
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1 Το γραμμικό σύστημα 2×2

1.1 Να εξετάσετε αν τα ζεύγη $(\sqrt{2}, -9)$, $(\frac{10}{\sqrt{2}}, 3)$, $(\sqrt{8}, -3)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{3}y = 4$. Μετά να βρείτε μία άλλη λύση της εξίσωσης.

1.2 Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2(x-3) - 3(y+1) = 5x \\ -(y-3x) + 2 = -11y \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \frac{2x-y}{4} - \frac{y-3}{2} = x - \frac{1}{6} \\ 2(y-1) + x = 1 \end{cases}$$

1.3 Να λυθούν τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} y - \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} \\ \frac{1}{4}(x-4y) + 6 = x - y \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} 8325x + 8326y = 1 \\ 8324x + 8325y = 1 \end{cases}$$

1.4 Να λυθούν τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} (x+2)(y+1) = (x-3)(y-4) \\ (2x+3)(3y+4) = 2(3x+2)(y+1) \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} \frac{3x-4}{3y+5} = \frac{4x-9}{4y+3} \\ 3(x-2) - 5(y+3) = -10 \end{cases}$$

1.5 Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 + 5x = (x+3)^2 + (y-1)^2 + 4y \\ 3(x+y) + 5(y-1) = x+1 \end{cases}$$

1.6 Να λυθούν τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} 43x - 39y = 125 \\ 14x + 35y + 7 = 0 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} (\sqrt{3}-2)x + 2y = \sqrt{3} \\ 5x + (\sqrt{3}+2)y = 7 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$iii) \begin{cases} (\sqrt{5}+3)x + (\sqrt{5}-3)y = 9 + \sqrt{5} \\ 4y - 9x + 22 = 0 \end{cases}$$

1.7 Να λυθούν τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = 5 \\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 2 \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} \sqrt{2} \cdot x - \sqrt{3} \cdot y = \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{2} \cdot y = \sqrt{3} - \sqrt{2} \end{cases}$$

1.8 Να βρεθούν τα α, β αν το σύστημα
$$\begin{cases} (\alpha-2)x - (\alpha+1)y = 3\alpha - \beta + 1 \\ (2\alpha - \beta)x + (\beta-1)y = 2\alpha - 3\beta - 1 \end{cases}$$
 έχει λύση την $(x, y) = (2, -3)$.

1.9 Να βρείτε τους α, β , αν τα συστήματα:

$$\begin{cases} 5x + 4y + 7 = 0 \\ 12 + 2x = 3y \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} (\beta - \alpha)x + (3\alpha - 2\beta)y = \alpha - 3 \\ (\beta + 1)x - (\alpha + 1)y = 2 - 5\alpha - 2\beta \end{cases}$$

έχουν κοινή λύση.

1.10 α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_1 που διέρχεται από τα σημεία $(-2, 3)$ και $(5, -4)$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_2 που διέρχεται από τα σημεία $(\frac{2}{3}, -3)$ και $(6, 5)$.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 .

1.11 Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 11. Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του παίρνουμε αριθμό μικρότερο κατά 63. Ποιος είναι ο αριθμός;

1.12 Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} \mu x + y = 4\mu \\ -2x + \mu y = 3\mu^2 - 2 \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές του μ .

1.13 Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 5x - 2y = 3\kappa + 11 \\ 3y - x = 2(\kappa - 5) \end{cases}$, με $\kappa > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση, για κάθε τιμή του κ . Μετά βρείτε τη λύση (x_0, y_0) του συστήματος.

β) Να βρείτε τις τιμές του κ , για τις οποίες ισχύει η ισότητα: $2x_0^2 = y_0^2 + 17$.

1.14 Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \mu x + 2y = \mu^2 - 2 \\ x + y = 3\mu - 5 \end{cases}$.

α) Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του μ .

β) Όταν το σύστημα έχει μοναδική λύση, την (x_0, y_0) , να βρείτε τις ακέραιες τιμές του μ για τις οποίες ισχύει η σχέση: $-21 < 4x_0^2 - y_0^2 < 49$.

1.15 Έστω D, D_x, D_y είναι οι ορίζουσες ενός γραμμικού συστήματος 2×2 , με αγνώστους x, y . Αν ισχύει η ισότητα $D^2 + D_x^2 + D_y^2 + 2D - 4D_x + 6D_y + 14 = 0$, να βρείτε τη λύση του συστήματος.

1.16 Ένα γραμμικό σύστημα με δύο εξισώσεις και αγνώστους x, y , έχει μοναδική λύση. Αν για τις ορίζουσές του D, D_x, D_y ισχύει η ισότητα $4D_x^2 + D_y^2 + 10D^2 = 2D(2D_x + 3D_y)$, να βρείτε τη λύση του συστήματος.

1.17 Να λύσετε τα συστήματα

$$\begin{array}{lll} \alpha) \begin{cases} ax - y = 2 \\ x + (a + 2)y = -2 \end{cases} & \beta) \begin{cases} kx + y = 2 \\ x + ky = k + 1 \end{cases} & \gamma) \begin{cases} (\lambda - 2)x + \lambda y = 2\lambda \\ 3x + (\lambda + 2)y = 12 \end{cases} \end{array}$$

1.18 Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός μ ώστε οι τρεις εξισώσεις:

$$(3\mu + 2)x + (\mu + 1)y = 2, \quad (5\mu - 1)x + (2\mu + 1)y = -1, \quad 5x + y = 3$$

να έχουν κοινή λύση.

1.19 Να βρεθούν οι τιμές των λ και μ για τις οποίες τα συστήματα:

$$\begin{cases} (2\lambda - 1)x + 10\mu y = 3 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} (\lambda - 2)x - (\mu + 1)y = 7 \\ 3x - 6y = 5 \end{cases}$$

είναι συγχρόνως αδύνατα.

