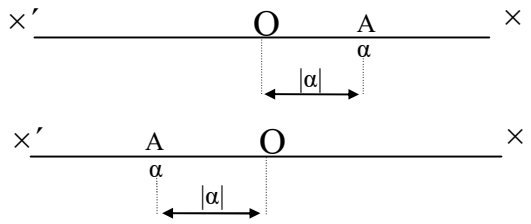


ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Έστω α ένας πραγματικός αριθμός και A το σημείο το οποίο παριστάνει τον αριθμό αυτό στον άξονα των πραγματικών αριθμών.



Απόλυτη τιμή του α ονομάζεται η απόσταση του σημείου A από τη αρχή O του άξονα και συμβολίζεται με $|\alpha|$.

$$\text{Δηλαδή } |\alpha| = |\alpha - 0| = (OA). \quad \text{Άρα: } |\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

1. $|\alpha| \geq 0$ το '=' ισχύει μόνο όταν $\alpha=0$.
2. $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
3. $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$, δηλαδή $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$
4. $|\alpha|^2 = \alpha^2$
5. Αν $\theta > 0$, τότε : $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
6. $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

1. Η απόλυτη τιμή του γινομένου δύο αριθμών είναι ίση με το γινόμενο των απόλυτων τιμών τους, δηλαδή $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

Απόδειξη:

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |\alpha\beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \Leftrightarrow |\alpha\beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow (\alpha\beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2 \text{ που ισχύει.}$$

Παρατήρηση: Η ιδιότητα $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ ισχύει και για περισσότερους παράγοντες π.χ. $|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot \dots \cdot |\alpha_n|$

2. Η απόλυτη τιμή του πηλίκου δύο αριθμών είναι ίση με το πηλίκο των

απόλυτων τιμών τους, δηλαδή $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

Απόδειξη:

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \Leftrightarrow \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2 = \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|} \right)^2 \Leftrightarrow \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

3. Η απόλυτη τιμή του αθροίσματος δύο αριθμών είναι ίση ή μικρότερη

από το άθροισμα των απόλυτων τιμών των αριθμών αυτών,

δηλαδή $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Απόδειξη:

Επειδή $|\alpha + \beta|$ και $|\alpha| + |\beta|$ είναι θετικοί αριθμοί έχουμε:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha||\beta| + \beta^2$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha\beta \leq 2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow 2\alpha\beta \leq 2|\alpha\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta| \text{ που ισχύει}$$

γιατί $|\alpha| \geq \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

Προφανώς το '=' ισχύει μόνο όταν $\alpha\beta = |\alpha\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \geq 0$ δηλαδή όταν

α, β ομόσημοι ή $\alpha=0$ ή $\beta=0$

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ

Αν α, β δύο πραγματικοί που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε το μήκος του τμήματος AB θα ονομάζεται απόσταση των αριθμών α και β . Δηλαδή ονομάζουμε απόσταση των αριθμών α και β την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους. **$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$**

Αν $\theta > 0$, τότε : $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

Αν $\theta > 0$, τότε : $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$

Αν $\theta > 0$, τότε : $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ ή $x > \theta$

Αν $\theta > 0$, τότε : $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta$ ή $x \geq \theta$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |\sqrt{3} - 3| - |\pi - 3|$

➤ Είναι $\sqrt{3} < 3 \Leftrightarrow \sqrt{3} - 3 < 0 \Leftrightarrow |\sqrt{3} - 3| = -(\sqrt{3} - 3) = 3 - \sqrt{3}$

➤ $\pi > 3 \Leftrightarrow \pi - 3 > 0 \Leftrightarrow |\pi - 3| = \pi - 3$

Κατά συνέπεια έχουμε $A = |\sqrt{3} - 3| - |\pi - 3| = 3 - \sqrt{3} + \pi - 3 = \pi - \sqrt{3}$

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

2.

$$A = |4x^2 - 4x + 1| \quad \text{και} \quad B = |x^6 - 6x^3 + 13|$$

Παρατηρούμε ότι

➤ $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 \geq 0$, οπότε η παράσταση A γράφεται
 $A = |4x^2 - 4x + 1| = |(2x - 1)^2| = (2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

