

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
 - α) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $2\sqrt{2}$
 - β) έχει κέντρο το σημείο $(3, -1)$ και ακτίνα 5
 - γ) έχει κέντρο το σημείο $(-2, 1)$ και διέρχεται από το σημείο $(-2, 3)$
 - δ) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με A $(1, 3)$ και B $(-3, 5)$
 - ε) διέρχεται από τα σημεία $(2, 1)$, $(1, 2)$ και $(-2, -1)$
 - στ) διέρχεται από τα σημεία $(3, 1)$, $(-1, 3)$ και έχει κέντρο πάνω στην ευθεία $y = 3x - 2$
 - ζ) έχει κέντρο το σημείο $(8, -6)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων
 - η) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x + y = 10$
 - θ) έχει ακτίνα 4, εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $(5, 4)$
 - ι) έχει κέντρο το σημείο $(-3, 2)$, εφάπτεται στον άξονα $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $(-6, 2)$
 - ια) έχει κέντρο το σημείο $(3, 3)$ και εφάπτεται των αξόνων $x'x$ και $y'y$
 - ιβ) έχει κέντρο το σημείο $(-3, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $4x - 3y + 5 = 0$
2. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $(1, 0)$ και εφάπτεται στις ευθείες $3x + y + 6 = 0$ και $3x + y - 12 = 0$.
3. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο που σχηματίζει η ευθεία $x + y - 6 = 0$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
4. ** Δίνεται η ευθεία $y = \lambda x$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η ευθεία:
 - α) να τέμνει τον κύκλο
 - β) να εφάπτεται του κύκλου
 - γ) να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.

5. ** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το κέντρο του κύκλου $x^2 - 2x + y^2 - 6x = 0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $x + 2y - 7 = 0$.
6. ** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $x + y = 0$.
7. ** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ που γράφονται από το σημείο $(0, 6)$.
8. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία $y = x$ και είναι ομόκεντρος του κύκλου $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.
9. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ και η ευθεία $y = x - 3$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.
10. ** Δίνονται τα σημεία A (1, 2), B (2, 4) και Γ (3, 1).
 - α) Να αποδειχθεί ότι: γωνία BΑΓ = 90°
 - β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ.
11. ** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A (3α, 0), B (0, 3α) και Γ (0, - 3α), $\alpha > 0$.
12. ** Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των σημείων M (x, y) του επιπέδου που ικανοποιούν τις εξισώσεις $x \sin \theta - y \cos \theta = \sin 2\theta$ και $x \cos \theta + y \sin \theta = \sin 2\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, βρίσκονται σε κύκλο.
13. ** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία (ε): $2x + y + 1 = 0$ και διέρχεται από τα σημεία A (- 1, 2) και B (3, - 1).

14. ** Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι $C_1: (x - 2)^2 + y^2 = 4$ και $C_2: x^2 - 2x + y^2 = 0$ εφάπτονται εσωτερικά.
15. ** Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ομόκεντροι οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$.
16. ** Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τα A, B, Γ με $A(1, -1), B(-1, 2), \Gamma(0, 2)$ είναι σταθερό c , είναι κύκλος με κέντρο το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ (για κατάλληλο c).
17. ** Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων.
18. ** Θεωρούμε τον κύκλο $C: x^2 + y^2 + 4y = 0$ και το σημείο $A(-1, -1)$. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που ορίζει στον κύκλο χορδή, με μέσο το σημείο A .
19. ** Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το $(0, 0)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
 α) είναι συμμετρική ως προς το θετικό ημιάξονα Ox και έχει παράμετρο $p = 5$
 β) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Ox και διέρχεται από το σημείο $(-1, 4)$
 γ) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Oy και διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$
 δ) έχει άξονα συμμετρίας τον Oy και εστία $E(0, -4)$
 ε) έχει εστία $E(-2, 0)$ και διευθετούσα $\delta: x - 2 = 0$
 στ) έχει άξονα συμμετρίας τον Ox και εφάπτεται της ευθείας $y = 4x + 1$
20. ** Να βρεθεί η σχετική θέση της ευθείας $x + y + 1 = 0$ ως προς την παραβολή $y^2 = 2x$.

21. ** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $y^2 = 3x$ στα σημεία $(0, 0)$ και $(12, 6)$.
22. ** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 3x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $2x - y + 1999 = 0$.
23. ** Από το σημείο $(-2, 3)$ προς την παραβολή $y^2 = 8x$ γράφονται δύο εφαπτόμενες ευθείες.
α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων αυτών ευθειών.
β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές ευθείες είναι κάθετες.
24. ** Έστω η παραβολή $y^2 = 4px$, $p > 0$. Μια χορδή της AB είναι κάθετη στον άξονα και έχει μήκος $8p$. Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.
25. ** Ισόπλευρο τρίγωνο OAB είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $y^2 = 4px$ με κορυφή το O. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.
26. ** Έστω η παραβολή C: $y^2 = 2px$ και μια χορδή της AB παράλληλη με τον άξονα $y'y$, η οποία περνάει από την εστία. Να αποδειχθεί ότι:
α) $(AB) = 2(EK)$, όπου K το σημείο που τέμνει ο άξονας $x'x$ τη διευθετούσα
β) οι εφαπτόμενες στα A και B διέρχονται από το K
27. ** Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 2px$ και δύο χορδές OB, OΓ, ώστε γωνία $BOΓ = 90^\circ$. Να αποδειχθεί ότι η BΓ διέρχεται από σταθερό σημείο.
28. ** Δίνεται η παραβολή $2y^2 = x$.
α) Να βρεθούν η εστία και η διευθετούσα της.
β) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου της A $(2, 1)$ από την εστία E και να συγκριθεί με την απόσταση (OE).
γ) Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραβολή το σημείο της με τη μικρότερη απόσταση από την εστία είναι η κορυφή της O.
δ) Να βρεθεί σημείο στην παραβολή $y^2 = 2px$ που να απέχει από την εστία E απόσταση διπλάσια της OE.

29. ** Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία (ε): $y = x - 1$.
- α) Να δείξετε ότι η (ε) περνά από την εστία της παραβολής.
 - β) Να βρείτε τα κοινά σημεία A, B της (ε) και της παραβολής.
 - γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A, B είναι κάθετες.
 - δ) Να δείξετε ότι κάθε ευθεία που περνά από την εστία και τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία έχει την ιδιότητα (γ).
30. ** Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$. Θέτουμε $x' = ax$ και $y' = ay$, $a \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι το σημείο (x', y') κινείται πάλι σε παραβολή.
31. ** Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $(x, y) = (2pk^2, 2pk)$ με $k \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε μια παραβολή
 - β) Αν $A(2pk_1^2, 2pk_1)$, $B(2pk_2^2, 2pk_2)$ είναι δύο σημεία της παραβολής αυτής, να αποδειχθεί ότι αν η AB διέρχεται από την εστία, είναι $4k_1k_2 = -1$.
32. ** Αν (ε) είναι η εφαπτομένη της έλλειψης C: $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ στο $M_1(x_1, y_1)$, να αποδείξετε ότι η κάθετη στην (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{x_1}{y_1}$.
33. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 2$ και η παραβολή $y^2 = 8x$.
- α) Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες του κύκλου και της παραβολής.
 - β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.
34. ** Δίνεται σταθερό σημείο A και ευθεία (ε) που δεν διέρχεται από το A. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το A και εφάπτονται στην (ε), είναι παραβολή.

35. ** Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει μεγάλο και μικρό άξονα με μήκος 6 και 4 μονάδες αντιστοίχως και έχει εστίες πάνω στον άξονα $x'x$ συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.

36. ** Να βρεθεί η εκκεντρότητα και οι εστίες καθεμιάς από τις παρακάτω ελλείψεις:

α) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

β) $4x^2 + 9y^2 = 36$

γ) $9x^2 + 25y^2 = 225$

37. ** Να εξετάσετε αν υπάρχει έλλειψη στην οποία ένα σημείο της M να σχηματίζει με τις εστίες E' και E ισόπλευρο τρίγωνο.

38. ** Ο κύκλος με κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.

39. ** Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Να αποδείξετε ότι και η έλλειψη με

εξίσωση $\frac{\kappa^2 x^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2 y^2}{\beta^2} = 1$ έχει την ίδια εκκεντρότητα με τη C .

