# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

### ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

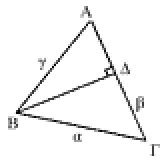
◆ Ευθύ

| Υπόθεση | | Συμπέρασμα |
|---|---|---|
| Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο. | τότε $\Rightarrow$ | το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας. |

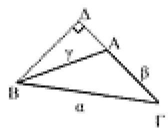
◆ Αντίστροφο

| | | |
|---|---|---|
| Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών. | τότε $\Rightarrow$ | το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. |

### ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ




Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σ' αυτήν: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$




Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σ' αυτήν: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$

Γενικά σε **κάθε τρίγωνο ΑΒΓ** ισχύουν οι ισοδυναμίες:

**i)** $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 1L$ (τρίγωνο αμβλυγώνιο) **ii)** $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 1L$ (τρίγωνο ορθογώνιο)

**iii)** $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 1L$ (τρίγωνο οξυγώνιο)

### ΝΟΜΟΣ ΗΜΙΤΟΝΩΝ

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$$

***Όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου***

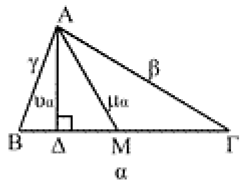
### ΝΟΜΟΣ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$$

### ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΜΕΣΩΝ

***1ο Θεώρημα Διαμέσων***

◆ $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$, ◆ $\alpha^2 + \beta^2 = 2\mu_\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2}$, ◆ $\alpha^2 + \gamma^2 = 2\mu_\beta^2 + \frac{\beta^2}{2}$




• Αντίστοιχοι τύποι υπολογισμού των **τετραγώνων των διαμέσων** από τις πλευρές του τριγώνου:

◆ $\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$, ◆ $\mu_\beta^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4}$, ◆ $\mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$

***2ο Θεώρημα Διαμέσων***

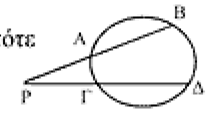
◆ $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \Delta M$

• Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

## ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

**Θεώρημα Ι**

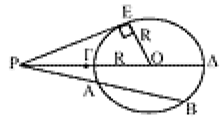
Αν δύο χορδές ΑΒ, ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ, τότε ισχύει: $\mathbf{PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta}$




**Θεώρημα ΙΙ**

Αν από εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΡΕ και μια ευθεία του τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α, Β τότε ισχύει ότι $\mathbf{PE^2 = PA \cdot PB}$. **Αν θέσουμε ΟΡ=δ τότε ισχύει ότι** $\mathbf{PA \cdot PB = \delta^2 - R^2}$. Η διαφορά $\delta^2 - R^2$ **λέγεται δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο, R)** δηλαδή:

$\Delta^{P}_{(O,R)} = \delta^2 - R^2 = OP^2 - R^2$. Ισχύουν τα εξής:




- $\Delta^{P}_{(O,R)} > 0 \Leftrightarrow$ το Ρ εξωτερικό σημείο του κύκλου (Ο, R)
- $\Delta^{P}_{(O,R)} < 0 \Leftrightarrow$ το Ρ εσωτερικό σημείο του κύκλου (Ο, R)
- $\Delta^{P}_{(O,R)} = 0 \Leftrightarrow$ το Ρ σημείο του κύκλου (Ο, R)

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10: ΕΜΒΑΔΑ

- Τετραγώνου $\mathbf{E = \alpha^2}$
- Ορθογωνίου $\mathbf{E = \alpha\beta}$
- Παραλληλογράμμου $\mathbf{E = \alpha \cdot \upsilon_\alpha = \beta \cdot \upsilon_\beta}$
- Τριγώνου $\mathbf{E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma}$
- Τραπεζίου $\mathbf{E = \frac{B+\beta}{2} \cdot \upsilon}$
- Ισόπλευρου τριγώνου $\mathbf{E = \frac{\alpha^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}$
- Ρόμβου $\mathbf{E = \frac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2}$ όπου $\delta_1$, $\delta_2$ οι διαγώνιοι

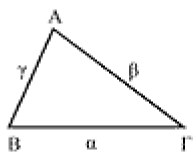
## ΕΙΔΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

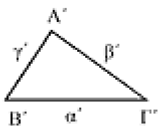
- $\mathbf{E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$ (τύπος του Ήρωνα) όπου τ η ημιπερίμετρος
- $\mathbf{E = \tau \cdot \rho}$ όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου
- $\mathbf{E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}}$ όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου
- $\mathbf{E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma}$

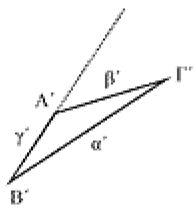
## ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ - ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

- Ο **λόγος των εμβαδών** δύο ομοίων πολυγώνων ισούται με το **τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.**
- Αν μια γωνία Α ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία Α΄ ενός άλλου τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσο με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές δηλ. αν:

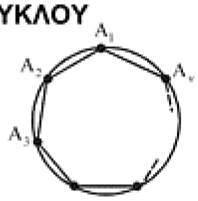
$$\hat{A} = \hat{A}' \text{ ή } \hat{A} + \hat{A}' = 180^0 \text{ τότε } \frac{E_{AB\Gamma}}{E_{A'B'\Gamma'}} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}$$



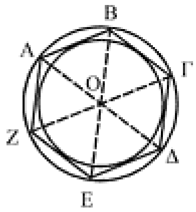



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11: ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ – ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

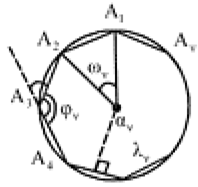



- Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, όταν έχει όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες του ίσες.
- Αν χωρίσουμε έναν κύκλο σε ν ίσα τόξα, τότε τα άκρα των τόξων αυτών είναι **κορυφές κανονικού πολυγώνου.**



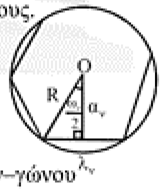

- Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Κάθε κανονικό πολύγωνο περιγράφεται σε κύκλο.
- Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος κάθε κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι κύκλοι.
- Το κέντρο του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου κάθε κανονικού πολυγώνου βρίσκεται από την τομή των διχοτόμων δύο διαδοχικών γωνιών του ή των μεσοκαθέτων δυο μη παραλλήλων πλευρών του.

- **Σε κάθε κανονικό πολύγωνο με ν – κορυφές:**
- συμβολίζουμε με $\lambda_\nu$ την πλευρά του και με $\hat{\varphi}_\nu$ τη γωνία του.
- ισχύει ότι: $\hat{\varphi}_\nu = \left(\frac{2\nu-4}{\nu}\right)L = \frac{2\nu-4}{\nu}\cdot 90^0$




- Η εξωτερική γωνία κάθε κανονικού ν-γώνου δίνεται από τη σχέση:
  $\hat{\varphi}_\nu$εξωτερικη $= 180^0 - \hat{\varphi}_\nu = 180^0 - 2\cdot 90^0 + \frac{4\cdot 90^0}{\nu} = \frac{360^0}{\nu}$
- Η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του πολυγώνου λέγεται **ΑΚΤΙΝΑ** του πολυγώνου.
- Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου από τυχαία πλευρά του πολυγώνου λέγεται **ΑΠΟΣΤΗΜΑ** του πολυγώνου και συμβολίζεται με $\alpha_\nu$.
- Η γωνία που έχει πλευρές δύο διαδοχικές ακτίνες ενός πολυγώνου λέγεται **ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΓΩΝΙΑ** του πολυγώνου και συμβολίζεται με $\hat{\omega}_\nu$. Ισχύει, δε, ότι: $\hat{\omega}_\nu = \frac{360^0}{\nu}$.
- Η γωνία $\hat{\varphi}_\nu$ και η κεντρική γωνία $\hat{\omega}_\nu$ του πολυγώνου είναι παραπληρωματικές. Δηλαδή ισχύει: $\hat{\varphi}_\nu + \hat{\omega}_\nu = 180^0$.

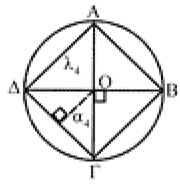
- Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητας είναι ίσος με τον λόγο των πλευρών ή τον λόγο των ακτίνων ή τον λόγο των αποστημάτων τους.




- Σε κάθε κανονικό ν – γωνο με ακτίνα R,ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:
- $\lambda_\nu = 2\cdot R\cdot \eta\mu\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right)$ • $\alpha_\nu = R\cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right)$ • $\alpha_\nu^{\ 2} + \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 = R^2$
- $P_\nu = \nu\cdot\lambda_\nu$, όπου $P_\nu$ η περίμετρος ν–γώνου • $E_\nu = \frac{1}{2}\cdot P_\nu\cdot\alpha_\nu$, όπου $E_\nu$ το εμβαδόν ν–γώνου

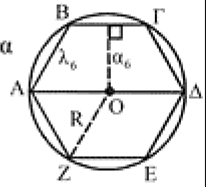
- Αν $\lambda_\nu$ είναι η πλευρά ενός κανονικού ν – γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, R), τότε η πλευρά $\lambda_{2\nu}$ του κανονικού 2ν – γώνου που είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο (O, R) και έχει το διπλάσιο πλήθος πλευρών, δίνεται από τη σχέση: $\lambda_{2\nu} = \sqrt{2R(R-\alpha_\nu)} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}$.
- Αν $\lambda_\nu$ και $\lambda'_\nu$ είναι οι πλευρές δύο κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων αντίστοιχα στον κύκλο (O, R), τότε ισχύει ότι: • $\lambda'_\nu = \frac{\lambda_\nu}{\alpha_\nu}\cdot R$ • $E'_\nu = \frac{1}{2}\nu\cdot\frac{\lambda_\nu}{\alpha_\nu}\cdot R^2$

