ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

1.1 Έστω α, β δύο πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha + \dfrac{1}{\beta} = 10$ και $\beta + \dfrac{1}{\alpha} = 2$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\alpha\beta + \dfrac{1}{\alpha\beta}$.

1.2 Αν $x - y = -2$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $A = 6(a - x) - 2[4–9(y–a)] - [3x - 2(6a–7y)] + 5y$.

1.3 Αν $x + y = -1$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $\Pi = x(x-5) + y(y-5) + 2(xy-2)$.

1.4 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 123456^2 - 2 \cdot 123455^2 + 123454^2$.

1.5 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, ω αν δίνεται ότι $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{\omega}{3}$ και $x + y + \omega = 1800$.

1.6 Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 3.

1.7 Να δείξετε ότι η διαφορά τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι περιττός αριθμός.

1.8 Να δείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών
i) είναι περιττός αριθμός **ii)** όταν διαιρεθεί με το 4, δίνει υπόλοιπο 1.

1.9 Να αποδείξετε ότι: $(x+y+z)^2 + (x+y-z)^2 + (x-y+z)^2 + (x-y-z)^2 = 4(x^2+y^2+z^2)$.

1.10 Να αποδείξετε ότι: $(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2 + \alpha^2\beta^2 = (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^2$.

1.11 Να αποδείξετε ότι: $(\alpha-\beta)^3 - \alpha^3 + (\alpha+\beta)^3 + 3\alpha(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha(4\alpha^2+3\beta^2)$.

1.12 Αν $\alpha+\beta+\gamma = 0$, να αποδείξετε ότι: $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 = \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$.

1.13 Να αποδείξετε ότι: $(\alpha^2+\beta^2)^2 + 4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2) = (\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)^2$.

1.14 Αν ισχύουν $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$, $\alpha+\beta+\gamma = 1$ και $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$, με $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$, να αποδείξετε ότι $xy+yz+zx = 0$.

1.15 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2003 \cdot 2005^3 - 2004 \cdot 2002^3$, είναι κύβος ακεραίου αριθμού.

1.16 Σε ένα ορθογώνιο η περίμετρός του είναι $34cm$ και το εμβαδόν του είναι $60cm^2$. Να υπολογίσετε τη διαγώνιο του ορθογωνίου.

1.17 Αν $x+y = 2$ και $xy = -1$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\ , \quad B = x^2+y^2\ , \quad \Gamma = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\ , \quad \Delta = x^3+y^3\ , \quad E = x^4+y^4,\ K = |x-y|$$

1.18 Δίνεται η παράσταση $\Pi = \dfrac{3x^2-12}{(5x-9)^2-(2x-3)^2}$.
α) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση.
β) Να απλοποιηθεί η παράσταση.

1.19 Αφού βρείτε τις τιμές για τις οποίες ορίζονται τα επόμενα κλάσματα, μετά να τα απλοποιήσετε
α) $A = \dfrac{25(2x-1)^2-(6x-1)^2}{4(2x^2-4x+2)}$ **β)** $B = \dfrac{(x-3)(2x-5)^2-16(x-3)}{(2x+9)(6-x)+4x^2-81}$

1.20 Να εξηγήσετε ότι οι επόμενες προτάσεις είναι λανθασμένες.
α) Το άθροισμα δύο οποιονδήποτε άρρητων αριθμών, είναι άρρητος.
β) Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί μεταξύ τους τότε $\alpha^\beta \neq \beta^\alpha$.
γ) Η τιμή της παράστασης $\nu^2-\nu+41$, για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό ν, είναι πρώτος αριθμός.

1.21 α) Ταυτότητα Euler. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma &= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)\\ &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]\end{aligned}$$

β) Να αποδείξετε την ισοδυναμία: $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma \iff \alpha=\beta=\gamma$ ή $\alpha+\beta+\gamma=0$

1.22 Ταυτότητα De Moivre. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$$

1.23 Ταυτότητα Newton. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, να αποδείξετε ότι:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

Εξετάστε τις περιπτώσεις όπου το πρώτο μέλος έχει δύο, τέσσερα ή περισσότερα πρωτοβάθμια πολυώνυμα του x. Μετά προσπαθήστε να εικάσετε τη γενική περίπτωση.

1.24 i) Να αποδείξετε ότι: $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

ii) Να λυθεί η εξίσωση: $(x-1)^3+(x-3)^3+(x-7)^3+(11-3x)^3=0$

1.25 Αν $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, να αποδείξετε ότι: $\alpha=\beta=\gamma=0$.

1.26 Οι αριθμοί α, β είναι μη μηδενικοί και διαφορετικοί μεταξύ τους. Αν $\dfrac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ τότε να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

1.27 α) Να αποδείξετε ότι $\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)+\beta^4=(\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2)^2$.

β) Να αποδείξετε ότι $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$.
Σύμφωνα με το προηγούμενο να διατυπώσετε μία πρόταση.

γ) Να εξηγήσετε ότι ο επόμενος ακέραιος του $100\cdot 101\cdot 102\cdot 103$ ισούται με το τετράγωνο ενός ακέραιου.

1.28 Να αναλύσετε τον ακέραιο $3^{14}+3^{13}-12$, σε γινόμενο από πρώτους παράγοντες.
Απ. $2^6\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 73$

1.29 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ και ισχύει: $\dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y}{\beta}=\dfrac{\omega}{\gamma}$ να αποδείξετε ότι $\dfrac{x^6+y^6+\omega^6}{\alpha^6+\beta^6+\gamma^6}=\left(\dfrac{x^2+y^2+\omega^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)^3$.

1.30 Αν $\alpha+\beta=1$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=2(\alpha^3+\beta^3)-3(\alpha^2+\beta^2)$.

1.31 Αν $x-y=1$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $B=2(x^3-y^3)-3(x^2+y^2)$.

1.32 Αν $\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$ και $\alpha\beta\gamma=-1$, να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ ,\quad B=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\ ,\quad \varGamma=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\ ,\quad \varDelta=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$$

1.33 Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε να αποδείξετε ότι: $\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)=\beta(\beta+\alpha)(\beta+\gamma)=\gamma(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)$

1.34 Να αποδείξετε ότι: $(2x-y-\omega)^3+(2y-\omega-x)^3+(2\omega-x-y)^3=3(2x-y-\omega)(2y-\omega-x)(2\omega-x-y)$.

1.35 Αν $3x=\alpha+\beta+\gamma$ τότε αποδείξτε ότι: $(x-\alpha)^3+(x-\beta)^3+(x-\gamma)^3=3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

1.36 Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε αποδείξτε ότι:
α) $(\alpha+\beta)^3+(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3=3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$.
β) $(\kappa\alpha+\lambda\beta)^3+(\kappa\beta+\lambda\gamma)^3+(\kappa\gamma+\lambda\alpha)^3=3(\kappa\alpha+\lambda\beta)(\kappa\beta+\lambda\gamma)(\kappa\gamma+\lambda\alpha)$.

1.37 Αν $\alpha>0$ και $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2=9$, τότε να δείξετε ότι $\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=0$.

1.38 Αν $\alpha+\frac{1}{\alpha}=2$ τότε να αποδείξετε ότι: $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=\alpha^4+\frac{1}{\alpha^4}$

1.39 Οι αριθμοί α,β είναι αντίστροφοι και επαληθεύουν την ισότητα: $\dfrac{\alpha+\beta+2}{4}=\dfrac{1}{\alpha+1}+\dfrac{1}{\beta+1}$.
Να υπολογίσετε τα α,β.

1.40 Να αποδείξετε ότι: **α)** Ο 15 διαιρεί τον $2^{44}-1$. **β)** Ο 8 διαιρεί τον $3^{2\nu}-1$, $\nu\geq 1$.
γ) Ο $(a-1)^2$ διαιρεί τον $a^{\nu+1}-a^{\nu}-a+1$, $a,\nu\in\mathbb{N}$.