1.20 Δίνονται τα συστήματα:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ (\kappa - 2\lambda + 1)x - 3\kappa y = 12 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} (2\kappa + \lambda - 1)x + (\kappa - 2\lambda - 1)y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

α) Να βρεθούν οι τιμές των κ και λ για τις οποίες τα συστήματα έχουν και τα δύο άπειρο πλήθος λύσεων.

β) Για τις τιμές των κ και λ που θα βρείτε στο προηγούμενο ερώτημα, να λύσετε τα συστήματα.

1.21 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} (3\alpha + 2\beta + 2)x - (4\alpha + 7\beta)y = 20 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases} \quad \text{να έχει περισσότερες από μία λύσεις.}$$

1.2 Το γραμμικό σύστημα 3×3

1.22 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1. Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα μπορεί να είναι αδύνατο κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις.
2. Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα 3×3 μπορεί να έχει λύση την $(5\kappa, 2\kappa + 1, \kappa)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.

1.23 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2x - 5y + 6z = 0 \\ x + 8y - 3z = 0 \\ 4x - y + 9z = 0 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - 2y - 6z = 0 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

1.24 Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x + y - 3z = -6 \\ 3x - 5y + 4z = 10 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + 4y + z = 3 \\ 7x + 14y + 11z = 7 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} -x + 3y + 8z = 9 \\ 4x + 3y + 4z = 15 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

1.25 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $f(-1) = 4$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -5$, και $f(-2) = 15$.

α) Να βρείτε τα α, β, γ .

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.

1.26 Δύο μαθητές έλυσαν ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με αγνώστους x, y, z και βρήκαν ότι έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Ο πρώτος έδωσε απάντηση $(x, y, z) = (3\lambda - 1, \frac{\lambda-1}{2}, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ενώ ο δεύτερος έδωσε απάντηση $(x, y, z) = (\kappa, \frac{\kappa-2}{6}, \frac{\kappa+1}{3})$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Τα δύο σύνολα λύσεων είναι ίσα ή διαφορετικά;

1.27 Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 3 \\ 16x + 9y + 13z = 54 \\ 6x + y + 3z = 16 \end{cases}$$

1.3 Συστήματα που ανάγονται σε γραμμικά

1.28 Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \\ 7x - 2y - z = 12 \end{cases}$$

1.29 Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} 5x - 6y + 28 = 0 \\ |4x - 3y| = 17 \end{cases} \quad \text{ii)} |3x - y + 6| = |5y - 8x + 18| = 19$$

1.30 Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 5 \\ x^2 = 2(y^2 - 1) \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 7x^2 - 3y^2 = 1 \\ 5x^2 + 4y^2 = 56 \end{cases} \quad \text{iii)} \begin{cases} 14\sqrt{x} - 19\sqrt{y} + 43 = 0 \\ 5\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + 13 \end{cases}$$

1.31 Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{3}{4x + \frac{5y}{7} - 8} - \frac{4}{\frac{3y - 2x + 1}{10}} = \frac{2}{\frac{15}{23}} \\ \frac{3}{4x + 5y - 8} + \frac{4}{3y - 2x + 1} = \frac{2}{18} \end{cases}$$

1.32 Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{20}{y} = 11 \\ \frac{x}{70} - \frac{y}{30} = 29 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 7xy + yz - 2zx = -7xyz \\ -3xy + 5yz + 12zx = 14xyz \\ -3xy + 2yz - 6zx = 2xyz \end{cases}$$

1.33 Να λυθεί το σύστημα: $\frac{5xy}{x+y} = 6$, $\frac{7yz}{y+z} = 10$, $\frac{8zx}{z+x} = 15$

1.34 Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 - 3y^2 - 10x + 24 = 0 \\ x^2 + 9y^2 - 10x = -12 \end{cases}$

1.4 Μη γραμμικά συστήματα

1.35 Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} y = \frac{9}{2}x^2 \\ 6x - 2y = 1 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x^2 = 3y - 6 \\ 2x^2 + y^2 = 43 \end{cases}$

1.36 Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = -10 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$

1.37 Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $26cm$ και εμβαδόν $40cm^2$. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογώνιου.

1.38 Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $42cm$ και η διαγώνιός του ισούται με $15cm$. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογώνιου.

1.39 Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 12 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

1.40 Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{17}{4} \\ xy = 4 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \\ x - y = 1 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

1.41 Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 2x(x-1) + y(y+1) = 3xy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x^3 - 6y^3 + 3x^2y^2 - 2xy = 0 \\ x - 4y = 1 \end{cases}$

1.42 Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^6 + y^6 = 65 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Μονοτονία συνάρτησης

2.1 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^5 - \frac{2}{x^3}$, ως προς τη μονοτονία.

2.2 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} + x^2 - 4x + 1$, ως προς τη μονοτονία.

2.3 Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x-1}$, ως προς τη μονοτονία.

2.4 Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

Ακρότατα συνάρτησης

2.5 Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων:

i) $f(x) = 8(1-x)^4 - 5$

ii) $g(x) = 9 - 4(3x-2)^4$

iii) $h(x) = \frac{6}{x^2+3}$

iv) $\varphi(x) = \frac{5}{(x+3)^2+4}$

v) $k(x) = \frac{12}{|x-7|+4}$

vi) $F(x) = -\frac{2}{\sqrt[4]{x+1}+6}$

2.6 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 11x + 16}{x^2 - 3x + 3}$. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι το -3 και η μέγιστη τιμή της το $\frac{19}{3}$.

2.7 Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης: $f(x) = |x-2| - x - 1$.

2.8 Να βρείτε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης: $f(x) = \frac{4}{|x-5|+x-3}$.

2.9 Έστω $f(x) = \frac{x^2+5x+1}{x}$, με $x > 0$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.