➤ $x^6 - 6x^3 + 13 = (x^6 - 6x^3 + 9) + 4 = (x^3 - 3)^2 + 4 > 0$, οπότε η παράσταση B γράφεται
 $B = |x^6 - 6x^3 + 13| = |(x^3 - 3)^2 + 4| = (x^3 - 3)^2 + 4 = x^6 - 6x^3 + 13$

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

3.

$$A = |-x^4 - x^2 - 3|, \quad B = |-x^2 + 2x - 5|$$

Παρατηρούμε ότι

➤ $-x^4 - x^2 - 3 = -(x^4 + x^2 + 3) < 0$, οπότε η παράσταση A γράφεται

$$A = |-x^4 - x^2 - 3| = -(x^4 + x^2 + 3) = -x^4 - x^2 - 3$$

➤ $-x^2 + 2x - 5 = -(x^2 - 2x + 5) = -[(x^2 - 2x + 1) + 4] = -[(x - 1)^2 + 4] < 0$, οπότε η παράσταση B γράφεται

$$B = |-x^2 + 2x - 5| = -[(x - 1)^2 + 4] = -(x - 1)^2 - 4 = -x^2 + 2x - 5$$

4. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = |x - 1| + |x - 3|$ όπου $1 < x < 3$

Από υπόθεση έχουμε $1 < x < 3$, οπότε

➤ $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow |x - 1| = x - 1$

➤ $x < 3 \Leftrightarrow x - 3 < 0 \Leftrightarrow |x - 3| = -(x - 3) = -x + 3$.

➤ Κατά συνέπεια η παράσταση A γράφεται

$$A = |x - 1| + |x - 3| = x - 1 - x + 3 = 2$$

5. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = 2 + x - |x - 1|$ όπου $x \in \mathbb{R}$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

➤ Αν $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ τότε $|x - 1| = x - 1$ και η παράσταση γράφεται

$$A = 2 + x - |x - 1| = 2 + x - (x - 1) = 3$$

➤ Αν $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ τότε $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$ και η παράσταση γράφεται

$$A = 2 + x - |x - 1| = 2 + x - (-x + 1) = 2x + 1$$

$$\text{Άρα } A = \begin{cases} 3 & \text{αν } x \geq 1 \\ 2x + 1 & \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

6. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = 2x - |x - 2| + |x + 1|$ όπου $x \in \mathbb{R}$

➤ Βρίσκουμε τους αριθμούς που μηδενίζουν τα απόλυτα

$$\bullet \quad x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\bullet \quad x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

➤ Βρίσκουμε τα πρόσημα των διωνύμων $x + 1$, $x - 2$ στον πίνακα προσήμων

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x + 1$		-	+	
$x - 2$		-	-	+

➤ Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

• Αν $x < -1$ είναι $x + 1 < 0$ και $x - 2 < 0$, οπότε έχουμε

$$A = 2x - |x - 2| + |x + 1| = 2x + (x - 2) - (x + 1) = 2x - 3$$

• Αν $-1 \leq x \leq 2$ είναι $x + 1 \geq 0$ και $x - 2 \leq 0$, οπότε έχουμε

$$A = 2x - |x - 2| + |x + 1| = 2x + (x - 2) + (x + 1) = 4x - 1$$

• Αν $x > 2$ είναι $x + 1 > 0$ και $x - 2 > 0$, οπότε έχουμε

$$A = 2x - |x - 2| + |x + 1| = 2x - (x - 2) + (x + 1) = 2x + 3$$

$$\text{Άρα } A = \begin{cases} 2x - 3, & x < -1 \\ 4x - 1, & -1 \leq x \leq 2 \\ 2x + 3, & x > 2 \end{cases}$$

7. Να αποδειχθεί $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = (x + y)^2 + (x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 =$$

$$= 2x^2 + 2y^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$$

8. Αν $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } |x + 4y| \leq 17$$

$$\text{ii. } |2x - 3y| \leq 14$$

$$\text{Ισχύει } |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$\text{i. } |x + 4y| \leq |x| + |4y| = |x| + 4|y| < 1 + 4 \cdot 4 = 17 \text{ Άρα } |x + 4y| \leq 17.$$

$$\text{ii. } |2x - 3y| \leq |2x| + |-3y| = 2|x| + 3|y| \leq 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 14 \text{ Άρα } |2x - 3y| \leq 14$$