1.41 Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha-\dfrac{\beta}{1+\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}}}+\frac{\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}}{\dfrac{1}{\alpha\beta}}-\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha+\dfrac{\beta}{1-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}}}=(\alpha+\beta)^2.$$

1.42 Έστω α,β,γ είναι οι πλευρές ενός τριγώνου $AB\Gamma$, για τις οποίες ισχύει η ισότητα:
$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma}+\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta}=0$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

1.43 Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ ισχύουν οι ισότητες: $\alpha+\beta+\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$.
Να αποδείξετε ότι: $\alpha=\beta=\gamma=1$.

1.44 Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$, να αποδείξετε ότι:
$$\frac{\alpha^4}{\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma}+\frac{\beta^4}{\gamma^3+\alpha^3-3\alpha\beta\gamma}+\frac{\gamma^4}{\alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta\gamma}=0$$

1.45 Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}+\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)=0$

1.46 Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta(\gamma+2)}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}=3$

1.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών

1.47 Αν $x>1$ τότε να αποδείξετε ότι: i) $x^2>x$ ii) $x^3+x>x^2+1$

1.48 Αν $x>2$ τότε να αποδείξετε ότι: $x^3>2x^2-x+2$

1.49 Αν $\alpha>\beta>0$ να αποδείξετε ότι: $\alpha^2+2\alpha>2\beta+\alpha\beta$.

1.50 Αν $x>y>0$ να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\alpha=x^3-y^3$ και $\beta=(x-y)^3$.

1.51 Αν οι α,β είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, να συγκρίνεται τους αριθμούς:
$x=\alpha^3+\beta^3$ και $y=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$

1.52 Αν $x\geq y>0$ να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\dfrac{x-y}{x+y}$ και $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

1.53 Να αποδείξετε ότι: $(\alpha+\beta+\gamma)^2\geq\alpha(\beta+\gamma-\alpha)+\beta(\gamma+\alpha-\beta)+\gamma(\alpha+\beta-\gamma)$.
Πότε ισχύει η ισότητα;

1.54 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ , ρ αν δίνεται ότι $\kappa^2 + \rho^2 = 4\rho - 4$.

1.55 Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, α, β ισχύει η ισότητα: $(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 = 4(\alpha x + \beta y)$. Να αποδείξετε ότι $x = \alpha$ και $y = \beta$.

1.56 Αν $2(\alpha\beta - \gamma^2) = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta-2\gamma)$ να δείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

1.57 Έστω ότι $-\dfrac{4}{3} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ και $-2 < y < -\dfrac{5}{4}$. Αν $A = 6x - 8y$ και $B = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{2y}{3}$, να αποδείξετε ότι:
i) $2 < A < 19$ ii) $-\dfrac{19}{12} < B < -\dfrac{1}{6}$

1.58 Για τις πραγματικές μεταβλητές α, β γνωρίζουμε ότι $1 \leq \alpha \leq 2$ και $3 < \beta < 4$. Να αποδείξετε ότι:
i) $-10 < 2\alpha - 3\beta < -5$ ii) $3 < \alpha\beta < 8$ iii) $\frac{1}{4} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{2}{3}$ iv) $10 < \alpha^2 + \beta^2 < 20$

1.59 Για τις διαστάσεις α, β ενός ορθογωνίου δίνεται ότι: $8,3 \leq \alpha \leq 8,5$ και $5,7 \leq \beta \leq 5,8$. Να αποδείξετε ότι:
i) Η περίμετρός του βρίσκεται μεταξύ των τιμών 28 και $28,6$.
ii) Το εμβαδόν του βρίσκεται μεταξύ των τιμών $47,31$ και $49,3$.

1.60 Για τις ακτίνες δύο ομόκεντρων κύκλων (O, R) και (O, ρ) δίνεται ότι: $3,5 < R < 4$ και $2 < \rho < 2,2$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου βρίσκεται μεταξύ των τιμών $7,41\pi$ και 12π.

1.61 Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα:

Ανισότητα	$1 \leq x \leq 5$		$x \leq \frac{3}{8}$		$-\frac{3}{2} < x < 4,8$
Συμβολισμός		$[-3, 2)$		$(-3, \infty)$	

1.62 Αν $0 < x < 1$ και $0 < y < 1$, τότε να δείξετε ότι: $0 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$.

1.63 Να αποδείξτε ότι: $2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 2\alpha(\beta+\gamma)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

1.64 Να αποδείξτε ότι: $2x^2 - 2x + 1 > 0$.

1.65 Να αποδείξτε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 3 \geq 2(\alpha + \beta - \gamma)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

1.66 (Ανισότητα Schwarz) **i)** Να αποδείξετε ότι: $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2$.
Αν οι πραγματικοί $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ είναι μη μηδενικοί, τότε στην προηγούμενη σχέση η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{\beta}{y} = \dfrac{\gamma}{z}$.
ii) Να αποδείξτε ότι: $3(\alpha^4 + \alpha^2 + 1) \geq (\alpha^2 + \alpha + 1)^2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

1.67 Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ το οποίο έχει περίμετρο $20m$. Αν $AB = \Gamma\Delta = xm$ και συμβολίσουμε με $E(x)$ το εμβαδόν του, τότε να αποδείξετε ότι:
i) $A\Delta = B\Gamma = 10 - x$ **ii)** $0 < x < 10$ **iii)** $E(x) = -x^2 + 10x$ **iv)** $E(x) \leq 25$
v) Ένα ορθογώνιο με σταθερή περίμετρο $20m$ έχει το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

1.68 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους δίνεται ότι: $x^2 + y^2 + 6y \leq 2(5x - 17)$.

1.69 Αν οι α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να συγκρίνεται τους αριθμούς:
$x = \alpha^3 + 2\beta^3$ και $y = 3\alpha\beta^2$

1.70 α) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει ότι: $\left(\dfrac{2\nu}{2\nu+1}\right)^2 < \dfrac{\nu}{\nu+1}$.
β) Να αποδείξετε ότι: $\left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2000}{2001}\right)^2 < \dfrac{1}{1001}$.

1.71 Αν $x > 2$ να συγκρίνετε τους αριθμούς x^3 και $7x - 6$.

1.72 Αν $\omega > 2$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $A = \omega^3$ και $B = \omega^2 + \omega + 2$.

1.73 Αν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{\gamma}{\delta}$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 + \delta^2 \geq \beta^2 + \gamma^2$.
Πότε ισχύει η ισότητα;

1.74 Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 1$, να αποδείξετε ότι:
i) $\alpha\beta \leq \dfrac{1}{4}$ ii) $\left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\beta}\right) \geq 9$ iii) $\alpha^2 + \beta^2 \geq \dfrac{1}{2}$ iv) $\alpha^4 + \beta^4 \geq \dfrac{1}{8}$
Πότε ισχύει οι ισότητες;

1.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

1.75 Ονομάζουμε $max\{\alpha,\beta\}$ τον μεγαλύτερο από τους πραγματικούς α,β.
Δηλαδή $\quad max\{\alpha,\beta\}=\begin{cases}\alpha & \text{αν } \alpha\geq\beta\\ \beta & \text{αν } \alpha<\beta\end{cases}.$
Προσπαθήστε να ορίσετε την απόλυτη τιμή ενός $\alpha\in\mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας την έννοια του max.
Μετά εξηγήστε τις ιδιότητες: $\quad |a|=|-a|\geq 0 \quad , \quad |a|\geq a \quad$ και $\quad |a|\geq -a$.

1.76 Να γράψετε χωρίς απόλυτα την παράσταση: $A=\left|-x^2-1\right|-\left|x^2-2x+1\right|$

1.77 Να αποδείξετε ότι: $\left|\alpha^2+6\alpha+9\right|-\left|\alpha^2-6\alpha+9\right|=12\alpha$.

1.78 Να αποδείξετε ότι η παράσταση: $A=\left|\alpha^2+2\alpha+1\right|+\left|\alpha^2-2\alpha+1\right|-2\left|\alpha^2+3\right|$, είναι ανεξάρτητη του α.