2.10 Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x}$, με $x < 0$.

2.11 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2|x-1| - |x-3|$. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα αυτής.

2.12 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{x^2-2x+1}$. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα αυτής.

Άρτια - Περιττή συνάρτηση

2.13 Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι συναρτήσεις:

i) $f(x) = \frac{x+x^3}{x^2-1}$

ii) $g(x) = \frac{|x|}{x^3-x}$

iii) $h(x) = \sqrt{x^2-16}$

iv) $\varphi(x) = \frac{5|x|}{\sqrt[3]{2-x^2}}$

v) $k(x) = \sqrt{1-x+x^2} + \sqrt{1+x+x^2}$

Κατακόρυφη - Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

2.14 Να σχεδιάσετε τις γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ||x| - 1|$.

2.15 Να σχεδιάσετε τις γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

ii) $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

iii) $f(x) = \frac{4-2x}{2x-3}$

2.16 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = |x-3| - 1$ και $g(x) = 1 - |x-2|$.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που δημιουργείται.

2.17 Να σχεδιάσετε τις γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

ii) $g(x) = -x^2 + 4x - 5$

iii) $h(x) = 2(x-4)^2 - (1-2x)^2 - 12$

2.18 Να σχεδιάσετε τις γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

i) $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$

ii) $f(x) = ||x^2 - 1| - 1|$

iii) $f(x) = \frac{1}{|x-2|}$

2.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Ονομάζουμε g τη συνάρτηση που προκύπτει αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της f κατά δύο μονάδες προς τα δεξιά και μία μονάδα προς τα πάνω.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση g .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = -3x + 8$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της g .

2.20 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + x + 3$. Πόσες μονάδες οριζόντια πρέπει να μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της f , ώστε η συνάρτηση που θα προκύψει να έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την ευθεία $y = -3x - 4$;

2.21 Με ένα σύρμα μήκους 20 m κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο πλαίσιο. Πως πρέπει να γίνει η κατασκευή ώστε το πλαίσιο να έχει το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν;

2.22 Δύο από τις πλευρές ενός ορθογώνιου βρίσκονται στους θετικούς ημιάξονες του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων και μια κορυφή του βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $2x + 3y = 12$. Να βρείτε εκείνο από τα ορθογώνια που έχει μέγιστο εμβαδόν.

2.23 Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 6 cm. Ένα άλλο τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$. Να βρείτε τη θέση του τετραγώνου $EZH\Theta$ ώστε το εμβαδόν του να είναι το μικρότερο δυνατό.

2.24 Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτεί συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων. Αν δηλώσουν ακριβώς 100 άτομα, το αντίτιμο ανέρχεται σε 1000 ευρώ το άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο ανά άτομο μειώνεται κατά 5 ευρώ. Πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, ώστε να έχουμε τα περισσότερα έσοδα;

2.25 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 6 cm και 8 cm. Ένα ορθογώνιο είναι εγγεγραμμένο στο τρίγωνο και η μία γωνία του συμπίπτει με την ορθή γωνία του τριγώνου. Να βρείτε το ορθογώνιο που έχει μέγιστο εμβαδόν.

2.26 Ένα σύρμα μήκους 8m κόβεται σε δύο τμήματα με τα οποία σχηματίζουμε έναν κύκλο και ένα τετράγωνο αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι ελάχιστο, όταν η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

3.1 Θεωρούμε το σημείο $M(-2, -2\sqrt{2})$ στο καρτεσιανό επίπεδο. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\theta = x\hat{OM}$.

3.2 Η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(-\frac{8}{17}, \frac{15}{17})$. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

3.3 Αν $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ και η τελική πλευρά της γωνίας θ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $N(p, -\frac{12}{13})$, να βρεθεί ο p και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας θ .

3.4 Να υπολογίσετε τους επόμενους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α) 1470°

β) 2565°

γ) 4500°

δ) 1350°

ε) $\frac{49\pi}{6}$

στ) $\frac{57\pi}{4}$

ζ) $\frac{61\pi}{3}$

η) $\frac{23\pi}{2}$

3.5 Αν $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ να αποδείξετε ότι ${}^4x - x \cdot x - {}^3x - {}^5x > 0$.

3.6 Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή των παραστάσεων:

i) $A = 3\omega - 8$

ii) $B = 7 - 5^2\phi$

iii) $C = 4\alpha - 9\beta$

3.7 Αν $0 < a < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $a + a > 1$.

3.8 Αν $0 < a < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $a > {}^2a > {}^3a$.

3.9 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός a ώστε να ισχύει ${}^2a + 2 < 3a$.

3.10 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{1+x}{3+2x}$

ii) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{9-8x}}$

iii) $h(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$

iv) $F(x) = \sqrt{x\pi}$

3.11 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $x = \frac{22}{\sqrt{5} + \sqrt{6}}$.

3.12 Να βρείτε τις τιμές του ακέραιου k αν υπάρχει γωνία ω με $k(1 + {}^2\omega) + 1 = 2\sqrt{2}\omega$.

3.13 Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $|x - x| < 1$.

3.14 Αν οι πραγματικοί αριθμοί a, b είναι ομόσημοι και $\theta \in [0, 2\pi)$ με ${}^2x = \frac{(a+b)^2}{4ab}$, να βρείτε τη γωνία θ .

3.15 Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός x ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα: $\sqrt{2} \frac{\pi x}{2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$.

3.2 Βασικές Τριγωνομετρικές ταυτότητες

3.16 Αν $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

3.17 Αν $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

3.18 Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες έχουμε:

α) $x = -\frac{21}{29}$ και $x = \frac{20}{29}$ **β)** $x = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$ και $x = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$ με $|m| + |n| > 0$

3.19 Να αποδείξετε ότι υπάρχει γωνία ω , ώστε οι αριθμοί ω και ω να είναι οι ρίζες της εξίσωσης $25x^2 + 5x = 12$. Μετά να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{\omega + \omega}{2\omega - \omega}$.

