

ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η μελέτη και η χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f απαιτούν τις παρακάτω διαδικασίες:

1ο Βρίσκουμε, αν δεν δίνεται, το **πεδίο ορισμού** της f .

2ο Εξετάζουμε αν η συνάρτηση f είναι:

α) Άρτια ή περιττή, οπότε η μελέτη μπορεί να γίνει στο σύνολο $x \in D_f$, με $x \geq 0$. Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το D_f είναι άρτια, τότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι περιττή, η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O .

β) Περιοδική, σε τριγωνομετρικές συνήθως συναρτήσεις, οπότε η μελέτη μπορεί να περιοριστεί σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου T .

3ο Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.

4ο Βρίσκουμε τις παραγώγους f' και f'' και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f , ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

5ο Μελετούμε τη “συμπεριφορά” της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες, κτλ.)

6ο Βρίσκουμε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες.

7ο Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ' ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και **πίνακας μεταβολών της f** που περιλαμβάνει τέσσερις σειρές για τις μεταβολές των παραστάσεων: x , f' , f'' , f .

8ο Με βάση τον πίνακα μεταβολών χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Για καλύτερη σχεδίαση της C_f κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της f .

Ασκήσεις

3.501 Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

i) $f(x) = 9x - x^3$

ii) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

iii) $f(x) = \sqrt{x-1}$

iv) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

v) $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

vi) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

3.502 Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

i) $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, \pi]$

ii) $f(x) = x - 2\eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$

iii) $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3} \cdot x$, $x \in [0, 2\pi]$

iv) $f(x) = x + \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$

3.503 Να γίνει πίνακας μεταβολών των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$\text{ii) } f(x) = x \cdot \ln x$$

$$\text{iii) } f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$$

$$\text{iv) } f(x) = (1 - \ln x)^2$$

$$\text{v) } f(x) = |\ln x|$$

$$\text{vi) } f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$$

3.504 Αν η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$ να την μελετήσετε και να την παραστήσετε γραφικά.

3.505 Αν η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 1$ και καμπή στο $x_2 = -2$ να την μελετήσετε και να την παραστήσετε γραφικά.

3.506 Αν η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_1 = 2$ το -5 και η C_f καμπή στο $x_2 = \frac{2}{3}$ να την μελετήσετε και να την παραστήσετε γραφικά.

3.507 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - ax$, να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και στη συνέχεια για την τιμή του a που θα βρείτε να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

3.508 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 5x + a)$, να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$ και στη συνέχεια για την τιμή του a που θα βρείτε να γίνει πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f .

3.509 Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - 3x + 2 + b \ln x$, να βρεθούν οι τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f έχει σημείο καμπής το $M(1,5)$ και στη συνέχεια για τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ που θα βρείτε να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

3.510 Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η $f(x) = \ln|x| + \frac{1}{x^2}$