1.79 Αν $\alpha\leq\beta\leq\gamma$, να αποδείξετε ότι: $|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|-|\gamma-\alpha|=0$.

1.80 Αν $-2<x<1$ και $-2<y<1$ να αποδείξετε ότι η παράσταση:
$A=|x+3y+8|+|2x+y-3|+x-2y$ είναι σταθερή.

1.81 Να γράψετε τις επόμενες παραστάσεις χωρίς απόλυτα
α) $A=|x-1|+x-5$ $\qquad$ β) $B=2\,|2-x|-3x+1$

1.82 Να γράψετε τις επόμενες παραστάσεις χωρίς απόλυτα
i) $A=5\,|x-1|+|2+x|-x-4$ $\qquad$ ii) $B=|2x-1|-|x+3|+x$

1.83 Να υπολογίσετε τις τιμές του ακέραιου x, αν ισχύουν οι επόμενες ισότητες:
$|2x-5|=5-2x \qquad$ και $\qquad |x-1|=x-1$.

1.84 α) Αν $x\neq 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει: $\dfrac{x}{|x|}\leq 1$.
β) Αν $x,y,z\neq 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει: $\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{y}{|y|}+\dfrac{z}{|z|}\leq 3$.
γ) Αν $\alpha,\beta\neq 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει: $\dfrac{2\alpha}{|\alpha|}+\dfrac{3\beta}{|\beta|}\leq 5$.

1.85 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x,y,ω, αν δίνεται ότι:
$|2x+6|+|3x-2y-1|+|-x+4y-3\omega-7|=0$.

1.86 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β, αν δίνεται ότι: $\quad |2\alpha-3\beta+13|+|5\beta+4\alpha-7|=0$.

1.87 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $|2x-1|=|x+1|$ $\qquad$ β) $|3-x|=|7x-9|$ $\qquad$ γ) $|4x-5|-|1-2x|=0$

1.88 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $|x-2|=3$ $\qquad$ β) $|6-5x|=14$ $\qquad$ γ) $\left|1+\frac{2}{3}x\right|=\frac{5}{6}$

1.89 Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ και $x=\dfrac{\alpha}{|\alpha|+|\beta|}\quad,\quad y=\dfrac{\beta}{|\alpha|+|\beta|}$ να αποδείξετε ότι: $|x|+|y|=1$

1.90 Αν $\alpha,\beta\neq 0$ και $\alpha\,|\beta|=\beta\,|\alpha|$ τότε δείξτε ότι οι α,β είναι ομόσημοι.

1.91 Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει ότι $\alpha\,|\beta|+\beta\,|\alpha|=0$, τότε δείξτε ότι αυτοί είναι ετερόσημοι.

1.92 Αν $\left|\dfrac{\alpha+25}{\alpha+1}\right|=5$ τότε $\quad |\alpha|=5$.

1.93 Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha+\beta\neq 0$, να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right|+\left|\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right|\geq 1$

1.94 Αν $x,y\in\mathbb{R}\quad$ και $\quad d(2x,3y)=3y-2x$, τότε $\quad y\geq\dfrac{2x}{3}$.

1.95 Να λυθούν οι ανισώσεις:
α) $|x-1|<2$ β) $|x+3|\le 7$ γ) $|3-2x|\le 15$
δ) $|x+5|>3$ ε) $|4x-5|\ge 3$

1.96 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, για τους οποίους ισχύει:
α) $|\alpha-5|<|\alpha+2|$ β) $d(\alpha,-4)>d(5,\alpha)$

1.97 Να βρείτε τους $x\in\mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει: **α)** $\dfrac{|x-6|}{|4-x|}<1$ **β)** $\dfrac{d(2x,-3)}{d(1,2x)}\ge 1$

1.98 Για τους $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις $|x|\le 2$ και $|y|\le 3$. Να αποδείξετε ότι:
i) $|5x-2y|\le 16$ ii) $|-3x+7y+1|\le 28$

1.99 Να αποδείξετε ότι: $\left|a^2+4a+5\right|-3=\left|2a-a^2-2\right|+6a$.

1.100 Αν $-1<a<2$ να αποδείξετε ότι η παράσταση: $\Pi=\Big||\alpha+1|-3\Big|-\Big|4+|a-2|\Big|$ είναι σταθερή.

1.101 Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2\,|\alpha|-\beta^2\,|\beta|=(|\alpha|-|\beta|)(\alpha^2+|\alpha\beta|+\beta^2)$.

1.102 Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β να αποδείξετε ότι:
i) $\alpha\beta+|\alpha\beta|\ge\alpha\,|\beta|+\beta\,|\alpha|$ ii) $\alpha\beta-|\alpha\beta|\le\alpha\,|\beta|-\beta\,|\alpha|$

1.103 Για τους $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει η ισότηται: $|5x+3y-6|=5\,|x|+3\,|y-2|$.
Να αποδείξετε ότι: $x(y-2)\ge 0$.

1.104 Αν $\alpha,\beta\ne 0$, να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|\ge 2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

1.105 Αν $x\in\mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\ge 2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

1.106 Να βρείτε τους $x\in\mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει: α) $\dfrac{|x-6|}{|4-x|}<1$ β) $\dfrac{d(2x,-3)}{d(1,2x)}\ge 1$

1.107 Αν $\alpha,\kappa,x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:
i) $|\alpha+4|+|3-\alpha|\ge 7$ **ii)** $|\kappa+5|+|\kappa-9|\ge 14$
iii) $|x+2|+|7-4x|+|3x-5|\ge 4$

1.108 Να αποδείξετε ότι:
i) $\dfrac{(x+2)^2}{|x+2|}+\dfrac{(1-x)^2}{|1-x|}\ge 3$ με $x\ne 1$ και $x\ne -2$
ii) $\dfrac{4\alpha^2-4\alpha+1}{|2\alpha-1|}+\dfrac{4\alpha^2+4\alpha+1}{|2\alpha+1|}\ge 2$ με $\alpha\ne\frac{1}{2}$ και $\alpha\ne-\frac{1}{2}$

1.109 Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι: **i)** $\Big||\alpha|-|\beta|\Big|\le|\alpha+\beta|$ **ii)** $\Big||\alpha|-|\beta|\Big|\le|\alpha-\beta|$

1.110 Για ποιούς πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύουν οι επόμενες ισότητες;
i) $|\alpha-\beta|=|\alpha+\beta|$ **ii)** $|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta|$

1.111 Αν $x,y\in\mathbb{R}^*$ και $\left|\dfrac{x\,|y|-y\,|x|}{xy}\right|=2$, τότε να αποδείξετε ότι οι x,y είναι ετερόσημοι.

1.112 Να αποδείξετε ότι:
i) $||x+1|+x+1|+||x+1|-x-1|-2\,|x+1|=0$
ii) $||x-2|-2+x|+||2-x|-x+2|-|4-2x|=0$

1.113 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β, για τους οποίους ισχύει η σχέση:
$|\alpha+3|\le 2\beta-1-\beta^2$

1.114 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, για τους οποίους ισχύει η σχέση:
$\left|x^2-2x\right| \leq 4x-x^2-4$

1.115 Αν $-2<x<1$ να αποδείξετε ότι: $\left|x^2-3x-10\right|<20$.

1.116 Αν $|x|<1$ και $-1<y<3$ να αποδείξετε ότι: $\left|x^2-3xy-y+1\right|<14$.

1.117 Αν $|x| \neq |y|$ τότε $\dfrac{|x|}{|x+y|}+\dfrac{|y|}{|x-y|} \geq 1$.

1.118 Να βρεθούν οι φυσικοί αριθμοί μ, ν, για τους οποίους ισχύει η ισότητα:
$|3\mu-2\nu+5|+|\nu+1-5\mu|+5\mu=\nu+1$.