3.20 Οι αριθμοί a και a είναι οι λύσεις της εξίσωσης $25x^2 + 5\lambda x + \lambda + 5 = 0$. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου λ .

Σε ποιο τεταρτημόριο καταλήγει το πέρας της γωνίας a ;

3.21 Να αποδείξετε ότι:

i) $^2\alpha^2\beta - ^2\alpha^2\beta = ^2\alpha - ^2\beta$

ii) $^2\alpha^2\beta - ^2\alpha^2\beta = ^2\alpha - ^2\beta$

3.22 Να αποδείξετε ότι $(a + a + 1)(a + a - 1) = 2 a a$.

3.23 Αν $0 < a < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι η παράσταση $P = (a - 1)(a - 1)$ είναι μη θετική.

3.24 Να αποδείξετε ότι $(2 a + 3 a)^2 + (3 a - 2 a)^2 = 13$.

3.25 Να αποδείξετε ότι $^2 a \cdot a + ^2 a \cdot a + 2 a \cdot a = a + a$.

3.26 Να αποδείξετε ότι $^2 a \cdot a - ^2 a \cdot a = a - a$.

3.27 Να αποδείξετε ότι $\frac{^2 x - ^2 x}{^2 x - ^2 x} = ^6 x$.

3.28 Να αποδείξετε ότι $\frac{^3 x}{1 + ^2 x} + \frac{^3 x}{1 + ^2 x} = \frac{1 - ^2 x^2 x}{x x}$.

3.29 Να αποδείξετε ότι $\frac{\theta - \theta + 1}{\theta + \theta - 1} = \frac{\theta + 1}{\theta}$.

3.30 Να αποδείξετε ότι $\frac{x + x - 1}{x - x + 1} = \frac{x - x + 1}{x + x + 1}$.

3.31 Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $^2\alpha = 1 + ^2\beta$ τότε $^2\beta = ^2\alpha$

ii) Αν $^2\alpha = 1 + ^2\beta$ τότε $^2\beta = ^2\alpha$

3.32 Να αποδείξετε ότι $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = ^2 a + ^2 a + 7$.

3.33 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha x + \beta x = \beta$ τότε ισχύει ότι $|\alpha x - \beta x| = \alpha$.

3.34 Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι $\frac{1 + ^\nu x}{1 + ^\nu x} = \left(\frac{1 + x}{1 + x}\right)^\nu$.

3.35 i) Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $x + x \geq 2$.

ii) Αν $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ να αποδείξετε ότι $x + x \leq -2$.

3.36 Να αποδείξετε ότι $^2\alpha + ^2\beta + 2\alpha\beta \leq 2$.

3.37 Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{a+a}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$.

3.38 Να αποδείξετε ότι: $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 4(x-x)^2$ με $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

3.39 Να αποδείξετε ότι: $\left(1 + \frac{1}{2x}\right)\left(1 + \frac{1}{2x}\right) \geq 9$ με $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

3.40 Να αποδείξετε ότι: $|\alpha \beta| < 1 \iff |\alpha| < |\beta|$.

3.41 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $|\alpha x - \beta x| \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

3.42 Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι: α) $\sqrt{2x + \frac{1}{2x}} = 1 + x$ β) $\sqrt{2x + \frac{1}{2x}} = 1 + x$.

3.43 Αν $2^2 x = \frac{1}{x} + 4$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογιστεί η παράσταση $A = 3x + 2x - 12x$.

3.44 Α. i) Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει γωνία $\hat{\omega}$ τέτοια ώστε $\omega = \alpha$ και $\omega = \beta$.

ii) Αν $\alpha\beta = 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει γωνία $\hat{\omega}$ τέτοια ώστε $\omega = \alpha$ και $\omega = \beta$.

Β. Για ποιές τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ υπάρχει γωνία $\hat{\omega}$, ώστε να ισχύει:

α) $\omega = \frac{\kappa-3}{\kappa-1}$ και $\omega = \frac{\kappa-2}{\kappa-1}$ β) $\omega = \frac{\kappa}{2\kappa+3}$ και $\omega = \frac{5\kappa}{3-2\kappa}$

3.45 Δίνεται η εξίσωση $(2 + \sqrt{5})x^2 + (2 - \sqrt{5})x - 4(5 - 2\sqrt{5}) = 0$.

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις x_1, x_2 .

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει τόξο φ rad, ώστε $\varphi = x_1$ και $\varphi = x_2$.

Σε ποιο τεταρτημόριο έχει το πέρασ του το τόξο φ ;

iii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $|\varphi - \varphi|$.

3.46 Αν $\frac{4}{2}\alpha + \frac{4}{2}\beta = 1$ να αποδείξετε ότι $\frac{8}{6}\alpha + \frac{8}{6}\beta = 1$.

3.47 Να αποδείξετε ότι: α) $4x + 4x \geq \frac{1}{2}$ β) $8x + 8x \geq \frac{1}{8}$

3.48 Να αποδείξετε ότι: $\left(2x + \frac{1}{2x}\right)^2 + \left(2x + \frac{1}{2x}\right)^2 > \frac{25}{2}$ με $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

3.3 Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

3.49 Να υπολογίσετε τους επόμενους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α) 1290°

β) 2670°

γ) 1935°

δ) 1320°

ε) $\frac{14\pi}{3}$

στ) $\frac{55\pi}{4}$

ζ) $\frac{67\pi}{6}$

η) $\frac{82\pi}{3}$

3.50 Να αποδείξετε ότι $600^\circ \cdot 1200^\circ + 660^\circ \cdot 2295^\circ = 1$.

