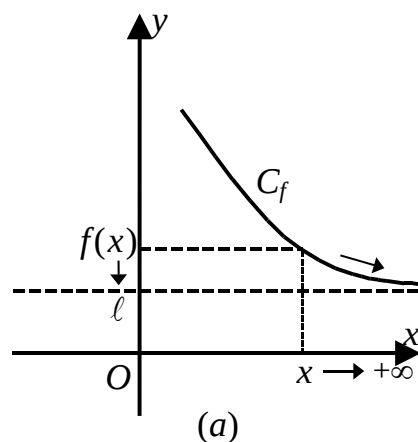


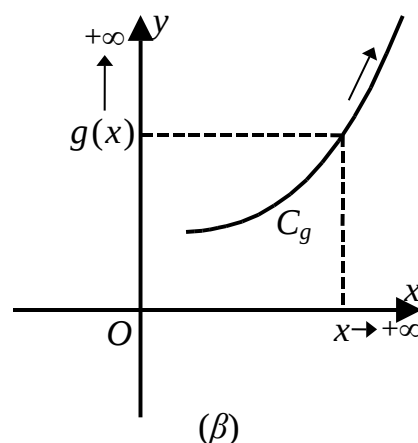
◆ ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Στα παρακάτω σχήματα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f, g, h σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f , καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα, οι τιμές $f(x)$ προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ , τότε λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το ℓ και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$



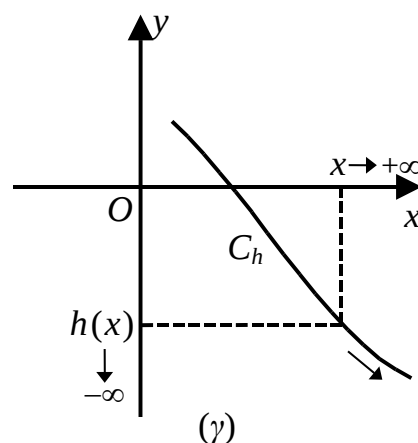
Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης g , καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα, οι τιμές $g(x)$ αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό M , τότε λέμε ότι η g έχει στο $+\infty$ όριο το $+\infty$ και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$



Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης h , καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα, οι τιμές $h(x)$ μειώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό M , τότε λέμε ότι η h έχει στο $+\infty$ όριο το $-\infty$ και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$

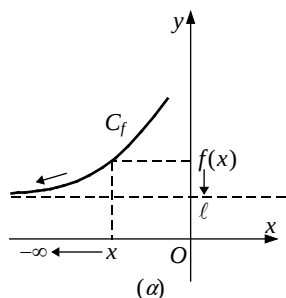
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.

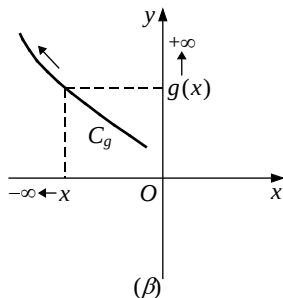


Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν, όταν $x \rightarrow -\infty$ για μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.

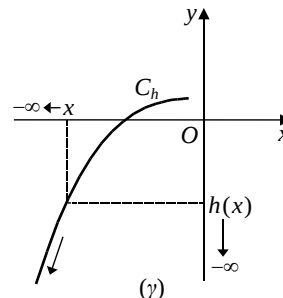
Έτσι, για τις συναρτήσεις f, g, h των παρακάτω σχημάτων έχουμε:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$



$$\text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty.$$

Βασικά όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\nu = +\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0, \quad \nu \in \mathbb{N}^*.$$

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ τα όρια: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta \mu x$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma \upsilon \nu x$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \epsilon \phi x$

Όρια πολωνομικών συναρτήσεων στο $\pm\infty$.

Για την πολωνομική συνάρτηση $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + a_0$, με $a_\nu \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_\nu x^\nu) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_\nu x^\nu)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Εάν έχουμε παραμέτρους σαν συντελεστές ή σαν εκθετες, θα διακρίνω περιπτώσεις για την παράμετρο για να βρω τον μεγιστοβάθμιο όρο.

Ασκήσεις

2.233 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 + 5x^2 - 3x - 3$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^4 + 4x^3 - 1$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -6x^5 - 5x^3 - 2$

iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)^4 + (5x-10)^3$

2.234 Να βρεθούν τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 8x^{3k-1} - 5x - 2$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4(k-1)x^3 - 5kx^4 + 3x - 1$

Όρια ρητών συναρτήσεων.

Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_v \neq 0$, $\beta_\kappa \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_\kappa x^\kappa} \right) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_\kappa x^\kappa} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_\kappa x^\kappa} \right) = \begin{cases} \frac{\alpha_v}{\beta_\kappa} \cdot (+\infty) & \text{αν } v > \kappa \\ \frac{\alpha_v}{\beta_\kappa} & \text{αν } v = \kappa \\ 0 & \text{αν } v < \kappa \end{cases} \quad \text{ομοίως όταν } x \rightarrow -\infty$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Εάν έχουμε **παραμέτρους** σαν **συντελεστές** ή σαν **έκθετες**, θα διακρίνω περιπτώσεις για την παράμετρο για να βρω τους μεγιστοβάθμιους όρους.

Ασκήσεις

2.235 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 4x^2 - 5x + 1}{x^3 - x - 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^{10} + (x+2)^{10} + \dots + (x+100)^{10}}{x^{10} + 10^{10}}$

2.236 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - x - 2}{x^5 + x - 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{2x+1} - \frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2} \right)$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{1}{x^{1999} - x} \right)$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - x - \frac{x+1}{x^3} \right)$

2.237 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - x - 2}{x^5 + x - 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2}{2x+1} - \frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2} \right)$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 - \frac{1}{x^{1999} - x} \right)$

iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - x - \frac{x+1}{x^3} \right)$

2.238 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές του k :

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)x^3 + x^2 + 2}{(k-2)x^2 + x - 4}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k-1)x^2 - x + 2}{(k+2)x^3 + kx^2 + 1}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k^2x^3 - kx + 3x + 9}{(k^2 - 1)x^2 - 8x + 7}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{8x^3 - 4x^2 - 2x + 4}{kx^2 - x - 3} \right)$$

Περιπτώσεις με ρίζες

α) Πρώτα εξασφαλίζουμε ότι το όριο έχει νόημα ως εξής:

Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού ή αν έχουμε $\sqrt[k]{f(x)}$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) > 0$ τότε το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[k]{f(x)}$ έχει νόημα.

Αν $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$

Προσοχή!!! Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ με $\ell < 0$ το $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)}$ δεν έχει νόημα (x_0 μπορεί να είναι $\pm\infty$ και $\ell = -\infty$)

β) Βγάζω μέσα στην ρίζα τον μεγιστοβάθμιο όρο κοινό παράγοντα.

Θυμάμαι ότι: $\sqrt{x^2} = |x|$ άρα $\sqrt{x^2} = x$ αν $x > 0$ και $\sqrt{x^2} = -x$ αν $x < 0$

Όταν έχω περιπτώσεις με ρίζες στις οποίες προκύπτει απροσδιοριστία πολλαπλασιάζω συνήθως με συζυγή παράσταση

Όταν έχω περιπτώσεις με ρίζες στις οποίες προκύπτει $\pm\infty \cdot f(\lambda)$:

Διακρίνω περιπτώσεις για το $f(\lambda)$

- Αν $f(\lambda) \neq 0$ δηλαδή ($f(\lambda) < 0$ ή $f(\lambda) > 0$) και βρίσκω το όριο.
- Αν $f(\lambda) = 0$ πολλαπλασιάζω συνήθως με συζυγή παράσταση.

Όταν έχω περιπτώσεις με δύο ή περισσότερες ρίζες και έχει πολλές πράξεις με συζυγή παράσταση προσπαθώ να την «σπάσω» σε άθροισμα δύο ή περισσότερων παραστάσεων και πολλαπλασιάζω με συζυγή παράσταση καθεμιάς χωριστά.

π.χ. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{4x^2 - 5x + 1} - 3x)$

Λυμένα Παραδείγματα

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης f στο $+\infty$ με

$$f(x) = (\sqrt{7x^4 + 6x + 5} - \sqrt{7x^4 + 3x + 3}) \cdot \sqrt{63x^2 - 5x + 20}.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $63x^2 - 5x + 20 > 0$ ($\Delta < 0$, $63 > 0$) και για κάθε $x > 0$ είναι