1.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών

1.119 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1. Αν $\alpha, \beta>0$ τότε $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.
2. Αν $x<1$ τότε ισχύει $\sqrt{x^2-2x+1}=x-1$.
3. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{(x+1)(x-1)}=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$.

1.120 Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{75+\sqrt{51-5\sqrt{15-3\sqrt{4}}}}=9$

1.121 Αν $x=\sqrt{7}+\sqrt{5}$ και $y=\sqrt{7}-\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης: x^2-xy+y^2.

1.122 Να αποδείξετε τις επόμενες ισότητες:
i) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2}=1-\sqrt{2}$
ii) $(5\sqrt{2}-3)(5\sqrt{2}+3)-(4-2\sqrt{3})^2-8\sqrt{3}(2-\sqrt{3})=37$.

1.123 Αν $\alpha=2+\sqrt{2}$, $\beta=2+\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\gamma=2-\sqrt{2+\sqrt{2}}$, να αποδείξετε ότι $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=2$.

1.124 Αν $\alpha=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, $\beta=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, $\gamma=\sqrt{2+\sqrt{3}}$, να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1$.

1.125 Να γράψετε τις επόμενες παραστάσεις χρησιμοποιώντας μία ρίζα.
α) $5\sqrt{12}-2\sqrt{147}+\sqrt{108}$
β) $4\sqrt{162}-3\sqrt{50}+\sqrt{242}-3\sqrt{128}-\sqrt{18}$

1.126 Να γράψετε τις επόμενες παραστάσεις χρησιμοποιώντας δύο ρίζες.
α) $5\sqrt{8}-\sqrt{27}+\sqrt{50}-\sqrt{300}-2\sqrt{2}$
β) $3\sqrt{48}-\sqrt{18}-\sqrt{12}+\sqrt{98}+\sqrt{3}$

1.127 Να μετατρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.
α) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ β) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ γ) $\dfrac{6}{\sqrt{12}}$ δ) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ε) $\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}$
ε) $\dfrac{3}{4-\sqrt{7}}$ στ) $\dfrac{4}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ζ) $\dfrac{4}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ δ) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

1.128 Να αποδείξετε ότι:
α) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=5$
β) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}}-\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}-\sqrt{8}}=\dfrac{7}{3}$

1.129 Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=10$

1.130 Να αποδείξετε ότι:
α) $\dfrac{1}{(3-\sqrt{5})^2}-\dfrac{1}{(3+\sqrt{5})^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$
β) $\dfrac{1}{(2-\sqrt{5})^3}+\dfrac{1}{(2+\sqrt{5})^3}=-76$

1.131 α) Να εκτελέσετε τα αναπτύγματα: $\left(\sqrt{2}+1\right)^3$ και $\left(\sqrt{2}-1\right)^3$.
β) Να αποδείξετε ότι: $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$

1.132 Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{2\sqrt{27}+5\sqrt{18}-3\sqrt{45}+18}{2\sqrt{75}+5\sqrt{50}-3\sqrt{125}+30}=\dfrac{3}{5}$

1.133 Να αποδείξετε ότι:
α) $\sqrt{19+\sqrt{35}}<5$ β) $\sqrt{13}+\sqrt{5}<\sqrt{11}+\sqrt{7}$ γ) $\sqrt{13+\sqrt[3]{25+\sqrt[4]{15}}}<4$

1.134 Να αποδείξετε ότι: i) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ii) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$

1.135 Αν $1<x<2$ να απλοποιηθεί η παράσταση: $A=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}-\dfrac{7\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}-\dfrac{2\sqrt{9x^2-36x+36}}{x-2}$.

1.136 Να βρεθούν τα εξαγόμενα: i) $\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}$ ii) $\sqrt[4]{2592}-\sqrt[4]{512}+\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{32}$

1.137 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α) $\sqrt[3]{5-\sqrt{21}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{5+\sqrt{21}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$
β) $\sqrt[4]{3-\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{10}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{3+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$

1.138 Να μετατρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.
α) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{6}}$ β) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ γ) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{125}}$

1.139 Να γράψετε τις παραστάσεις με τη βοήθεια μιας μόνο ρίζας.
α) $\sqrt{\sqrt[3]{7\sqrt[5]{7}}}$ β) $\sqrt{3\sqrt[5]{3\sqrt[3]{9}}}$ γ) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{27\sqrt{3}}}$ δ) $\sqrt[15]{2\sqrt[10]{2\sqrt{8}}}$

1.140 Να βρεθούν τα εξαγόμενα:
α) $\sqrt{5\sqrt[3]{25}}\cdot\sqrt[6]{5}$ β) $\sqrt[27]{2^{14}}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}$ γ) $\sqrt[40]{3^{14}}\cdot\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}}$

1.141 Να βρεθούν τα εξαγόμενα:
α) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}$ β) $\sqrt{243}:\sqrt[4]{3}$ γ) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[6]{3}$
δ) $(\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{5}):\sqrt[6]{25}$ ε) $(\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[5]{7}\cdot\sqrt[15]{7}):(\sqrt{7}\cdot\sqrt[10]{7})$

1.142 Το 1637 ο Fermat διατύπωσε ένα θεώρημα γνωστό ως «το τελευταίο θεώρημα του Fermat»[1]:

Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y, z και ν με $\nu>2$ ώστε να ισχύει: $x^\nu+y^\nu=z^\nu$.

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο, να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο n, ο αριθμός $\sqrt[3]{3n^2+3n+1}$ δεν είναι ακέραιος.

1.143 Να βρείτε την αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης: $x^2-\dfrac{1}{x}+y^2+\dfrac{1}{y}$ για $x=\sqrt{3}+1$ και $y=\sqrt{3}-1$.

1.144 Να αποδείξετε ότι: $(\sqrt{80}-\sqrt{200}-\sqrt{180}+\sqrt{288}-\sqrt{8})(\sqrt{20}-\sqrt{45})=10$.

1.145 Να αποδείξετε ότι: $1+\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}=-2$

1.146 Να μετετρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.
α) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ β) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ γ) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}-\sqrt{1-\sqrt{2}}}$

1.147 Να μετετρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.
α) $\dfrac{x+\sqrt{4-x^2}}{x-\sqrt{4-x^2}}$, με $-2\le x\le 2$ και $x\ne\sqrt{2}$ **β)** $\dfrac{\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\alpha-\beta}}$, με $\alpha>\beta>0$

[1] Το τελευταίο θεώρημα του Fermat αποδείχθηκε το 1993 από τον Andrew Wiles. Ονομάστηκε έτσι επειδή ήταν η τελευταία από τις προτάσεις που είχε σημειώσει ο Fermat στο περιθώριο ενός αντίτυπου των Αριθμητικών του Διόφαντου, μεταφρασμένο στη λατινική.

1.148 Αν $x > 1$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 4x\sqrt{x^2-1}$

1.149 Να μετασχηματίσετε τα επόμενα ριζικά ώστε το αποτέλεσμα να έχει μόνο απλές ρίζες:
α) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ β) $\sqrt{18-8\sqrt{2}}$ γ) $\sqrt{8+2\sqrt{12}}$

1.150 Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{3}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} - \dfrac{3}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = 3$

1.151 Αν $\alpha = \sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{192}$ και $\beta = \sqrt[3]{72} - \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{384} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{162}$
δείξτε ότι: $\alpha \cdot \beta = 1$.

1.152 Δίνεται το κλάσμα $K = \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{36}}$. Να το μετετρέψετε σε ισοδύναμο του, με ρητό παρονομαστή.

1.153 Να υπολογίσετε την παράσταση: $1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots \dfrac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

1.154 Αν $x^2+5y^2=8$, να αποδείξετε ότι: $\sqrt{x^4-10y^2+17} + \sqrt{25y^4-6x^2+57} = 12$.

1.155 Να μετετρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.
α) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}$ β) $\dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y}}$, με $x, y > 0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού

2.1 Να λύσετε την εξίσωση $5(\mu - x) - 6 = \mu(\mu - x) - 3x$, για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου μ.