3.51 Να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{(180^\circ + a) \cdot (180^\circ - a) \cdot (90^\circ + a)}{(270^\circ - a) \cdot (90^\circ - a) \cdot (-a)}$.

3.52 Να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{(\theta - \pi) \cdot \left(\frac{13\pi}{2} - \theta\right) \cdot \left(\frac{15\pi}{2} - \theta\right)}{(9\pi - \theta) \cdot \left(\frac{23\pi}{2} + \theta\right)}$.

3.53 Αν $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $(\pi - x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 2 + 2(\pi + x)$.

3.54 Να αποδείξετε ότι:

α) $1^\circ \cdot 2^\circ \cdot 3^\circ \cdot \dots \cdot 87^\circ \cdot 88^\circ \cdot 89^\circ = 1$.

β) $1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \dots + 177^\circ + 178^\circ + 179^\circ = 0$.

γ) $1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \dots + 357^\circ + 358^\circ + 359^\circ = 0$.

3.4 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

3.55 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 \frac{x}{4}$.

- i) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.
- ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

3.56 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x$ και $g(x) = x$.

- i) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g , όταν $0 \leq x \leq 2\pi$.
- ii) Από το σχέδιο του ερωτήματος (i) να λύσετε την ανίσωση $f(x) > g(x)$.

3.57 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\pi}{4} + 4x\right)$.

- i) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.
- ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

3.58 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) - (\pi + x)$.

- i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της.
- ii) Να βρείτε την περίοδο και τα ακρότατα της f .
- iii) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης.

3.59 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{3} \left(2 - \frac{x}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{3}\right) - 2 \frac{x}{3} - \left(\pi + \frac{x}{3}\right)$.

- α) Να γράψετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = \rho(\omega x) + \kappa$.
- β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα τιμών και μονοτονίας της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου της.

3.60 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\pi - 2x) - \left[2 \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right]$.

- α) Να γράψετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = \rho(\omega x)$.
- β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$.

3.61 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 5 \left[\left(\frac{\kappa+\lambda}{2}\right)x\right] + \lambda - 2$ και $g(x) = 2 - (\kappa + 3)x$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε τα κ, λ αν οι δύο συναρτήσεις έχουν την ίδια μέγιστη τιμή και η περίοδος της g είναι διπλάσια της περιόδου της f .

3.62 α) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x$ και $g(x) = x$ όταν $x \in [0, 2\pi]$.

- β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|f(x) - g(x)|$ για κάθε $x \in [0, 2\pi]$.
- γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η προηγούμενη παράσταση γίνεται μέγιστη.

3.63 i) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x$ και $g(x) = x^2 + 1$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

- ii) Να λύσετε την εξίσωση $x = x^2 + 1$.

3.64 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) - 2(\pi + 4x)$, με $a > 0$. Η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 3.

- i) Να γράψετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = \rho(\omega x)$.
- ii) Να βρείτε τον a .
- iii) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, όταν $0 \leq x \leq \pi$.

3.65 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (3 - \alpha) \cdot (\beta x)$ με $\alpha > 1$ και $\beta > 0$. Η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 2 και περίοδο π .

- i) Να βρείτε τα α, β .
- ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε διάστημα μιας περιόδου.

3.66 Οι ετήσιες πωλήσεις ενός προϊόντος, σε χιλιάδες κομμάτια, δίνονται κατά προσέγγιση από τον τύπο $f(t) = 23 + 5 \cdot \left(\frac{\pi t}{4}\right)$ όπου t ο χρόνος σε έτη και $0 \leq t \leq 8$.

- i) Να βρείτε τη μέγιστη, την ελάχιστη τιμή της f καθώς και την περίοδό της.
- ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- iii) Σε ποιο έτος θα έχουμε τον μικρότερο αριθμό πωλήσεων;
- iv) Σε ποιο έτος οι πωλήσεις θα φθάσουν τα 25500 κομμάτια;

3.5 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

Να λύσετε τις εξισώσεις:

3.67 α) $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 3$ β) $\frac{1+x}{x} + \frac{x}{1+x} = 4$

3.68 α) $2x \cdot x = 2 + x - 2 \cdot 2x$ β) $x - x = 1 - x \cdot x$

3.69 α) $3x + 1 = 0$ β) $2 \left(2x + \frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0$

3.70 α) $6^2 x + 5x = 2$ β) $2x - (\sqrt{3} + 1)x \cdot x - \sqrt{3}^2 x = 0$
γ) $(\sqrt{3} + 3)^2 x = \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 3)x \cdot x$

3.71 α) $9^4 x - 1 = 0$ β) $4x - 2x - 1 = 0$ γ) $2^2 x = 4^2 x - 1$

3.72 α) $x + x = \frac{1}{x}$ β) $x + \frac{1}{x} = x$

3.73 α) $3 \cdot 2x + \sqrt{3} = 0$, στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ β) $\frac{x}{2} + (2x - \frac{\pi}{4}) = 0$, στο διάστημα $[0, 2\pi]$.
γ) $\sqrt{3} \cdot \frac{2x}{3} + 1 = 0$, στο διάστημα $(0, 3\pi)$ δ) $\frac{1}{2x} = 2x$, στο διάστημα $[-\pi, \pi]$
ε) $2^3 x - 2^2 x + 2x + 2 = 0$, στο διάστημα $(-2\pi, \pi]$

3.74 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \left(\frac{2x}{3}\right) + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{3\pi}{2}, 3\right)$ και η μέγιστη τιμή f είναι 5. Να βρείτε:

i) Τα α, β

ii) Την περίοδο της συνάρτησης.

iii) Τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 4$.