$7x^4 + 6x + 5 > 0$, $7x^4 + 3x + 3 > 0$ ως αθροίσματα θετικών αριθμών η f ορίζεται στο $(0, +\infty)$ επομένως:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\sqrt{7x^4 + 6x + 5} - \sqrt{7x^4 + 3x + 3}) \cdot \sqrt{63x^2 - 5x + 20}] = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[(7x^4 + 6x + 5) - (7x^4 + 3x + 3)] \cdot \sqrt{63x^2 - 5x + 20}}{\sqrt{7x^4 + 6x + 5} + \sqrt{7x^4 + 3x + 3}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x + 2) \cdot \sqrt{63x^2 - 5x + 20}}{\sqrt{7x^4 + 6x + 5} + \sqrt{7x^4 + 3x + 3}} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot (3 + \frac{2}{x}) \cdot \sqrt{63 - \frac{5}{x} + \frac{20}{x^2}}}{x^2 \cdot (\sqrt{7 + \frac{6}{x^3} + \frac{5}{x^4}} + \sqrt{7 + \frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^4}})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3 + \frac{2}{x}) \cdot \sqrt{63 - \frac{5}{x} + \frac{20}{x^2}}}{\sqrt{7 + \frac{6}{x^3} + \frac{5}{x^4}} + \sqrt{7 + \frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^4}}} = \\ \frac{(3 + 0) \cdot \sqrt{63 - 0 + 0}}{\sqrt{7 + 0 + 0} + \sqrt{7 + 0 + 0}} &= \frac{3\sqrt{7}\sqrt{9}}{2\sqrt{7}} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x - 5] = 0$

α) Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$.

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu \cdot f(x) + 4x}{x \cdot f(x) - 2x^2 + 3x} = 1$.

ΛΥΣΗ

α) Θέτω $g(x) = f(x) - 2x - 5$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

Άρα $f(x) = g(x) + 2x + 5$ και

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 2x + 5}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{g(x)}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{5}{x} \right] = 2 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) + 5] = 0 + 5 = 5$$

$$\beta) \text{ Έχουμε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu \cdot f(x) + 4x}{x \cdot f(x) - 2x^2 + 3x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu \cdot \frac{f(x)}{x} + 4}{f(x) - 2x + 3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + 4}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) + 3} = 1 \Rightarrow \frac{\mu \cdot 2 + 4}{5 + 3} = 1 \Rightarrow \mu = 2.$$

Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, είναι συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε να ισχύει

$$f(x) - g(x) = x - 4, \text{ για } x \in \mathbb{R}. \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x + 7] = 0$$

- α) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x + \eta\mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1}$.
- β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2x + 3] = 0$

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x + 7] = 0$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = -7$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 3x + 7}{x} = 0$ ή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - 3 \right) = 0 \text{ άρα έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$$

Από την $f(x) - g(x) = x - 4$ παίρνουμε $g(x) = f(x) - x + 4$, για $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι είναι : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - 1 + \frac{4}{x} \right) = 3 - 1 + 0 = 2$.

Ακόμη: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x + \eta\mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{g(x)}{x} + 3 + \frac{\eta\mu 2x}{x}}{(f(x) - 3x) + \frac{1}{x}} = \frac{2 + 3 + 0}{-7 + 0} = -\frac{5}{7}$, διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 0$ (για κάθε $x > 0$: $-\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu 2x}{x} \leq \frac{1}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

άρα θα είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 0$).

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2x + 3] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 4 - 2x + 3] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x + 7] = 0$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = -1$. βρείτε τις τιμές των α, β .

ΛΥΣΗ

Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ ή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x^2 - 2x} = 2$ ή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha + \beta \frac{1}{x}}{1 - 2\frac{1}{x}} = 2$ ή $\frac{\alpha + 0}{1 - 0} = 2$ άρα $\alpha = 2$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = -1$ ή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + \beta x}{x - 2} - 2x \right) = -1$ ή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + \beta x}{x - 2} = -1$ ή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \beta}{1 - 2\frac{1}{x}} = -1$ ή

$\frac{4 + \beta}{1 - 0} = -1$ άρα $\beta = -5$ (είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$).

Ασκήσεις

2.239 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{4x^2 - x - 1})$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{x} - \sqrt{16x^3 + x^2 + 1})$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^4 - x - 1} - \sqrt{4x^2 - x - 1})$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - 4\sqrt{x^2 - x + 4})$

2.240 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - \sqrt{4x^2 - x - 1})$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x\sqrt{x} - \sqrt{16x^3 + x^2 + 1})$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^4 - x - 1} - \sqrt{4x^2 - x - 1})$

iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - 4\sqrt{x^2 - x + 4})$

2.241 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{9x^2 + x + 1})$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 1} - 3x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 - x^2 + 1} - x^2)$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

2.242 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{9x^2 + x + 1})$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 1} + 3x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^4 - x^2 + 1} - x^2)$

iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} + x)$

2.243 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 7x + 1} - x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{x} - 1}}{x^2 + x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + 9x^2} - 3x}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{4 + x^2}}$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} + \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

2.244 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 7x + 1} - x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{-x} - 1}}{x^2 + x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + 9x^2} - 3x}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{4 + x^2}}$

iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x} + \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

