

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Μια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ $a_{v+1} = a_v \cdot \lambda$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ο $v^{\text{ος}}$ όρος μίας γεωμετρικής πρόοδου εξαρτάται από τον a_1 και το λόγο λ

$$a_v = a_1 \cdot \lambda^{v-1}$$

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \lambda$$

$$a_3 = a_2 \lambda$$

$$a_4 = a_3 \lambda$$

.....

$$a_{v-1} = a_{v-2} \lambda$$

$$a_v = a_{v-1} \lambda$$

Οι παραπάνω ισότητες είναι πλήθους v και περιέχουν $v-1$ φορές το λ

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ισότητες αυτές και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής παίρνουμε $a_v = a_1 \cdot \lambda^{v-1}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Τρεις αριθμοί α, β και γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής πρόοδου αν και μόνο αν $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$

Σημ. Ο αριθμός $\sqrt{\alpha \cdot \gamma}$ ονομάζεται γεωμετρικός μέσος των α και γ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το άθροισμα $S_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{v-1} + \alpha_v$ των πρώτων v όρων μίας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ δίνεται από τον τύπο $S_v = \alpha_1 \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1}$ αν $\lambda \neq 1$

Αν $\lambda = 1$ τότε $S_v = v \cdot \alpha_1$

1. (Άσκηση 1 σελ. 136 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε το v -οστό όρο των γεωμετρικών προόδων :

- i. 3,6,12,... ii. $\frac{2}{3}, 2, 6, \dots$ vi. 18,6,2,...

Λύση :

i. Στην γεωμετρική πρόοδο 3,6,12,... έχω : $\alpha_1 = 3$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{6}{3} \Leftrightarrow \lambda = 2$

$$\text{Άρα : } \alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1} \Leftrightarrow \alpha_v = 3 \cdot 2^{v-1}$$

ii. Στην γεωμετρική πρόοδο $\frac{2}{3}, 2, 6, \dots$ έχω : $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \lambda = 3$

$$\text{Άρα : } \alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1} \Leftrightarrow \alpha_v = \frac{2}{3} \cdot 3^{v-1} \Leftrightarrow \alpha_v = 2 \cdot 3^{v-2}$$

vi. Στην γεωμετρική πρόοδο 18,6,2,... έχω : $\alpha_1 = 18$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{6}{18} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

$$\text{Άρα : } \alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1} \Leftrightarrow \alpha_v = 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{v-1} \Leftrightarrow \alpha_v = 2 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{3^{v-1}} \Leftrightarrow \alpha_v = \frac{2}{3^{v-3}}$$

2. (Άσκηση 2 σελ. 137 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμία από τις γεωμετρικές προόδους :

- ι. τον α_9 της $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$ ιν. τον α_{10} της $1, -2, 4, \dots$

Λύση :

ι. Στην γεωμετρική πρόοδο $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$ έχω : $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \lambda = 2$

Άρα : $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_9 = \frac{1}{4} \cdot 2^{9-1} \Leftrightarrow \alpha_9 = \frac{1}{4} \cdot 2^8 \Leftrightarrow \alpha_9 = 2^6 \Leftrightarrow \alpha_9 = 2^6 \Leftrightarrow \alpha_9 = 64$

ιν. Στην γεωμετρική πρόοδο $1, -2, 4, \dots$ έχω : $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2}{1} \Leftrightarrow \lambda = -2$

Άρα : $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_{10} = 1 \cdot (-2)^{10-1} \Leftrightarrow \alpha_{10} = (-2)^9 \Leftrightarrow \alpha_{10} = -512$

3. (Άσκηση 8 σελ. 137 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

ι. Να βρείτε τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών 5 και 20 καθώς και των $\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\sqrt{3}$.