40. ** Να συγκριθούν οι εκκεντρότητες των ελλείψεων $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και

$C_2: \frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} = 1$, με $\alpha > \beta$.

41. ** Να βρεθεί η μορφή της εξίσωσης της έλλειψης με εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

42. ** Θεωρούμε την υπερβολή $C: x^2 - y^2 = 1$ και την ευθεία $(\varepsilon): x + 2y = \alpha$.
Να βρεθούν οι τιμές του α , για τις οποίες η (ε) εφάπτεται στη C .

43. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$.

- α) Να δείξετε ότι το σημείο $(1, -\sqrt{3})$ είναι κοινό τους σημείο και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα κοινά σημεία.
- β) Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
- γ) Να βρεθούν τα σημεία $M(x_0, y_0)$ ώστε $x_0^2 + y_0^2 = 4$ και $(E'M) + (EM) = 2\sqrt{6}$ (E' , E οι εστίες της έλλειψης).

44. ** Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $9x^2 + 16y^2 = 144$ που είναι:
α) παράλληλες προς την ευθεία $(\varepsilon): x + y = 0$
β) κάθετες στην ευθεία (ε) .

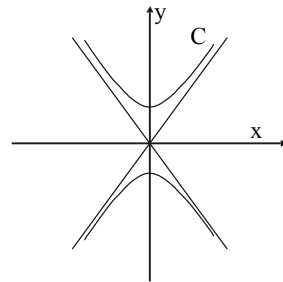
45. ** Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

- α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $E'BEB'$ είναι ρόμβος (E' , E οι εστίες, B, B' τα άκρα του μικρού άξονα)
- β) Να βρεθεί το εμβαδόν του ρόμβου.

46. ** Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής C του διπλανού σχήματος, της οποίας η μια ασύμπτωτη έχει εξίσωση

$$y = -\frac{4}{3}x. \text{ Να βρεθούν:}$$

- α) οι εστίες της υπερβολής
- β) η εστιακή της απόσταση
- γ) η εξίσωσή της
- δ) να προσδιοριστεί το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής
- ε) η εκκεντρότητά της.



47. ** Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις εστίες της στον άξονα $x'x$ συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και ακόμα:

α) έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 6$ και εκκεντρότητα $e = \frac{3}{2}$

β) έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 20$ και εξισώσεις ασυμπτώτων $y = \frac{4}{3}x$

και $y = -\frac{4}{3}x$.

γ) έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 4$ και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.

48. ** Έστω η υπερβολή C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ναδειχθεί ότι κάθε παράλληλη προς

μία ασύμπτωτη τέμνει την υπερβολή σ' ένα μόνο σημείο.

49. ** Έστω M τυχαίο σημείο της υπερβολής $y^2 - x^2 = a^2$, (ε) η εφαπτομένη στο M και A, B τα σημεία που η (ε) τέμνει τις ασύμπτωτες. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό.

50. ** Έστω κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2$. Αν θέσουμε $x = x'$ και $y = cy'$, να αποδείξετε ότι το σημείο (x', y') ανήκει σε έλλειψη.

51. ** Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ και $M(x_1, y_1)$ ένα σημείο της

διαφορετικό από τις κορυφές της. Αν η κάθετη (ε') της (ε) στο M τέμνει τους άξονες $x'x, y'y$ στα Γ και Δ αντίστοιχα (ε η εφαπτόμενη στο M)

α) να βρεθεί συναρτήσει των x_1, y_1 η εξίσωση της (ε')

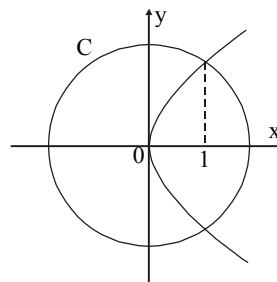
β) να βρεθούν οι συντεταγμένες των Γ και Δ

γ) να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου N του $\Gamma\Delta$

δ) να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος του N είναι μια υπερβολή C_1

ε) να αποδειχθεί ότι οι υπερβολές C και C_1 έχουν τις ίδιες εκκεντρότητες, αλλά τις εστίες σε διαφορετικούς άξονες.

52. ** Ο κύκλος του διπλανού σχήματος διέρχεται από την εστία της παραβολής. Να βρεθούν οι εξισώσεις του κύκλου και της παραβολής.



