

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
1^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο σελίδα 76.

A2. 1.Βλέπε Σχολικό Βιβλίο σελίδα 74.
2. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο σελίδες 70-71.

A3. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ.

ΘΕΜΑ Β

1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Παίρνουμε τη διαφορά

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{f(x_2)}{1+f^2(x_2)} - \frac{f(x_1)}{1+f^2(x_1)} = \frac{f(x_2)(1+f^2(x_1)) - f(x_1)(1+f^2(x_2))}{(1+f^2(x_1))(1+f^2(x_2))} =$$
$$\frac{(f(x_2) - f(x_1)) - f(x_2)f(x_1)(f(x_2) - f(x_1))}{(1+f^2(x_1))(1+f^2(x_2))} = \frac{(f(x_2) - f(x_1)) - (1 - f(x_2)f(x_1))}{(1+f^2(x_1))(1+f^2(x_2))}$$

- αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $x_2 > x_1$ θα έχουμε:
 $f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$, επίσης έχουμε
 $0 < f(x_1) < 1, 0 < f(x_2) < 1 \Rightarrow 0 < f(x_1)f(x_2) < 1$, οπότε η διαφορά

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{\left(\overbrace{f(x_2) - f(x_1)}^{+} \right) \left(\overbrace{1 - f(x_2)f(x_1)}^{+} \right)}{(1+f^2(x_1))(1+f^2(x_2))} > 0 \Rightarrow g(x_2) > g(x_1).$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Ομοίως αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
Άρα έχουν οι f, g το ίδιο είδος μονοτονίας στο $\mathbb{R}$.

2.

- Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$. Τότε αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

$$x_2 > x_1 \xRightarrow{g \uparrow} g(x_2) > g(x_1) \xRightarrow{f \uparrow} f(g(x_2)) > f(g(x_1)) \Leftrightarrow (fog)(x_2) > (fog)(x_1).$$

Άρα η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες στο $\mathbb{R}$. Τότε αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

$$x_2 > x_1 \xRightarrow{g \downarrow} g(x_2) < g(x_1) \xRightarrow{f \downarrow} f(g(x_2)) > f(g(x_1)) \Leftrightarrow (fog)(x_2) > (fog)(x_1).$$

Άρα η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αφού η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι και "1-1".

3. Η εξίσωση $f(g(x^3+1)) = f(g(4x^2+2x))$ γίνεται

$$(f \circ g)(x^3+1) = (f \circ g)(4x^2+2x) \xLeftrightarrow{f \circ g: "1-1"} x^3+1 = 4x^2+2x \Leftrightarrow x^3-4x^2-2x+1=0$$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν πολυωνυμική.

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο διάστημα $[-1, 0]$.

$$\left. \begin{array}{l} h \text{ συνεχής στο } [-1, 0] \text{ (πολυωνυμική)} \\ h(0) = 1 > 0, h(-1) = -2 < 0 \end{array} \right\} \xRightarrow{\Theta. Bolzano} \text{υπάρχει τουλάχιστον ένα}$$

$$x_1 \in (-1, 0) : h(x_1) = 0$$

- Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$.

$$\left. \begin{array}{l} h \text{ συνεχής στο } [0, 1] \text{ (πολυωνυμική)} \\ h(0) = 1 > 0, h(1) = -4 < 0 \end{array} \right\} \xRightarrow{\Theta. Bolzano} \text{υπάρχει τουλάχιστον ένα}$$

$$x_2 \in (0, 1) : h(x_2) = 0$$

- Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο $[1, 5]$.

$$\left. \begin{array}{l} h \text{ συνεχής στο } [1, 5] \text{ (πολυωνυμική)} \\ h(1) = -4 < 0, h(5) = 16 > 0 \end{array} \right\} \xRightarrow{\Theta. Bolzano} \text{υπάρχει τουλάχιστον ένα}$$

$$x_3 \in (1, 5) : h(x_3) = 0$$

και επειδή η εξίσωση $h(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$ είναι πολυωνυμική 3^{ου} θα έχει το πολύ τρεις ρίζες, άρα έχει ακριβώς τρεις τις x_1, x_2, x_3 .