9. Να αποδειχθεί ότι : $|x+y|=|x|+|y| \Leftrightarrow x,y$ ομόσημοι ή $x=0$ ή $y=0$

Παίρνουμε το δεδομένο $|x+y|=|x|+|y|$ και με τετραγωνισμό έχουμε

$$|x+y|=|x|+|y| \Leftrightarrow$$

$$|x+y|^2=(|x|+|y|)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x+y)^2=|x|^2+2|x||y|+|y|^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2+2xy+y^2=x^2+2|x||y|+y^2 \Leftrightarrow$$

$$2xy=2|x||y| \Leftrightarrow xy=|xy| \Leftrightarrow xy \geq 0 \text{ δηλαδή } x,y \text{ ομόσημοι ή } x=0 \text{ ή } y=0$$

10 .Αν $\alpha\beta \neq 0$ και ισχύει $|\alpha+\beta| < |\alpha-\beta|$, να αποδείξετε ότι $\alpha|\beta| + \beta|\alpha| = 0$

$$|\alpha+\beta| < |\alpha-\beta| \Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2 < |\alpha-\beta|^2 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 < (\alpha-\beta)^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 < \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow 2\alpha\beta < -2\alpha\beta \Leftrightarrow 4\alpha\beta < 0 \Leftrightarrow \alpha\beta < 0$$

Άρα α, β ετερόσημοι. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, τότε $|\alpha| = \alpha$ και $|\beta| = -\beta$,

$$\text{οπότε } \alpha|\beta| + \beta|\alpha| = \alpha(-\beta) + \beta\alpha = -\alpha\beta + \alpha\beta = 0$$

- Αν $\alpha < 0$ και $\beta > 0$, τότε $|\alpha| = -\alpha$ και $|\beta| = \beta$,

$$\text{οπότε } \alpha|\beta| + \beta|\alpha| = \alpha\beta + \beta(-\alpha) = \alpha\beta - \alpha\beta = 0$$

11. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $|x|^3 + 1 \geq x^2 + |x|$.

$$|x|^3 + 1 \geq x^2 + |x| \Leftrightarrow |x|^3 + 1 - x^2 - |x| \geq 0 \Leftrightarrow |x|^3 + 1 - |x|^2 - |x| \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |x|^2(|x| - 1) + (1 - |x|) \geq 0 \Leftrightarrow |x|^2(|x| - 1) - (|x| - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (|x| - 1)(|x|^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (|x| - 1)(|x| - 1)(|x| + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2(|x| + 1) \geq 0 \text{ που}$$

αληθεύει γιατί $(|x| - 1)^2 \geq 0$ και $|x| + 1 \geq 0$.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $\alpha < \beta < \gamma$ να γραφτεί χωρίς απόλυτες τιμές η παράσταση

$$A = 2|\alpha - \beta| + 3|\gamma - \alpha| - |\beta - \gamma|$$

2. Αν $x < \alpha < \beta$ ή $\alpha < \beta < x$ ναδειχθεί $||\alpha - x| - |\beta - x|| = |\alpha - \beta|$

3. Να γραφτεί χωρίς απόλυτες τιμές η παράσταση $A = |x - 3| + |x + 4|$

4. Έστω $1 < \alpha < 3$. Να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της παράστασης $A = |\alpha - 1| - 3|\alpha| + |\alpha + 1| - 4|5 - \alpha|$

5. Να γραφτεί η παράσταση $A = |x + 4| + |x - 2| - 2|x|$ χωρίς απόλυτα.