ιι. Να βρείτε τον x ώστε οι αριθμοί $x-4$, $x+1$, $x-19$ να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

Λύση :

ι. Ο γεωμετρικός μέσος των $\alpha = 5$ και $\gamma = 20$ είναι ο
 $\beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow \beta^2 = 5 \cdot 20 \Leftrightarrow \beta^2 = 100 \Leftrightarrow \beta = 10$

Ο γεωμετρικός μέσος των $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\gamma = \sqrt{3}$ είναι ο

$$\beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow \beta^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow \beta^2 = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$$

ιι. Οι αριθμοί $\alpha = x-4$, $\beta = x+1$ και $\gamma = x-19$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει : $\beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow (x+1)^2 = (x-4)(x-19) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 19x - 4x + 76 \Leftrightarrow 25x = 75 \Leftrightarrow x = 3$.

4. (Άσκηση 8 σελ. 130 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων των γεωμετρικών προόδων :

- ι. $1, 2, 4, \dots$

Λύση :

ι. Στην γεωμετρική πρόοδο $1, 2, 4, \dots$ έχω : $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{1} \Leftrightarrow \lambda = 2$

Άρα : $S_n = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow S_{10} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} \Leftrightarrow S_{10} = \frac{1024 - 1}{1} \Leftrightarrow S_{10} = 1023$

5. (Άσκηση 10 σελ. 138 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να υπολογίσετε τα αθροίσματα :

i. $2 + 8 + 32 + \dots + 8192$

Λύση :

i. Οι αριθμοί 2,8,32,...,8192 αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 2$

και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{2} \Leftrightarrow \lambda = 4$. Είναι $\alpha_n = 8192$ και ψάχνουμε το n .

Έτσι έχω : $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow 8192 = 2 \cdot 4^{n-1} \Leftrightarrow 4^{n-1} = 4096 \Leftrightarrow 4^{n-1} = 4^6 \Leftrightarrow n-1 = 6 \Leftrightarrow n = 7$

Άρα : $S_n = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow S_7 = 2 \cdot \frac{4^7 - 1}{4 - 1} \Leftrightarrow S_7 = 2 \cdot \frac{16384 - 1}{3} \Leftrightarrow S_7 = 10922$

6. Να βρείτε τον α_{14} μιας γ.π με $\alpha_4 = 125$ και $\alpha_{10} = \frac{125}{64}$

$$\alpha_4 = 125 \Rightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^3 = 125 \quad (1)$$

$$\alpha_{10} = \frac{125}{64} \Rightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^9 = \frac{125}{64} \quad (2)$$

Με διαίρεση των (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{\alpha_1 \cdot \lambda^9}{\alpha_1 \cdot \lambda^3} = \frac{\frac{125}{64}}{125} \Leftrightarrow \lambda^6 = \frac{125}{125 \cdot 64} \Leftrightarrow \lambda^6 = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{14} = \alpha_1 \cdot \lambda^{13} = \alpha_1 \cdot \lambda^9 \cdot \lambda^4 = (\alpha_1 \cdot \lambda^9) \cdot \lambda^4 = \alpha_{10} \cdot \lambda^4 = \frac{125}{64} \cdot \left(\pm \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{125}{64} \cdot \frac{1}{16} = \frac{125}{1024}$$

7. Να βρεθεί η γεωμετρική πρόοδος στην οποία η διαφορά του πρώτου όρου από τον τρίτο είναι 9 και του τρίτου από τον πέμπτο είναι 36.

$$\alpha_3 - \alpha_1 = 9 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^2 - \alpha_1 = 9 \Leftrightarrow \alpha_1 (\lambda^2 - 1) = 9 \quad (1)$$

$$\alpha_5 - \alpha_3 = 36 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^4 - \alpha_1 \lambda^2 = 36 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^2 (\lambda^2 - 1) = 36 \quad (2)$$

Με διαίρεση των (1) και (2) έχουμε

$$\frac{\alpha_1 (\lambda^2 - 1)}{\alpha_1 \lambda^2 (\lambda^2 - 1)} = \frac{9}{36} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$$

οΓιά $\lambda = 2$ από την (1) έχουμε $\alpha_1 = 3$

οΓιά $\lambda = -2$ από την (1) έχουμε $\alpha_1 = 3$