Επίσης έχουμε $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 5$, δηλαδή έχουμε δύο θετικές και μια αρνητική.

Σχόλιο: ένας τρόπος για τη επιλογή των κατάλληλων διαστημάτων είναι με δοκιμές.

4. Από το ερώτημα (2) η συνάρτηση $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η ανίσωση γίνεται:

$$(f \circ g)(x^3 + 4) > (f \circ g)(3x^2) \stackrel{f \circ g: \uparrow}{\Leftrightarrow} x^3 + 4 > 3x^2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x+1) > 0 \stackrel{x \neq 2}{\Leftrightarrow} x > -1$$

Άρα $x \in (-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

1. Πρέπει: $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$. Άρα $A_f = (0, +\infty)$.

$$2. f(x) = \ln(e^x - 1) - x = \ln(e^x - 1) - x \ln e = \ln(e^x - 1) - \ln e^x = \ln \frac{e^x - 1}{e^x} \Rightarrow f(x) = \ln \left(1 - \frac{1}{e^x} \right).$$

$$\text{Όμως } 1 - \frac{1}{e^x} < 1 \Leftrightarrow \ln \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) < \ln 1 \Leftrightarrow f(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

3. Από τα προηγούμενα έχουμε: $f(x) = \ln \left(1 - \frac{1}{e^x} \right)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$. Τότε:

$$0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_1}} > \frac{1}{e^{x_2}} \Leftrightarrow -\frac{1}{e^{x_1}} < -\frac{1}{e^{x_2}} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{e^{x_1}} < 1 - \frac{1}{e^{x_2}} \Leftrightarrow$$

$$\ln \left(1 - \frac{1}{e^{x_1}} \right) < \ln \left(1 - \frac{1}{e^{x_2}} \right) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

4. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ θα είναι '1-1', που σημαίνει ότι είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\ln x$ και $1 - \frac{1}{e^x}$ στο $A_f = (0, +\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της (πεδίο ορισμού της f^{-1}) είναι:

$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, 0)$ γιατί:

- Θέτουμε $u = 1 - \frac{1}{e^x}$ και έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) = 1 - 1 = 0$.

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) \right] = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty.$$

- Θέτουμε $u = 1 - \frac{1}{e^x}$ και έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) = 1$.

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) \right] = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0.$$

Με $y \in (-\infty, 0)$ η εξίσωση

$$y = \ln \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) \Leftrightarrow e^y = 1 - \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} = 1 - e^y \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{1 - e^y} \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{1 - e^y} \Leftrightarrow$$

$$x = \ln(1 - e^y)^{-1} \Leftrightarrow x = -\ln(1 - e^y).$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = -\ln(1 - e^x), \quad x < 0.$$

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$t(x) = f(x) - h(x) = \ln \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) - \ln \frac{1}{x} = \ln \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) + \ln x, \quad x > 0.$$

Η συνάρτηση t είναι συνεχής, ως άθροισμα των συνεχών $f(x)$, $\ln x$ και γνησίως αύξουσα στο $B = (0, +\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της θα είναι

$$t(B) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} t(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} t(x) \right) = (-\infty, +\infty) \text{ γιατί:}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} t(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + \ln x) = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$ και
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} t(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + \ln x) = 0 + (+\infty) = +\infty$

Επειδή το $0 \in (-\infty, +\infty) = t(B)$ υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $t(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = h(x_0)$.

6. Από το 2^ο ερώτημα έχουμε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Τότε

$$\frac{f(1)}{f(2)} > 0, \text{ αφού } f(1) < 0 \text{ και } f(2) < 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1)x^3 + x^2 + 2}{f(2)x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1)x^3}{f(2)x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(1)}{f(2)} x \right) = \frac{f(1)}{f(2)} (+\infty) = +\infty.$$

ΘΕΜΑ Δ

1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2f(x_1) = 2f(x_2)$, (1) και $f^3(x_1) = f^3(x_2)$, (2), προσθέτουμε τις (1) και (2), έτσι έχουμε $f^3(x_1) + 2f(x_1) = f^3(x_2) + 2f(x_2)$, οπότε $x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$, άρα η συνάρτηση f είναι 1-1.

2. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία $y = \alpha$ έχει με τη C_f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, δηλαδή η εξίσωση $\alpha = f(x)$ έχει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ λύση στο $\mathbb{R}$.

$$\alpha = f(x) \Leftrightarrow f(x) - \alpha = 0 \Leftrightarrow (f(x) - \alpha) \left(\underbrace{f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2 + 2}_{>0} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$f^3(x) - \alpha^3 + 2f(x) - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow f^3(x) + 2f(x) = \alpha^3 + 2\alpha \Leftrightarrow x + 1 = \alpha^3 + 2\alpha \Leftrightarrow x = \alpha^3 + 2\alpha - 1$
δηλαδή για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε λύση, άρα το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.

Θέτουμε όπου $f(x) = y \Rightarrow y^3 + 2y = x + 1 \Rightarrow x = y^3 + 2y - 1$.

Άρα $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

3. 1^{ος} τρόπος: Στην $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 1$, για $x = 0$ έχουμε

$$f^{-1}(0) = 0^3 + 0 - 1 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = -1 \Leftrightarrow f(-1) = 0.$$

2^{ος} τρόπος: Αφού η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και είναι 1-1 θα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0$. Θέτουμε στην $f^3(x) + 2f(x) = x + 1$ όπου $x = x_0$ και

έχουμε: $f^3(x_0) + 2f(x_0) = x_0 + 1 \Rightarrow 0^3 + 2 \cdot 0 = x_0 + 1 \Leftrightarrow x_0 = -1$, οπότε $f(-1) = 0$. Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-1, 0)$.

4. 1^{ος} τρόπος: Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και έστω $f(x_1) \geq f(x_2)$. Τότε:

$$f(x_1) \geq f(x_2) \Leftrightarrow 2f(x_1) \geq 2f(x_2) \quad (1) \text{ και } f^3(x_1) \geq f^3(x_2) \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) έχουμε:

$$f^3(x_1) + 2f(x_1) \geq f^3(x_2) + 2f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 1 \geq x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2. \text{ Άτοπο γιατί } x_1 < x_2.$$

Άρα για κάθε $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2^{ος} τρόπος: Η συνάρτηση $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 1$ είναι γνησίως αύξουσα σαν άθροισμα των αυξουσών συναρτήσεων x^3 , $2x - 1$.

Οι συναρτήσεις f , f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, άρα έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$5. f^3(x) + 2f(x) = x + 1 \Rightarrow f(x) \left(\underbrace{f^2(x) + 2}_{\neq 0} \right) = x + 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{f^2(x)+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)| = \frac{|x+1|}{|f^2(x)+2|} \leq |x+1|,$$

έτσι έχουμε $|f(x)| \leq |x+1| \Leftrightarrow -|x+1| \leq f(x) \leq |x+1|$ και επειδή

$$\lim_{x \rightarrow -1} (-|x+1|) = \lim_{x \rightarrow -1} |x+1| = 0, \text{ από το κριτήριο της παρεμβολής}$$

έχουμε: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 = f(-1)$, άρα συνεχής στο $x_0 = -1$.

6. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Έχουμε $f^3(x) + 2f(x) = x + 1$, **(1)** και $f^3(x_0) + f(x_0) = x_0 + 1$, **(2)**, αφαιρούμε κατά μέλη τις

$$\text{σχέσεις (1) και (2). Έτσι έχουμε } f^3(x) - f^3(x_0) + 2(f(x) - f(x_0)) = x - x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - f(x_0))(f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)) + 2(f(x) - f(x_0)) = x - x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - f(x_0)) \left(\underbrace{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)}_{+} + 2 \right) = x - x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{x - x_0}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = \frac{|x - x_0|}{|f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2|} \leq |x - x_0| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \Leftrightarrow -|x - x_0| \leq f(x) - f(x_0) \leq |x - x_0| \text{ και επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \text{ άρα η συνάρτηση}$$

f είναι συνεχής στο x_0 .

Η επιμέλεια των θεμάτων πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο**.