## ΣΥΝΗΘΗ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

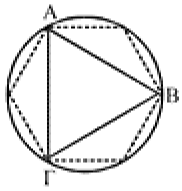



- • Για να εγγράψουμε ένα τετράγωνο σε κύκλο ακτίνας R, αρκεί να φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους και να ενώσουμε τα άκρα τους.
  • Σε ένα τετράγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα R ισχύουν οι σχέσεις:

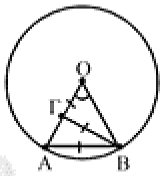
$$λ_4 = R\sqrt{2} \ \text{ και } \ α_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$



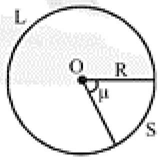

- • Για να εγγράψουμε ένα κανονικό εξάγωνο με ακτίνα R, παίρνουμε από ένα τυχαίο σημείο Α διαδοχικά, έξι ίσες χορδές με μήκος R.
  • Σε κάθε κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα R ισχύουν οι σχέσεις: $λ_6 = R$ και $α_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.




- • Για να εγγράψουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο σε κύκλο με ακτίνα R, εγγράφουμε πρώτα κανονικό εξάγωνο και ενώνουμε τις κορυφές εναλλάξ.
  • Σε ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R ισχύουν οι σχέσεις: $λ_3 = R\sqrt{3}$ και $α_3 = \frac{R}{2}$.




- • Για να εγγράψουμε κανονικό δεκάγωνο σε κύκλο με ακτίνα R, χωρίζουμε την ακτίνα ΟΑ σε μέσο και άκρο λόγο. Βρίσκουμε δηλαδή σημείο Γ τέτοιο, ώστε $ΟΓ^2 = ΟΑ \cdot ΓΑ$. Τότε είναι $λ_{10} = ΟΓ = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$
  • Αν ενώσουμε τις κορυφές κανονικού δεκαγώνου ανά δύο εναλλάξ, τότε προκύπτει κανονικό πεντάγωνο.
- Από τη σχέση $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ προκύπτει η εγγραφή κανονικού δικαπενταγώνου σε κύκλο με ακτίνα R. Αρκεί από το τόξο του κανονικού εξαγώνου να αφαιρέσουμε το τόξο του κανονικού δεκαγώνου.
- Από τη σχέση $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ προκύπτει ένας άλλος τρόπος κατασκευής κανονικού δωδεκαγώνου ως εξής: από το τόξο πλευράς ισόπλευρου τριγώνου αφαιρούμε το τόξο πλευράς τετραγώνου εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο. Το τμήμα που προκύπτει είναι η πλευρά κανονικού δωδεκαγώνου που εγγράφεται στον ίδιο κύκλο.




- Το μήκος ενός κύκλου ακτίνας R ισούται με L=2πR.
- Το μήκος S του τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $μ^0$ δίνεται από τη σχέση: $S = \frac{μ}{360^0} \cdot 2πR$ ή $S = \frac{μ}{180^0} \cdot πR$.
- Το ακτίνιο είναι ένα τόξο με μήκος ίσο με την ακτίνα R του κύκλου.
- Αν ένα τόξο αντιστοιχεί σε γωνία α rad, τότε το μήκος του S δίνεται από τον τύπο:

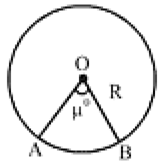
$$S = \frac{α}{2π} \cdot 2πR \ \text{ ή } \ S = α \cdot R$$

- Αν α είναι το μέτρο μιας γωνίας σε rad και $μ^0$ είναι το μέτρο της ίδιας γωνίας σε μοίρες, τότε ισχύει η σχέση:

$\frac{α}{π} = \frac{μ}{180^0}$ ισχύει ότι: $1\text{rad} = 57^0 \ 17' \ 45''$

- Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας R δίνεται από τον τύπο: $E = \pi \cdot R^2$.
- Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί σε γωνία $\mu^0$, δίνεται από τη σχέση:

$$E = \frac{\mu}{360^0}\pi \cdot R^2 .$$

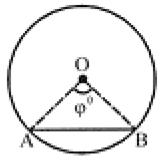



Αν η γωνία του κυκλικού τομέα είναι $\varphi^0$, τότε ισχύει:

$$E = \frac{\varphi}{2\pi}\pi \cdot R^2 = \frac{1}{2}\varphi R^2$$

- Το εμβαδόν ενός κυκλικού τμήματος, δίνεται από τη σχέση:

$$E = \frac{\varphi}{360^0}\pi \cdot R^2 - \frac{1}{2}R^2 \eta\mu\varphi$$




όπου φ είναι η γωνία του τμήματος σε μοίρες.