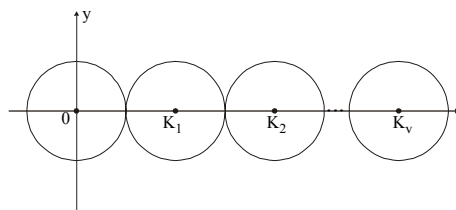
53. ** Στο διπλανό σχήμα ο πρώτος κύκλος C_0 έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ και όλοι οι κύκλοι είναι ίσοι. Να βρεθούν:

α) οι εξισώσεις των κύκλων

$C_1, C_2, \dots, C_v$ (συναρτήσει του ρ)

β) το άθροισμα των αποστάσεων των κέντρων $K_1, K_2, \dots, K_v$ από το κέντρο O

γ) οι κοινές εφαπτόμενες όλων των κύκλων.



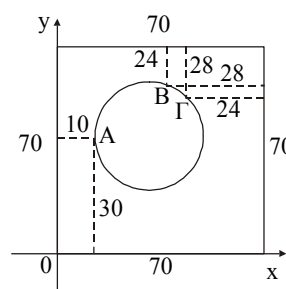
54. ** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις

ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ και την ευθεία $y = 2$.

55. ** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $25x^2 - 4y^2 = 100$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία $3x - y = 0$.

56. ** Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

57. ** Σε μια τετράγωνη πλατεία πλευράς 70 m, υπάρχει μια μικρή τεχνητή λίμνη κυκλικού σχήματος. Προκειμένου να βρεθεί η ακτίνα της λίμνης, τρεις μαθητές επέλεξαν τρία τυχαία σημεία της περιφέρειάς της A, B, Γ και μέτρησαν τις αποστάσεις τους από τις πλευρές της πλατείας, όπως δείχνει το σχήμα.



- α) Στο σύστημα αξόνων Oxy να τοποθετήσετε τα σημεία A, B, Γ. Να θεωρήσετε ότι η απόσταση 1 στους άξονες αντιστοιχεί σε 10 m.
- β) Να υποθέσετε ότι η λίμνη έχει αντίστοιχο σχήμα στους άξονες τον κύκλο $x^2 + y^2 + \kappa x + \lambda y + \mu = 0$ πάνω στον οποίο βρίσκονται τα A, B, Γ. Να υπολογίσετε τα κ , λ , μ .
- γ) Να βρείτε την ακτίνα της λίμνης.

58. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 = 1$ και $C_2: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.
- α) Να δείξετε ότι δεν έχουν κοινό σημείο.
 - β) Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου.
 - γ) Από όλα τα ζεύγη σημείων (A, B) , όπου το A ανήκει στον C_1 και το B στον C_2 , να βρεθεί αυτό για το οποίο τα A, B απέχουν τη μικρότερη απόσταση.
 - δ) Να βρεθεί το ζεύγος σημείων (Γ, Δ) (το Γ στον C_1 , το Δ στον C_2) με τη μεγαλύτερη απόσταση.
59. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ και $M_1(1, \sqrt{3})$.
- α) Να δείξετε ότι $M_1A \perp M_1B$.
 - β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που περνά από τα σημεία A, B, M_1 .
 - γ) Να δείξετε ότι το σημείο $M_2(-1, \sqrt{3})$ ανήκει στον κύκλο και $M_2A \perp M_2B$.
 - δ) Να δείξετε ότι κάθε σημείο $M(x_0, y_0)$ για το οποίο ισχύει $MA \perp MB$, ανήκει στον κύκλο του ερωτήματος (β).
60. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ με κλάδους C_1 και C_2 και τυχαίο σημείο της $M(x_1, y_1)$ στον κλάδο C_1 ($y_1 \neq 0$).
- α) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) στο σημείο M και να βρείτε τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες.
 - β) Να δείξετε ότι η (ε) τέμνει τον $x'x$ σε σημείο μεταξύ των κορυφών της υπερβολής.
 - γ) Με δεδομένο ότι η (ε) τέμνει τον κλάδο C_2 στο $M'(x_2, y_2)$, να δείξετε ότι $y_1 \cdot y_2 < 0$.