3.75 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (2x + \pi) + \left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + 2(-x) + 2$ και $g(x) = \left[2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] - 2(\pi - x)$, με $x \in [0, 2\pi]$. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

3.6 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

3.76 Αν $\alpha = \frac{4}{5}$ με $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ και $\beta = -\frac{3}{5}$ με $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε:

i) το $(\alpha - \beta)$ ii) το $(\alpha + \beta)$

3.77 Να αποδείξετε ότι:

i) $(45^\circ - \alpha)(45^\circ - \beta) - (45^\circ - \alpha)(45^\circ - \beta) = (\alpha + \beta)$

ii) $(45^\circ + \alpha)(45^\circ - \beta) + (45^\circ + \alpha)(45^\circ - \beta) = (\alpha - \beta)$

3.78 Να αποδείξετε ότι:

i) $\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

ii) $(a + 18^\circ)(12^\circ - a) - (a + 78^\circ)(a - 72^\circ) = \frac{1}{2}$

3.79 Να αποδείξετε ότι: $\left(\frac{\pi}{4} + \phi\right) + \left(\frac{\pi}{4} - \phi\right) = \sqrt{2} \phi$.

3.80 Να αποδείξετε ότι: $(a - a)(2a - 2a) = a - 3a$.

3.81 Να αποδείξετε ότι το κλάσμα: $A = \frac{(\alpha + x) - (\alpha - x)}{(\beta - x) - (\beta + x)}$ είναι ανεξάρτητο του x .

3.82 α) Να αποδείξετε ότι: $x - \sqrt{3}x = 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $x - \sqrt{3}x = \sqrt{3}$.

3.83 α) Να αποδείξετε ότι: $\theta + \theta = \sqrt{2}(\theta + 45^\circ)$.

β) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα του ΒΓ = 1 και η περίμετρός του ισούται με $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$. Να βρείτε τις οξείες γωνίες του τριγώνου.

3.84 Να αποδείξετε ότι: **i)** $1 + a \cdot 2a = \frac{1}{2a}$ **ii)** $1 - 2a \cdot a = -\frac{1}{2a}$.

3.85 Να αποδείξετε ότι: **i)** $(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{x + x}{x - x}$ **ii)** $(45^\circ - a) = \frac{a - a}{a + a}$.

3.86 Να αποδείξετε ότι: $\frac{2 \cdot 2a - 2 \cdot a}{1 - 2 \cdot 2a \cdot 2 \cdot a} = 3a \cdot a$.

3.7 Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2a

3.87 Να αποδείξετε τις επόμενες ισότητες: **α)** $2 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

γ) $(15^\circ - 15^\circ)^2 = \frac{1}{2}$

β) $(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8})^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

δ) $2 \cdot \frac{\pi}{12} - 2 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3.88 Να αποδείξετε ότι: $80^\circ = 2 \cdot 50^\circ - 2 \cdot 50^\circ$.

3.89 Να αποδείξετε τις ισότητες:

i) $2 \cdot (45^\circ - a) - 2 \cdot (45^\circ - a) = 2a$

ii) $1 - 2 \cdot 2 \cdot (45^\circ - \frac{a}{2}) = a$

3.90 Αν $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ και $a = -\frac{1}{4}$, να υπολογίσετε:

i) το $\frac{a}{2}$

ii) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{a}{4}$.

3.91 Να αποδείξετε ότι: **i)** $x = \frac{2x}{2 \cdot x}$ **ii)** $\frac{\pi}{7} \cdot \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$

3.92 Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\Pi = \frac{3a}{a} - \frac{3a}{a}$ είναι ανεξάρτητη του a .

3.93 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x + x)^2 - (x - x)^2$.

α) Να γράψετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = \rho \cdot (\omega x)$.

β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα τιμών και μονοτονίας της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου της.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία που έχει εξίσωση $y - 1 = 0$.

3.94 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x + x)^2}{2} - x(x + x)$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι περιοδική και να βρείτε την περίοδό της.

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο βρίσκονται οι τιμές της συνάρτησης.

3.95 Αν $a = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ και $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2.

3.96 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $\frac{\pi}{8}$ και $\frac{\pi}{16}$.

3.97 Για τη γωνία a ισχύει ότι: $5 \cdot 2a - 14 \cdot a - 7 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $a = -\frac{3}{5}$

β) Αν επιπλέον ισχύει $\pi \leq a \leq \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $2a$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 Πολυώνυμο

4.1 Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (1 - \alpha^2)x^3 + (\beta^2 - \alpha)x^2 + (\alpha - 4\beta)x + 2$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η τιμή του $P(x)$ στο -1 είναι -4 . Να βρείτε:

i) Τους α, β

ii) Το βαθμό του πολωνύμου $P(x)$.

iii) Το πολυώνυμο $Q(x) = P(-x) - P(x - 1)$.

4.2 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$.

i) Να γράψετε το $P(x)$ στη μορφή $(x + 1)^3 + \alpha(x + 1)^2 + \beta(x + 1) + \gamma$

ii) Να διασπάσετε το κλάσμα $K = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 1}{(x + 1)^4}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

4.3 Δίνεται το κλάσμα $K = \frac{3x^2 - 4x + 5}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

i) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται το K .

ii) Να διασπάσετε το κλάσμα ως εξής: $K = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + \Gamma}{x^2 + 1}$.

4.4 i) Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, τρίτου βαθμού τέτοιο ώστε $P(0) = 0$ και $P(x) - P(x - 1) = x^2$.

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.

4.5 α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των συντελεστών ενός πολωνύμου $P(x)$ ισούται με τον αριθμό $P(1)$.

β) Έστω $P(x) = (x - 2)^{2019} - x^{2019} + 6x - 2$. Να υπολογίσετε το άθροισμα των συντελεστών του.

