

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
5^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΘΕΜΑΤΑ (Σε όλη την ύλη)**

ΘΕΜΑ Α

1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αποδείξτε ότι αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Μονάδες 10

2. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση της f στο Δ ;

Μονάδες 5

3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό(Σ)**, αν είναι σωστή, ή με **Λάθος(Λ)**, αν είναι λανθασμένη:

1) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

2) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η f' είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

3) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(\alpha)f(\beta) > 0$, η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα (α, β) .

4) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και δεν είναι 1-1, τότε υπάρχει $x_0 \in \Delta$ στο οποίο η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

5) Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο 0 με $f'(0) = 1$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x+y) = \frac{f(x)}{e^y} + \frac{f(y)}{e^x}.$$

1. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, με $f'(x_0) = \frac{1}{e^{x_0}} - f(x_0)$.

Μονάδες 8

2. Αποδείξτε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

Μονάδες 4

3. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

4. Αν E είναι το εμβαδόν της C_f , του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=2$ & $x=3$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{3}{e^3} < E < \frac{2}{e^2}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+2)-5}{x-1} = 6$$

1. Να αποδείξετε ότι:

$$a) f(3)=5 \text{ και } b) f'(3)=6$$

Μονάδες 6

2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2 - f(x)}{\ln(x-3)}$.

Μονάδες 7

3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = xf(x) - 3x - 7 \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο.

Μονάδες 5

4. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $g'(x) \leq f'(3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $g(x) = x^6$, έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f^3(x) + f(x) = 2x$.

α) Να βρείτε το πρόσημο της f .

Μονάδες 3

β) Βρείτε τις ρίζες και τη μονοτονία της f .

Μονάδες 3

γ) Αποδείξτε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και εξετάστε την ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

Μονάδες 5

δ) Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $xf'(x) < f(x) < 2x$.

Μονάδες 6

ε) Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 3

στ) Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=5$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Τα θέματα Β & Δ επιμελήθηκε ο **Κωνσταντόπουλος Λεωνίδας**, Μαθηματικός-MSc του Γυμνασίου Βάρδας Ηλείας.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο**.