6. Να δειχθεί ότι $||2 - x| - |3 - x|| = \begin{cases} |5 - 2x| & \text{αν } 2 < x < 3 \\ 1 & \text{αν } x \leq 2 \text{ ή } x \geq 3 \end{cases}$

7. Αν $|x| \leq 4$, $|\psi| \leq 6$ και $|z| \leq 7$ να δειχθεί $-17 \leq x + \psi + z \leq 17$

8. Αν $|x| \leq 1$, $|\psi| \leq 2$, $|\omega| \leq 3$ να δειχθεί $|x + \psi + \omega| \leq 6$

9. Αν $|x| \leq 2$ να δειχθεί $|3x^2 - 5x + 1| \leq 23$

10. Αν $|x| > 1$ να δειχθεί $\left| x + \frac{1}{x} \right| - 1 < |x| < \left| x + \frac{1}{x} \right|$

11. Αν $|\alpha| < 1$ και $|\beta| < 1$ να δειχθεί $\left| \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} \right| < 1$

12. Αν ισχύει $||\alpha - \beta| - |\alpha + \beta|| = 2|\beta|$ να δειχθεί $|\alpha| \geq |\beta|$

13. Αν $\alpha\beta \neq 0$ και $\frac{|\alpha|\beta + \beta|\alpha|}{|\alpha||\beta|} = 2$ να δειχθεί $\alpha, \beta > 0$.

14. Αν $\alpha \neq -1$ και $\left| \frac{\alpha+16}{\alpha+1} \right| = 4$ να δειχθεί $|\alpha| = 4$

15. Αν $\alpha \neq 0$ να δειχθεί $\left| \alpha + \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$

16. Αν $|\alpha+\beta| = |\alpha-\beta|$ να δειχθεί ότι τουλάχιστον ένα από τα α, β είναι 0

17. Να δείξετε ότι $|x-\psi| \leq |x| + |\psi|$. Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα.

18. Να δείξετε $|x| - |\psi| \leq |x+\psi|$. Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα.

Απόλυτη τιμή

2ο θέμα

2.504

- α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $a + \frac{1}{a} \leq -2$ (Μονάδες 15)
- β) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $|a| + \left| \frac{1}{a} \right| \geq 2$ (Μονάδες 10)

Παρατήρηση: Δεν χρειάζεται το $\alpha < 0$

2.509

- α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$ (1) (Μονάδες 15)
- β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

2.991

- Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$,
- α) να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$. (Μονάδες 12)
- β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x . (Μονάδες 13)

2.996

- Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι:
- α) $A = x - y + 2$. (Μονάδες 12)
- β) $0 < A < 4$. (Μονάδες 13)

2.1009

- Δίνεται η παράσταση: $A = |3x-6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.
- α) Να αποδείξετε ότι
- i) για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$
- ii) για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$ (Μονάδες 12)
- β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2 - 16}{|3x-6| + 2} = 3x + 4$ (Μονάδες 13)

2.1062

- α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3| < 1$. (Μονάδες 12)
- β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

2.1074

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y - 3| < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6 < \Pi < 14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

2.1089

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές. (Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10}$ (Μονάδες 15)

2.1091

Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| - |x - 2|$

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$ (Μονάδες 13)

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12).

2.1273

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν: $|x - 3| \leq 2$ και $|y - 6| \leq 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$. (Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y . (Μονάδες 13)

2.3884

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

2.4290

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$. (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x + 1| + |x - 5|}{3}$ (Μονάδες 13)

2.4295

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y - 2| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$. (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y - 1| + |y - 3|}{2}$ (Μονάδες 13)

2.4318

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x - 1| < 1$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$. (Μονάδες 15)
β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:
 $1, x, x^2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

2.7521

- α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:
i) $|1 - 2x| < 5$ και (Μονάδες 9)
ii) $|1 - 2x| \geq 1$ (Μονάδες 9)
β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

4ο θέμα

4.2287

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

- α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)
β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x . (Μονάδες 5)
γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)
δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:
 $|x + 4| + |x - 14| = 18$. (Μονάδες 5)

4.2301

Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2, 7$ και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

- α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.
i) $|x + 2|$ (Μονάδες 4)
ii) $|x - 7|$ (Μονάδες 4)
β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x + 2| + |x - 7|$ (Μονάδες 5)
γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)
δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

4.2302

Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς $5, 9$ και x αντίστοιχα.

- α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$. (Μονάδες 10)
β) Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$,
i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M . Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

4.7791

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α , β . (Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|. \text{ Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά} \quad (\text{Μονάδες 12})$$

4.8453

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\bullet |\alpha - 2| < 1$$

$$\bullet |\beta - 3| \leq 2$$

α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$. (Μονάδες 4)

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β . (Μονάδες 5)

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 9)