2.2 Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x-1) = \lambda(x+2)$, με λ πραγματική παράμετρο.
i) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x = \beta$.
ii) Να λύσετε την εξίσωση για της διάφορες τιμές του λ.
iii) Για ποιά τιμή του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -3$;

2.3 α) Να λύσετε την εξίσωση: $\lambda(x-1) = x - \frac{1}{\lambda}$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.
β) Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα, σύμφωνα με τη λύση του προηγούμενου ερωτήματος.

Τιμή του λ	Λύση της εξίσωσης
4	
1	
-1	
	μοναδική λύση ο 3
	1

2.4 Να λύσετε την εξίσωση $\kappa(\kappa x + 5) - 6 = \kappa^2 + x(\kappa + 2)$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$.

2.5 Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων λ, μ ώστε η εξίσωση $\lambda(3x+5) + 49 = \mu(3-2x) + x$ να είναι αόριστη.

2.6 Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων λ, μ ώστε η εξίσωση $\lambda(x-2) = 6x + 9 - 7\mu$ να είναι αδύνατη.

2.7 Να λυθούν οι εξισώσεις: **α)** $\frac{|x|-2}{2} - \frac{|x|}{4} = 1$
β) $|x-3| - \frac{2|x-3|+1}{3} = \frac{3(|x-3|-1)}{4}$
γ) $\frac{2|4-5x|-1}{3} - \frac{3|4-5x|-2}{4} = \frac{5|4-5x|+4}{6} - \frac{7|4-5x|-6}{6}$

2.8 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $\frac{5-|x-2|}{4} + \frac{2}{3}(|2-x|-2) = \frac{3-|x-2|}{6}$
β) $\frac{|x-3|-1}{3} + \frac{2-|2x-6|}{15} = |3-x| - 1$
γ) $\frac{|2x-1|-1}{4} - \frac{1}{3}\left(\frac{3-|1-2x|}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{|6x-3|-6}{12}$

2.9 Δύο αντικρυστά λιμάνια A και B απέχουν 132 μίλια. Ένα πλοίο ξεκινά από το λιμάνι A με κατεύθυνση το B, με ταχύτητα 24 μίλια την ώρα. Μετά από μία ώρα ένα δεύτερο πλοίο ξεκινά από το λιμάνι B με κατεύθυνση το A, με ταχύτητα 30 μίλια την ώρα. Σε πόσο χρόνο από τον απόπλου του πρώτου πλοίου θα συναντηθούν; Πόσο απέχει το σημείο συνάντησης από τα δύο λιμάνια;

2.10 Να λυθούν οι επόμενες εξισώσεις για κάθε τιμή της πραγματικής παραμέτρου μ.
i) $\mu^3 x - \mu^2 - 4 = 4\mu(x-1)$ ii) $\mu^3(x-1) = 4\mu x + 8$

2.11 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $(\alpha x - \beta)^2 + (\beta x - 1)^2 = (\beta x - \alpha)^2 + (\alpha x - 1)^2$
β) $(x+\lambda)(\lambda - \mu) + (x+\mu)(\lambda+\mu) = (\lambda+\mu)^2$

2.12 Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x+\alpha}{x-\alpha} + \frac{x+\beta}{x-\beta} = 2$, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α και β.

2.13 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $||x|+3| = 4$ β) $||x+1|-1| = 2$ γ) $|2|x-1|+1| = 3$

2.14 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $|x-2| + x = 8$ β) $|3x-1| = x+1$ γ) $|x+1| + |x-1| = 2$

2.15 Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $\left|x^2+2x+1\right| - \left|x^2+3\right| - 5x = 3$ **ii)** $\left|4x^2+4x+1\right| - 2\left|x^2+1\right| = 2 + 2x^2$

2.16 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η εξίσωση: $\frac{\alpha+2}{x-1} + \frac{4}{x^2-1} = \frac{\beta-3}{x+1}$
να έχει δύο τουλάχιστον λύσεις.

2.2 Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$

Οι λύσεις της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$ παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

	α	ν	Ρίζες της $x^\nu = \alpha$
	$\alpha = 0$		0
Η εξίσωση	$\alpha > 0$	άρτιος	$\sqrt[\nu]{\alpha}$ και $-\sqrt[\nu]{\alpha}$
$x^\nu = \alpha$		περιττός	$\sqrt[\nu]{\alpha}$
	$\alpha < 0$	άρτιος	αδύνατη
		περιττός	$-\sqrt[\nu]{\lvert\alpha\rvert}$

2.17 Ο όγκος ενός κύβου είναι 729 cm^3. Να βρείτε το μήκος της ακμής του.

2.18 Σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο το πλάτος του είναι διπλάσιο του ύψους του και το μήκος του τριπλάσιο του ύψους του. Αν ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι 2058 cm^3, να υπολογίσετε τις διαστάσεις του.

2.19 Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^5 - 81x = 0$ β) $64x^5 - x^3 = 0$ γ) $8x^4 + x = 0$
δ) $6x^5 + 3x = 0$ ε) $135x^8 + 40x^5 = 0$ στ) $x^{105} - x^5 = 0$

2.20 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $(x+6)^5 = 32$ β) $(x-5)^4 - 216(x-5) = 0$ γ) $(2x-1)^5 + 4x = 4x^2 + 1$

2.21 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $x^6 + x^4 - x^2 - 1 = 0 = 0$ β) $x^{11} - 32x^6 + x^5 - 32 = 0$

2.22 Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^{1962} + 128x^{1969} = 0$ β) $x^{2050} + x^{50} = 2x^{1050}$ γ) $8888x^{2001} + 1111x^{2004} = 0$

2.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού

2.23 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $x^2 + 2\sqrt{5}x - 1 = 0$ β) $\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$

2.24 Να βρείτε το θετικό πραγματικό αριθμό x, αν οι αριθμοί $x+1$, $3-x$ είναι αντίστροφοι.

2.25 Να λυθεί η εξίσωση: $(x^2 - 3x - 10)^2 + (3x^2 + 5x - 2)^4 = 0$

2.26 Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $\left|2x^2 - 9x - 5\right| + \left|1 - 4x^2\right| = 0$ β) $|x| + \left|x^2 - x\right| = -\left|x + x^3\right|$

2.27 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, με $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3\alpha x^2 - (4\alpha - 3\beta)x + \alpha - \beta = 0$ έχει ρητές ρίζες, από τις οποίες η μία είναι σταθερή.

2.28 Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha > 0$ και $\beta > \alpha + \gamma$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει ρίζες άνισες.

2.29 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (4a - 7)x + 3a^2 - 17a + 10 = 0$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \geq -1$.
i) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της είναι περιττός αριθμός.
ii) Να υπολογίστεί η τιμή του a έτσι, ώστε η μεγαλύτερη ρίζα να είναι τετραπλάσια της μικρότερης.

2.30 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\mu - 3)x + \mu^2 - 5\mu - 2 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.
α) Για ποιές τιμές του μ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα;
β) Για τις τιμές του μ που θα βρείτε στο ερώτημα α), να λύσετε την εξίσωση.

2.31 Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda - 2)x^2 + 2(2 - \lambda)x + 3 - 5\lambda = 0$, με λ πραγματική παράμετρο. Για ποιές τιμές του λ η εξίσωση έχει δύο ίσες ρίζες;
Για τις τιμές του λ που θα βρείτε, να λύσετε την εξίσωση.

2.32 Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση: $(2\lambda + 1)x^2 + 3(\lambda - 1)x - \lambda + 1 = 0$ έχει δύο ίσες ρίζες.

2.33 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, για τις οποίες η εξίσωση:
$(3 - 2\lambda)x^2 - 4x - 1 = 0$, έχει δύο διαφορετικές ρίζες.