4.6 Να βρείτε πολυώνυμο $f(x)$ τρίτου βαθμού αν δίνεται ότι $f(-1) = 2$, $f(2) = 8$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιττή.

4.2 Διαίρεση πολωνύμων

4.7 Να πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 - x + 1$, δίνει πηλίκο $2x - 3$ και υπόλοιπο $3x - 4$.

4.8 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 8x^3 + (5a - 1)x^2 + 8x - 3a - 6$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ δια του $x^2 - 1$ και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

β) Να βρείτε την τιμή του a , ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

γ) Για $a = 3$, να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

4.9 Το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - (a+1)x^3 + (a-3)x^2 - 3x - 2a - 2$ έχει παράγοντα το $\phi(x) = x^2 - x + 2$.

Να βρείτε τις τιμές:

i) του πραγματικού αριθμού a

ii) του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

4.10 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \kappa x^3 - (\kappa + \lambda)x^2 + \lambda x + 1$.

α) Αν $P(-\frac{1}{2}) = 7$ και $P(-1) = 23$, να αποδείξετε ότι $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$.

β) Να γίνει η διαίρεση του $P(x)$, για $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$, με το πολυώνυμο $2x + 1$ και να γραφεί το $P(x)$ με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 7$ για $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$.

4.11 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - 39x + 2\alpha$ να έχει παράγοντες τους $x - 2$ και $x - 3$. Μετά να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

4.12 i) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x + \beta$ να διαιρείται από το $(x - 1)^2$.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $P(x)$ με τον άξονα $x'x$.

4.13 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (\lambda - 4)x^2 - 2(\lambda - 1)x + 2\kappa$, το οποίο έχει παράγοντα το $\phi(x) = (x + 2)^2$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ .

β) Να εκτελέσετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 - 4x + 5$ και να γραφεί το $P(x)$ με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) + 37 > 7x$.

4.14 Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \alpha x^3 - (2\beta + \alpha)x^2 + 5\alpha x + 10$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Το πολυώνυμο $x^2 + x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

i) Να βρείτε τα α, β .

ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

4.15 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + (\beta - \alpha)x^3 - (\alpha + \beta)x^2 - (2\beta + \alpha)x - \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Να προσδιορίσετε τα α, β ώστε το $P(x)$ να διαιρείται με τη μεγαλύτερη δύναμη του $x + 1$.

Για τις τιμές των α, β που θα βρείτε:

ii) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο.

iii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

4.16 Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $x - 1$ αφήνει υπόλοιπο -1 , ενώ διαιρούμενο με το $x + 2$ αφήνει υπόλοιπο -10 . Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 + x - 2)$.

4.17 Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$$P(x) = 3x^{21} - 10x^{19} + 4x^{18} + x^3 + 2 \quad \text{με το} \quad x^2 + 3x + 2.$$

4.18 Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $x - 3$ αφήνει υπόλοιπο 12 , ενώ διαιρούμενο με το $x^2 + 2$ αφήνει υπόλοιπο $2x - 5$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 3)(x^2 + 2)$.

4.19 Οι ρίζες του πολυωνύμου $P(x) = 3x^2 - 9x - 7$ είναι ρίζες και του πολυωνύμου $Q(x) = 6x^3 - 57x^2 + 103x + 91$. Να βρείτε την τρίτη ρίζα του $Q(x)$.

4.20 Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$$P(x) = x^{101} - 3x^{100} + (x + 1)^2 \quad \text{με το} \quad x^2 - 1.$$

4.21 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^4 - (\alpha + 1)x^3 - 17x^2 + (5\beta + 2)x - 9 \quad \text{να έχει παράγοντα τον} \quad x^2 - 9.$$

4.22 Για ένα πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει η σχέση $P(3x + 2) = 3P(x) - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν ο σταθερός όρος του πολυωνύμου είναι 1 , να αποδείξετε ότι $P(26) = 14$.

4.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις

4.23 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $14x^3 - 43x^2 + 9 = 0$

ii) $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$

iii) $x^7 + 4x^5 + x^3 - 6x = 0$

4.24 i) Να λύθεί η εξίσωση: $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 16x = 0$.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 16x$ με τον άξονα $x'x$.

4.25 i) Να λύθεί η εξίσωση: $x^5 - x^4 - 7x^3 - x^2 + 10x + 6 = 0$.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$f(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 + 5x - 2$ και $g(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2 - 5x - 8$.

4.26 i) Να λύθεί η ανίσωση: $x^2 + 4x \geq 2x^3 + 3$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 1$ και $g(x) = 3x^3 - 3x^2 + 2$.

4.27 Δίνονται τα πολώνυμα $f(x) = 2x^3 - (\beta - \alpha)x^2 + \alpha$ και $g(x) = x^3 - (\beta + 2)x + 4 - \alpha$. Αν η γραφική παράσταση του $f(x)$ διέρχεται από το σημείο $A(-1, -7)$ και του $g(x)$ από το σημείο $B(1, 1)$, να βρείτε:

i) Τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

ii) Τα σημεία τομής των γραφικών τους παραστάσεων.

4.28 Δίνεται η εξίσωση $x^4 + (2a + 3)x^3 + (6a - 4)x^2 - (8a + 12)x - 24a$, $a \in \mathbb{R}$. Αν η εξίσωση έχει ρίζες οι οποίες είναι ανεξάρτητες του a , τότε:

i) Να βρείτε τις ρίζες αυτές.

ii) Να βρείτε όλες τις ρίζες της εξίσωσης.

4.29 Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 3x^2 - 64x + 192 = 0$, αν γνωρίζουμε ότι έχει δύο αντίθετες ρίζες.

4.4 Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

4.30 Να βρεθούν όλες οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης $x^2 + x = \frac{42}{x^2 + x + 1}$.