2.245 Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + x + 2} + \sqrt{4x^2 + x + 2} + 5x)$

2.246 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές του k :

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (kx - \sqrt{9x^2 - x + 1})$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + kx)$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} - k\sqrt{x^2 + x + 1}$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + x + 1} - kx + 1)$

2.247 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς k, m ώστε:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} - kx + m) = 4$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} - kx - m) = -2$

2.248 Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 6} - \alpha x - \beta) = 0$

2.249 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 8x + 15} + \alpha x + \beta) = 6$

2.250 Να βρείτε το $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 5} + kx)$ για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$

2.251 Να βρείτε το $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 12} + \lambda x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Περιπτώσεις ρητών παραστάσεων στις οποίες έχω απόλυτα:

Βγάζω το απόλυτο ανάλογα με το πρόσημό του και συνεχίζω κατά τα γνωστά. (συνήθως πρώτα βρίσκω το όριο της παράστασης μέσα στο απόλυτο)

Ασκήσεις

2.252 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - |x - 1|}{|x^2 - x| + 5}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3|2 - 3x| - 1}{|x - 1| + 2}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 - x)|x^2 - 3x|}{x^2 + 1}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + |x^2 - x|}{|x - 2| + x^2}$$

Περιπτώσεις: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x^v} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^v} = 0$, $v \in \mathbb{N}^*$

Λύνονται με κριτήριο παρεμβολής.

Παράδειγμα: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x^v} = 0$ Πράγματι $\left| \frac{\eta\mu x}{x^v} \right| \leq \frac{1}{|x^v|} \Leftrightarrow \left| \frac{\eta\mu x}{x^v} \right| \leq \frac{1}{|x|^v} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|^v} \leq \frac{\eta\mu x}{x^v} \leq \frac{1}{|x|^v}$

όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|x|^v} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|x|^v} \right) = 0$ άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x^v} = 0$$

Γενικά: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v \eta\mu^\kappa \frac{1}{x} = \begin{cases} 1 & , v = \kappa \\ +\infty & , v > \kappa \\ 0 & , v < \kappa \end{cases}$, $v, \kappa \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 0}} \frac{\eta\mu y}{y} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \eta\mu^2 \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right] = 1 \cdot 0 = 0$$

Ασκήσεις

2.253 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x \cdot \eta\mu x + 7)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{3 + \eta\mu x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + \eta\mu x - x \sin x}{x^4 + x^2 + 1}$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \eta\mu^2 x}{(x + \eta\mu x)^2}$

2.254 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^4 \cdot \sin \frac{1}{x} \right)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{2}{x} \cdot (\sqrt{x^2 + x + 2} - x) \right)$

Διάφορες περιπτώσεις.

2.255 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} - \alpha x - \beta \right) = 0$

2.256 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x^2 + 4} - \alpha x - \beta \right) = 2$

2.257 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 + 1 - (x - \beta)(x - 2)}{x + 2} = 2$

2.258 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{2x + 1} - (\alpha x + \beta) \right) = 1$

2.259 Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \left(\eta\mu \frac{1}{x} + \eta\mu \frac{2}{x} + \eta\mu \frac{3}{x} + \dots + \eta\mu \frac{v}{x} \right)$, $v \in \mathbb{N}^*$

2.260 Αν για την συνάρτηση f ισχύει $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq f(x) \leq \sqrt{x^2+1} - x$ για κάθε $x > 0$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2.261 Αν για την συνάρτηση f ισχύει $|(1+x^4) \cdot f(x) - 2x^4| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2.262 Αν για την συνάρτηση f ισχύει ότι: $|f(x)| \leq x$, $x > 0$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

2.263 Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 1} + 3f(x)) = 1$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2.264 Αν για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \cdot f^4(x) + \eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right) \cdot g^2(x) \right] = 0$ δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

2.265 Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 1}{f(x) + 1} = 5$ με $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2.266 Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x \cdot f(x) - \sqrt{x^4 + x^2} + x^2] = 2$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι άρτια, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2.267 Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + x - 2}{x + 2} = 4$ να βρείτε το όριο:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3x^2 - x + 5}{x^2 f(x) + x + 1}$

2.268 το $k \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + kx - 2}{xf(x) - 3x^2 + 1} = 2$

2.269 Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = 4$, να βρείτε το

$k \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + kx - 2}{xf(x) - 3x^2 + 1} = 2$

2.270 Αν για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{x + 1} = 4$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 3$, να βρείτε

το $k \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3kg(x)}{f(x) - g(x)} = -2$