2.34 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x + 1 = 0$, με ρίζες x_1, x_2. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α) $x_1^2 + x_2^2$ β) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$ γ) $x_1^3 + x_2^3$ δ) $|x_1 - x_2|$

2.35 Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των κύβων των ριζών της εξίσωσης:
$x^2 + \mu x + \frac{\mu^2}{3} - \frac{\alpha}{\mu} = 0$, $\mu \neq 0$, είναι ανεξάρτητο του μ.

2.36 Αν α, β είναι οι ρίζες της εξίσωσης $(x - 2)^2 - \lambda(4x - 3) = 0$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $\left(\alpha - \frac{3}{4}\right)\left(\beta - \frac{3}{4}\right)$ είναι ανεξάρτητη του λ.

2.37 Δίνεται η εξίσωση $4x^2 + (3 + \sqrt{3})x - 2(5 - \sqrt{3}) = 0$.
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2.
β) Να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

2.38 Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 3\alpha x + \alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό $\alpha - \beta$.
β) Να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

2.39 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, για τις οποίες η εξίσωση $(\lambda - 3)x^2 - \lambda x + 3 + \lambda = 0$, έχει μία θετική και μία αρνητική ρίζα.

2.40 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $6x^2 - |x| - 2 = 0$ β) $2(x - 4)^2 - |x - 4| - 15 = 0$
γ) $6(x - 1)^2 - 5\,|1 - x| - 6 = 0$

2.41 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $(x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x) - 2 = 0$ β) $(x^2 - 1)^2 - 4(1 - x^2) - 21 = 0$

2.42 Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ β) $3x^4 + 16x^2 + 5 = 0$ γ) $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

2.43 Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $\dfrac{2x + 1}{x - 1} - \dfrac{3}{x^2 - x} = \dfrac{x - 2}{x}$ β) $\dfrac{3x - 1}{x + 2} - \dfrac{18}{2 - x} = \dfrac{7x^2 - 28}{x^2 - 4} + \dfrac{7}{2 + x}$

2.44 Να λύσετε την εξίσωση $3x^2 + 5\,|x| + x = 9$.

2.45 Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 - 2(2\alpha - \beta)x + 4\alpha - 2\beta - 1 = 0$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες, για κάθε τιμή των α, β, τις οποίες να βρείτε.
ii) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα α, β , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα. Ποια είναι τότε η διπλή ρίζα της εξίσωσης;

2.46 Δίνεται η εξίσωση: $(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\gamma)(x-\alpha)=0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πάντοτε πραγματικές ρίζες.
ii) Πότε η εξίσωση έχει ίσες ρίζες; Ποιές είναι αυτές;

2.47 Αν α, β, γ είναι πλευρές ενός τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι οι επόμενες εξισώσεις δεν έχουν πραγματικές ρίζες.
i) $\beta\gamma x^2 - (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)x + \beta\gamma = 0$ ii) $\dfrac{\alpha^2}{x+1} - \dfrac{\gamma^2}{x} = \beta^2$

2.48 Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση: $(\lambda-1)x^2 - 2(\lambda-1)x - \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ έχει δύο ίσες ρίζες. Για τις τιμές του λ που θα βρείτε, ποιές είναι οι ίσες ρίζες της εξίσωσης;

2.49 Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, αν η εξίσωση:
$x^2 + 5|3\alpha - \beta - 8|x + 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$, έχει δύο ίσες ρίζες. Ποιες είναι αυτές;

2.50 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$\alpha(\beta-\gamma)x^2 + \beta(\gamma-\alpha)x + \gamma(\alpha-\beta) = 0$, $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq \gamma$ έχει ρητές ρίζες, από τις οποίες η μία είναι σταθερή.

2.51 Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. Αν για τους συντελεστές α, γ της εξίσωσης ισχύει η ισότητα: $|\alpha - \gamma| = |\alpha| + |\gamma|$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

2.52 Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει δύο διαφορετικές ρίζες, τότε να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και με την εξίσωση $\beta^2 x^2 - \alpha\gamma(x-1)^2 + \alpha\gamma = 1$.

2.53 Έστω a και b οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 3x + 1 = 0$. Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{a}{b+1}\right)^2 + \left(\frac{b}{a+1}\right)^2 = 18$.

2.54 Δίνεται η δευτεροβάθμια εξίσωση $|\lambda - 3|x^2 - 2x + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του λ, για τις οποίες:
i) Η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.
ii) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι αντίστροφες.
iii) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης επαληθεύουν την ισότητα $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = \dfrac{1}{2}$.

2.55 Για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού k, οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $2x^2 - (k+4)x + 7 - 2k = 0$, ικανοποιούν την ισότητα $x_1^2 + x_2^2 = 6$;

2.56 Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 6x - 1 = 0$ (1) με ρίζες x_1, x_2. Να κατασκευάσετεδευτεροβάθμια εξίσωση η οποία να έχει ρίζες
i) τις αντίθετες των ριζών της (1)
ii) τις αντίστροφες των ριζών της (1)
iii) δύο μονάδες μικρότερες από τις ρίζες της (1)

2.57 Να οριστεί ο πραγματικός αριθμός λ, ώστε οι εξισώσεις:
$(\lambda-1)x^2 - (2\lambda+1)x + 2 = 0$ $(\lambda+1)x^2 - (4\lambda-1)x - 2 = 0$
να έχουν μία κοινή ρίζα. Να βρείτε την κοινή ρίζα.

2.58 Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 2(\gamma-\alpha)x + \alpha^2 + 2\beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, η οποία έχει πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε ότι:
α) $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$
β) Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα τον αριθμό $\beta - \alpha$.

2.59 Θεωρούμε την εξίσωση $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)x^2 + 2(\alpha + \beta + \gamma)x + 3 = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$, η οποία έχει πραγματικές ρίζες.
α) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα α, β, γ
β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης.

2.60 Αν οι εξισώσεις $x^2 + ax + bc = 0$, $x^2 + bx + ca = 0$ έχουν μία μόνο κοινή ρίζα, διαφορετική του μηδενός, να αποδείξετε ότι οι άλλες ρίζες των δύο εξισώσεων, είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + cx + ab = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

3.1 Ανισώσεις 1ου βαθμού

3.1 Να βρεθεί ο ακέραιος αριθμός x ο οποίος επαληθεύει τις σχέσεις:
$\frac{5x-2}{3} - \frac{4-7x}{6} > \frac{1-3x}{12}$ και $\frac{4-x}{2} - \frac{6x-1}{4} \geq -1 - \frac{x}{8}$

3.2 Τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα μεγαλύτερο του 12 και μικρότερο του 17. Να βρεθούν οι αριθμοί.

3.3 Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί άρτιοι αριθμοί των οποίων το άθροισμα βρίσκεται μεταξύ των αριθμών 19 και 26.

3.4 Να λυθούν οι ανισώσεις:
α) $|x+1| < 5$ β) $|2x-7| < 9$ γ) $|6-3x| \leq 15$
δ) $|3x-2| > 7$ ε) $|12-9x| \geq 6$

3.5 Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2-9}{|x|-3}$.
α) Για ποιές τιμές του x ορίζεται η παράσταση; **β)** Να απλοποιήσετε την παράσταση.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $A \geq 6$.

3.6 Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - 2|x| + 1}{|x|-1}$.
α) Για ποιές τιμές του x ορίζεται η παράσταση; **β)** Να απλοποιήσετε την παράσταση.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $A < 3$.

3.7 Να λυθούν οι ανισώσεις:
α) $2 < |x-5| < 5$ β) $3 < |3-x| < 7$ γ) $1 < |2x-5| < 6$ δ) $5 < |4-6x| < 9$

3.8 Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει η σχέση: $\frac{|x-2|-1}{4} < \frac{|2-x|-3}{2} \leq \frac{1+|-x+2|}{3}$.