4.31 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{5 - x^2} = x - 1$

ii) $\sqrt{x - 8} + \sqrt{x - 5} = 3$

iii) $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x - 3} = 2\sqrt{x}$

iv) $\sqrt{3x + 19} - \sqrt{x + 2} = \sqrt{x + 7}$

4.32 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt[3]{5x + 3} = x + 1$

ii) $\sqrt[4]{2x^2 - 4x + 1} = x - 1$

iii) $\sqrt[5]{x^3 + x^2 - 1} = x$

iv) $\sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$

4.33 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0$

ii) $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0$

4.34 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{x^3 + 4x} + \frac{1}{\sqrt{x^3 + 4x - 3}} = 5$

ii) $\frac{2}{x + \sqrt{2 - x^2}} + \frac{2}{x - \sqrt{2 - x^2}} = x$

4.35 Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $\frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} < 1$

ii) $\frac{x^2}{x + 1} - \frac{4}{x - 1} \leq \frac{2}{x^2 - 1}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5.1 Εκθετική συνάρτηση

5.1 Για ποιες τιμές του a η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{a^2 - 7}{a - 1}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$;

5.2 Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $2^{3x^2-1} = \frac{1}{2^{5x-1}}$

ii) $3^{2|x|+1} = 27^{x^2}$

iii) $\sqrt[3]{4^{x-2}} = \sqrt[6]{2^{3x-1}}$

5.3 Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $3^x - 4\sqrt{3^x} + 3 = 0$

ii) $8 \cdot 4^x + 15 \cdot 2^x = 2$

iii) $8^x = 3 \cdot 2^x + 2$

5.4 Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $3 \cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 6 \cdot 5^{x-3}$

ii) $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$

5.5 Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $2^{4x-1} > \frac{1}{32}$

ii) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-3} > 25$

iii) $5^{x-3} \geq 7^{3-x}$

5.6 Να λυθούν τα συστήματα:

i)
$$\begin{cases} 2^{x-1} \cdot 4^{x+2y} = 512 \\ 5^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3y} = 1 \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} 5^{x-1} - 2^{x+3} = -11 \\ 2^{y-1} + 5^{x+1} = 126 \end{cases}$$

iii)
$$\begin{cases} 3^x + 4^y = 13 \\ 9^x - 16^y = 65 \end{cases}$$

5.7 Να λύσετε την εξίσωση: $18^{8-4x} = (54\sqrt{2})^{3x-2}$.

5.8 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |2^x - 2|$.

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 2$.

5.9 Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(x^2 - 5x + 7)^{x^2-x}$

ii) $x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x})$

5.2 Λογάριθμοι

5.10 Να βρείτε τον x στις επόμενες ισότητες:

i) $\log_3 x = -2$

ii) $\log_{\frac{4}{9}} \frac{27}{8} = x$

iii) $\log_x \frac{81}{625} = 3$

5.11 Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = \log 3 + \log 3^2 + \log 3^3 + \dots + \log 3^{50}$.

5.12 Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta$ να αποδείξετε ότι: $\log \left(\frac{\alpha - \beta}{3} \right) = \frac{1}{2} (\log \alpha + \log \beta)$.

5.13 Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha^3 + \beta^3 = 6\alpha\beta(\alpha + \beta)$ να αποδείξετε ότι: $\log \left(\frac{\alpha + \beta}{3} \right) = \frac{1}{2} (\log \alpha + \log \beta)$.

5.14 Αν $x, y > 0$ να αποδείξετε ότι: $\log \left(\frac{x + y}{2} \right) \geq \frac{\log x + \log y}{2}$.

5.15 Αν α, β, γ είναι όροι μιας γεωμετρικής προόδου, με θετικούς όρους, τάξεων λ, μ, ν αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι: $(\mu - \nu) \log \alpha + (\nu - \lambda) \log \beta + (\lambda - \mu) \log \gamma = 0$

5.16 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{(\log_2 5 + \log_3 5) \log_6 5}{\log_2 5 \cdot \log_3 5}$.

5.3 Λογαριθμική συνάρτηση

5.17 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log |\log x|$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

ii) Για ποιές τιμές του x μηδενίζεται η συνάρτηση;

iii) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x ώστε $f(x) < 0$.

5.18 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log(4x - 1) = 2 \log 2 + \log(x^2 - 1)$

ii) $x + \log(1 + 2^x) = x \log 5 + \log 6$

5.19 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^{\log x} + 2^{5 - \log x} = 12$

ii) $3^{2 \log x} - 2 \cdot 3^{\log x} - 100^{\log \sqrt{3}} = 0$

iii) $x^{1 - \log x} = 0,01$

5.20 Να λύσετε τα συστήματα:

i)
$$\begin{cases} \log x^3 + \log y^2 = \log 100 \\ \log \frac{1}{x} + \log y^4 = -3 \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2 \log x + \log y = 2 \end{cases}$$

5.21 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 \ln 2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) > 0$.

5.22 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού της συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) > 2g(x)$.

5.23 Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 5^x$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \dots + g(x+49) = \frac{125(5^{50} - 1)}{4}$$

5.24 Να βρείτε τον θετικό αριθμό x ώστε να ισχύει: $\log x + \log x^3 + \log x^5 + \dots + \log x^{2\nu-1} = 2\nu^2$.

5.25 Να λύσετε την εξίσωση: $\log x^2 + \log x^4 + \log x^6 + \dots + \log x^{100} = 1275$.

5.26 Να λύσετε την εξίσωση: $\ln x^2 + \ln x^4 + \ln x^8 + \dots + \ln x^{2^\nu} = 2(2^\nu - 1)$.

5.27 Να λύσετε τα συστήματα:

i)
$$\begin{cases} \log x^3 + \log y^2 = \log 100 \\ \log \frac{1}{x} + \log y^4 = -3 \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log \sqrt{xy} = 1 \end{cases} .$$