

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.330 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq \lambda \\ \frac{x^3 - x + 2}{x}, & x < \lambda \end{cases}$ όπου $\lambda < 0$.

Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = \lambda$

α) Υπολογίστε την τιμή του λ .

β) Βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \cdot f(x) + \eta\mu 3x}{f(x) + \eta\mu x}$.

2.331 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $6x \leq f(x) \leq x^2 + 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Βρείτε το $f(3)$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

γ) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left[x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$.

2.332 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι «1-1» και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 1}{x - 2} = 4$ να βρείτε:

α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ β) τα $f(2)$ και $f^{-1}(-1)$.

2.333 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Να βρεθεί:

α) Το πεδίο ορισμού της.

β) Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x - \ln \sqrt{x^2 + x + 1}]$.

2.334 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 + x^2} + \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α , αν γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$.

β) Για την τιμή του α που βρήκατε, να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη

συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} 6x^2 + x - 1, & x \leq \alpha \\ \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x} - 1}, & x > \alpha \end{cases}$.

2.335 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \leq 1 \\ \frac{\alpha x + \beta x + \gamma}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$.

α) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, να βρείτε τους α, β, γ .

β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot f(x))$.

2.336 Α. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] = 1$, να υπολογίσετε:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) \right].$$

Β. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(1) \neq 2$ και $f(0) + f(1) = 2$. Δείξτε ότι:

α) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f(x_0) = 2x_0^{2003}$.

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in [0,1]$; ώστε $f(x_1) = 1$.

2.337 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
 $|f(x) - f(\psi)| \leq \alpha \cdot |x - \psi|$, για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$.

α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Αν επιπλέον ισχύει $\alpha \in (0,1)$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

2.338 Έστω f, g συνεχείς στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες
 ισχύει: $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι ισχύει $-1 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

γ) Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, \pi]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \sin x_0$.

2.339 Αν για τη συνεχή συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ ισχύει: $\frac{x^2}{2} < f(x) < \frac{x^2 + 1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.

β) Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + \eta\mu 2x}{x^2 + \eta\mu x}$.

2.340 Έστω η συνάρτηση $f : [-2,2] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x^2 + (f(x))^2 = 4 \text{ για κάθε } x \in [-2,2]$$

α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $x=2$.

β) Αν ισχύει $f(-1) \cdot f(1) < 0$, να δείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής σε κάθε $x \in [-1,1]$.

2.341 Έστω η συνεχής και άρτια συνάρτηση στο

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ με } f(x) \in (0,1) \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

α) Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = x^4$ έχει δυο ρίζες τουλάχιστον στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ οι

οποίες είναι αντίθετες.

β) Αν g μια άλλη συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$\alpha \cdot f(x) - g(x) = \alpha(x^4 - x), \alpha \in \mathbb{R} \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ να δείξετε ότι η εξίσωση}$$

$g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[-\rho, \rho]$ όπου $-\rho, \rho$ οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = x^4$.

2.342 Έστω η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$x \cdot f(x) - 5x^4 - x + 2\eta\mu^2 x = 0 \quad (\text{I}) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Βρείτε τον τύπο της f .

β) Βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

2.343 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

2.344 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = e^{x-1} - 1$ και $g(x) = \ln(x+1) + 1$.

α) Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[1, 5]$.

β) Αν p η ρίζα αυτή να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = p$.

2.345 Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν:

$$\frac{x-1}{x} \leq f(x) \leq x-1 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y > 0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

β) Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

2.346 Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x + x - 1$ με $x \in (0, +\infty)$.

α) Βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

β) Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μόνο μια λύση και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = e$.

γ) Βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η

$$\text{ισότητα: } e^{\lambda^2+1} - e^{2\lambda} = \ln(2\lambda) - \ln(\lambda^2+1) - \lambda^2 + 2\lambda - 1$$

2.347 Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο

$$\text{ώστε: } f(\xi) = \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$$

2.348 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $2x \leq f(x) \leq x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α) Η f είναι συνεχής στο $x = 1$.

β) Αν η f είναι συνεχής σ' όλο το $\mathbb{R}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 2004x$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

- 2.349** Έστω η f συνεχής στο $[a, b]$ με $f(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$.
 Α. Να δείξετε ότι $f(a)f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.
 Β. Αν για την συνάρτηση g με $g(x) = \frac{f(x) + f(a)}{1 + f(a)f(x)}$, $x \in [a, b]$ υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $g(x_0) > 1$ τότε η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (a, b) .
- 2.350** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x + 1$, $x \in [-1, 0]$.
 α) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$
 β) Βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 γ) Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(-1, 0)$
- 2.351** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}$.
 α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 β) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της
 γ) Βρείτε το σύνολο τιμών της
 δ) Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 έτσι ώστε $f(x_0) = \frac{3}{2}$
- 2.352** Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 8]$ για την οποία ισχύουν
 $f(0) = 1$, $f(2) = -2$, $f(4) = 2$, $f(6) = -4$, $f(8) = 1$
 α) Βρείτε πόσες τουλάχιστον φορές η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο διάστημα $(0, 8)$
 β) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $[0, 2]$, $[4, 6]$ και γνησίως αύξουσα στα $[2, 4]$, $[6, 8]$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$
- 2.353** Α. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει
 $f(x \cdot \psi) = f(x) + f(\psi) + (x+1) \cdot (\psi-1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.
 Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής σ' όλο το $\mathbb{R}$.
 Β. Βρείτε τα παρακάτω όρια:
 α. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$, β. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta \mu x}{x}$