3.2 Ανισώσεις 2ου βαθμού

3.9 Αν $f(x) = -2x^2 + x + 1$, τότε $f\left(\frac{1000}{1001}\right) > 0$

3.10 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:
α) $f(x) = -3x^2 + 15x + 42$ και β) $g(x) = 6x^2 - 7x - 5$
γ) $h(x) = 9x^2 - 16x + 8$ και δ) $\varphi(x) = 20x^2 - 60x + 45$

3.11 Να βρεθούν οι τιμές του x, για τις οποίες έχουν έννοια τα επόμενα κλάσματα. Μετά να τα απλοποιήσετε.
α) $A = \frac{x^2-x-6}{2x^2+5x+2}$ β) $B = \frac{9x^2+6x-8}{15x^2+2x-24}$

3.12 Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 6x^2 - 5x - 6$.
α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου, για τις διάφορες τιμές του x.
β) Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά με ένα από τα σύμβολα $<$, $>$, $=$.
α) $f(\sqrt{2}) \cdots 0$ **β)** $f(-0,667) \cdots 0$ **γ)** $f(1,534) \cdots 0$
δ) $f(1,5) \cdots 0$ **ε)** $f(\frac{11}{7}) \cdots 0$ **στ)** $f(-0,\bar{6}) \cdots 0$

3.13 Να λυθούν οι ανισώσεις: α) $3x - x^2 \geq 0$ β) $5 - x^2 < 0$ γ) $3x^2 + 2x - 8 < 0$

3.14 Να αποδείξετε ότι το κλάσμα $K = \dfrac{(-3x^2 + 7x - 5)(4x^2 - 44x + 121)}{-x^2 + 3x - 3}$ είναι μη αρνητικό, για οποιαδήποτε τιμή του πραγματικού αριθμού x.

3.15 Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 4 - x > 0 \\ -2x^2 - x + 6 > 0 \\ -3x^2 + 4x - 2 < 0 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2 - x^2 < 0 \\ -2x^2 - 5x + 12 > 0 \\ x^2 + 3x - 4 < 0 \end{cases}$

3.16 Για ποιές τιμές του x ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις;
α) $A = \sqrt{4 + 3x - x^2}$ β) $B = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{2x^2 - 9x + 4}$

3.17 Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο $\varphi(x) = (\alpha^2 + 1)x^2 - 3\alpha x + 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι θετικό για οποιαδήποτε τιμή του x.

3.18 Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ώστε το τριώνυμο $g(x) = x^2 - ax + a - 1$, να είναι μη αρνητικό.

3.19 Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο $h(x) = -x^2 + 2\alpha x - (\beta + \gamma)^2$, είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου.

3.20 **α)** Να βρείτε τα πρόσημα των τριωνύμων: $f(x) = x^2 - 3x + 4$ και $g(x) = 2x^2 - 5x + 4$.
β) Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών x και y, αν ισχύει η ισότητα:
$(x^2 - 6x + 9)(y^2 - 3y + 4) + (4y + 5)^2(2x^2 - 5x + 4) = 0$

3.21 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 3 = 0$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ, ώστε η εξίσωση να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

3.22 Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού μ, για τις οποίες η ανίσωση
$(\mu + 2)x^2 - 2(\mu - 2)x + 5(\mu - 2) < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3.23 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 2)x - \lambda + 1 = 0$.
α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες τις x_1, x_2.
β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η σχέση: $1 < x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 < 7$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΡΟΟΔΟΙ

4.1 Ακολουθίες

4.1 Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:
i) $a_\nu = \dfrac{(-1)^\nu \nu}{\nu^2+1}$ ii) $a_\nu = \left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu$

4.2 Δίνεται η ακολουθία $a_1 = 1, a_2 = 3$ και $a_{\nu+1}^2 = a_\nu \cdot a_{\nu+2}$–8 για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε τον 5ο όρο της ακολουθίας.
Απ. 577

4.3 Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας (a_ν) με $a_1 = 3$ και $a_{\nu+1} = \dfrac{5a_\nu - 4}{1+a_\nu}$.

4.4 Δίνεται η ακολουθία του Fibonacci, $a_1 = 1, a_2 = 1$ και $a_{\nu+2} = a_{\nu+1} + a_\nu$. Να βρείτε τον 17ο όρο της ακολουθίας.

4.5 Δίνεται η ακολουθία (a_ν) με $a_1 = 1$ και $a_{\nu+1} = \sqrt{1+a_\nu^2}$.

i) Να βρείτε τον 6ο όρο της ακολουθίας.

ii) Μπορείτε να ”εικάσετε” τον γενικό όρο της ακολουθίας;

4.6 Θεωρούμε την ακολουθία (a_ν) με $a_1 = 2$ και $a_{\nu+1} = \dfrac{3+a_\nu}{1-a_\nu}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.
i) Να βρείτε τους έξι πρώτους όρους της ακολουθίας. **ii)** Τι παρατηρείτε;

4.2 Αριθμητική πρόοδος

4.7 Σε μία αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του 2ου , του 4ου και του 6ου όρου είναι 0, ενώ το άθροισμα του 3ου , του 5ου και του 7ου όρου είναι 6. Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου.

4.8 Ένα θέατρο έχει 12 σειρές καθισμάτων. Η πρώτη σειρά έχει 10 καθίσματα και κάθε επόμενη έχει 3 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.
α) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;
β) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;
γ) Σε μια παράσταση τα εισιτήρια της 7ης σειράς διανεμήθηκαν δωρεάν και όλα τα υπόλοιπα πουλήθηκαν προς 30€ το ένα. Πόσα χρήματα εισέπραξε το θέατρο από την παράσταση αυτή;

4.9 Μία ομάδα 324 στρατιωτών παρατάσσεται σε τριγωνικό σχήμα ώστε: στην πρώτη σειρά μπαίνει ένας, στην δεύτερη τρεις, στην τρίτη πέντε κ.τ.λ.
α) Πόσοι θα είναι στην 12η σειρά;
β) Πόσες σειρές σχηματίστηκαν συνολικά;

4.10 **Α.** Σε μία αμφιθεατρική αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η 28 καθίσματα.

α) Πόσα καθίσματα έχει η 10η σειρά;

β) Πόσα καθίσματα υπάρχουν από την 5η έως και την 15η σειρά;

Β. Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στην 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η 12 κ.τ.λ.

α) Από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα;

β) Πόσοι θα είναι οι θεατές;

4.11 Σ' ένα θέατρο, η πρώτη σειρά έχει 70 καθίσματα και η τελευταία έχει 250 καθίσματα. Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η προτελευταία σειρά έχει 140 καθίσματα περισσότερα από τη δεύτερη σειρά.

i) Να αποδείξετε ότι κάθε σειρά καθισμάτων του θεάτρου έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

ii) Να υπολογίσετε το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου.

iii) Την πρώτη παράσταση ενός θεατρικού έργου παρακολούθησαν 100 θεατές, ενώ σε κάθε επόμενη παράσταση ο αριθμός των θεατών διπλασιαζόταν. Ποια είναι η παράσταση στην οποία για πρώτη φορά θα γεμίσει το θέατρο;

4.12 Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί $(\alpha+\beta)^2, \alpha^2+\beta^2$ και $(\alpha-\beta)^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

4.13 **α)** Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες οι αριθμοί x–4, $x + 4$ και $3x$–4 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β) Αν ο αριθμός x–4 είναι ο έκτος όρος της αριθμητικής προόδου του ερωτήματος (α), να βρείτε τον πρώτο όρο της.

γ) Να βρεθεί το άθροισμα των 10 πρώτων όρων αυτής της αριθμητικής προόδου.

4.14 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x + 2) + (x + 5) + (x + 8) + \cdots + (x + 53) = 459$

β) $1 + 7 + 13 + \cdots + x = 280$, με $x > 0$

4.15 Αν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τους αριθμούς:

i) $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$

ii) $\alpha(\beta + \gamma)$, $\beta(\gamma + \alpha)$, $\gamma(\alpha + \beta)$

iii) $(\beta + \gamma - \alpha)^2$, $(\gamma + \alpha - \beta)^2$, $(\alpha + \beta - \gamma)^2$

4.16 Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν οι αριθμοί $\beta + \gamma - \alpha$, $\gamma + \alpha - \beta$, $\alpha + \beta - \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

4.17 Να βρεθούν τρεις αριθμοί, που να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν το άθροισμά τους είναι 3 και το γινόμενό τους είναι –8.

4.18 Να αποδείξετε ότι, αν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε αυτά είναι ανάλογα των αριθμών 3, 4 και 5.

4.19 Δίνεται η ακολουθία $a_\nu = \dfrac{3\nu^2 - 3}{\nu + 1} - 5$.

α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = a_{15} + a_{16} + \ldots + a_{30}$.

γ) Να υπλογίσετε το άθροισμα $B = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{53}$.

4.20 Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\alpha > \beta > \gamma$, οι $\tau, \alpha, \beta, \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. (τ *είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου*).

4.21 Η τιμή αγοράς ενός εκτυπωτή είναι μεγαλύτερη από 620 €και μικρότερη από 640 €. Κατά την αγορά συμφωνήθηκαν τα εξής:

- Να δοθεί προκαταβολή 120 €.
- Η εξόφληση του υπόλοιπου ποσού να γίνει σε 10 μηνιαίες δόσεις.
- Κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά ω €, όπου ω θετικός ακέραιος.
- Η τέταρτη δόση να είναι 48 €.

α) Να εκφράσετε το ποσό της πρώτης δόσης ως συνάρτηση του ω.

β) Να εκφράσετε την τιμή αγοράς ως συνάρτηση του ω.

γ) Να βρείτε την τιμή του ω.

δ) Να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης.

ε) Να βρείτε την τιμή αγοράς του εκτυπωτή.

4.22 Ένα κολιέ αξίας 2290€ αποτελείται από 33 διαμάντια. Το μεσαίο διαμάντι είναι το ακριβότερο. Τα υπόλοιπα διαμάντια είναι τοποθετημένα κατά σειρά αξίας, ώστε κάθε διαμάντι μέχρι το μεσαίο να αξίζει 2 €λιγότερο από το επόμενό του και στη συνέχεια, από το μεσαίο και πέρα, κάθε διαμάντι να αξίζει 3 €λιγότερο από το προηγούμενό του.

α) Πόσα ευρώ είναι η αξία του μεσαίου διαμαντιού;

β) **i)** Πόσα ευρώ φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το πρώτο;
ii) Πόσα ευρώ φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το τελευταίο;

4.3 Γεωμετρική πρόοδος

4.23 Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο της οποίας ο 4ος όρος ισούται με 108 και ο 8ος όρος ισούται με 8748.

4.24 Να βρείτε τη γεωμετρικής προόδου της οποίας ο 3ος όρος ισούται με 24 και ο 8ος όρος ισούται με 768.

4.25 Ένας πληθυσμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μία ώρα:

Α. Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια, να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από 6 ώρες.

Β. Στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων ψεκάζεται με μια ουσία, η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί την καταστροφή $3^3 \cdot 10$ βακτηριδίων κάθε ώρα.

Β1. Να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά τον ψεκασμό.

Β2. Μετά από πόσες ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν τα βακτηρίδια;

4.26 Να βρεθεί ο x ώστε οι αριθμοί $x+4, 3x, 4–7x$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

4.27 Αν οι αριθμοί $x, 10, y$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, ενώ οι αριθμοί $x, 6, y$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να βρεθούν οι x, y.

4.28 Αν οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν συγχρόνως διαδοχικούς όρους, αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

4.29 Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\beta^2\gamma^2 - \alpha^4}{\alpha} + \frac{\alpha^2\gamma^2 - \beta^4}{\beta} + \frac{\alpha^2\beta^2 - \gamma^4}{\gamma} = 0$$

4.30 Αν οι αριθμοί x, y, ω, z είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να αποδείξετε ότι:

i) $(x+z)(y+\omega) - (x+\omega)(y+z) = (y-\omega)^2$ ii) $\dfrac{y+z}{x} = \dfrac{\omega^2 z + z^3}{\omega^3}$

4.31 Να βρεθούν τρεις αριθμοί που να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν το γινόμενό τους είναι 216 και το άθροισμα των άκρων όρων είναι –20.

4.32 Να βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου αν αυτές είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και το άθροισμα όλων των ακμών του είναι 168, ενώ ο όγκος του είναι 512.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

5.1 Η έννοια της συνάρτησης

5.1 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
α) Υπάρχει συνάρτηση f για την οποία να ισχύει $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ και $f(0,5) = 3$.
β) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2-4} = \dfrac{x^3-2^3}{x^2-2^2} = \dfrac{(x-2)(x^2+2x+2^2)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$
έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-2\}$.

5.2 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:
α) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-5x}$ β) $g(x) = \dfrac{|x|}{2x^2-5x-3}$ γ) $h(x) = \dfrac{x^3+2}{|x-2|-3}$

5.3 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:
α) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ β) $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x} + \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}} - x^2 + 3x - 5$
γ) $h(x) = \frac{\sqrt{3-|2-x|}}{x^2-5x+6}$

5.4 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων και να απλοποιηθεί ο τύπος τους
α) $f(x) = \frac{(2x+3)(x-2)+4-x^2}{x^2-2x}$ β) $g(x) = \frac{-x(x+1)+x^3+1}{3x^2+2x-1}$

5.5 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-3|x|}{x^2-9}$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \dfrac{2}{5}$.
δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

5.6 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\kappa x}{x^2+1} - 3 & \text{αν } x < 0 \\ 5x^2 - 2x + \lambda & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$
i) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ αν ισχύει: $f(-1) = 3f(0) - 1$ και $5f(-2) + 10f(1) = 1$.
ii) Να υπολογίσετε την παράσταση $\Pi = \frac{1}{f(0) - f(\frac{1}{2})} + [4 + f(-3)]^2 + 4,84$.

5.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

5.7 Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των επόμενων συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες
α) $f(x) = |2x-3| - 1$ β) $g(x) = x^3 - x$

5.8 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\kappa x - 1}{x^2+1}$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Το σημείο $M(1, \frac{1}{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

α) Να βρείτε την τιμή του κ.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

5.9 Έστω η συνάρτηση $g(x) = x^2 + \kappa x - \lambda - 2$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. τα σημεία $A(-1, -4)$ και $B(4, 6)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της g.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

5.3 Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$

5.10 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1. Η ευθεία με εξίσωση $y = –3x + 5$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$.
2. Η ευθεία με εξίσωση $x + y = 0$ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{O}y$.
3. Οι ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 3$ και $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 4$ είναι παράλληλες.
4. Οι ευθείες με εξισώσεις $2x + y = 5$ και $y = 2x + 9$ είναι παράλληλες.

5.11 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

i) $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{αν } x \leq -1 \\ 5 & \text{αν } -1 < x \leq 2 \\ x-4 & \text{αν } x > 2 \end{cases}$
ii) $g(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{αν } x < -2 \\ 3 & \text{αν } x = -2 \\ -2x+1 & \text{αν } x > -2 \end{cases}$

5.12 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :
i) $f(x) = |x - 2| + 2x - 1$
ii) $g(x) = |2x + 1| - |x - 1|$

5.13 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :
i) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - x$
ii) $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

5.14 Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι επόμενες ευθείες να είναι παράλληλες:

α) $\epsilon_1 : y = \lambda^2 x - 1$ και $\epsilon_2 : y = (2 - \lambda)x + 3$

β) $\epsilon_1 : y = |\lambda - 2|x + \lambda$ και $\epsilon_2 : y = 2|\lambda|x + 6\lambda - 1$

5.15 **α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(–5, 3)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $2x + y = 3$.

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ, αν το σημείο $M(\kappa–1, \kappa^2–4)$ ανήκει στην ευθεία που βρήκατε στο προ-ηγούμενο ερώτημα.

5.16 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :
i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x + 1|} + 2x - 1$
ii) $g(x) = x + \dfrac{x}{|x|} + \dfrac{x - 1}{|x - 1|}$