

Μαθηματικά προσανατολισμού Β΄ Λυκείου

Τράπεζα θεμάτων

30- 1-2023

205 ασκήσεις



Στέλιος Μιχαήλογλου – Δημήτρης Πατσιμάς – Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr

Διανύσματα

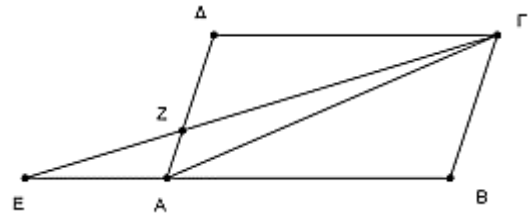
Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

Θέμα 2ο

21165. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$. Τα σημεία E και Z είναι τέτοια ώστε

$$\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ και } \overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{2}\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3}\vec{\beta}$.



(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{Z\Gamma} = 2\overrightarrow{EZ}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Z , E και Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 6)

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Θέμα 2ο

15010. Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου A, B, Γ και τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Delta}$ και $\overrightarrow{\Gamma E}$ τέτοια ώστε $\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{\Gamma B}$.

α) i. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$.

(Μονάδες 8)

ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι αντίθετα.

(Μονάδες 8)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία A, Δ , και E είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 9)

Θέμα 4ο

21885. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ, E σημεία εσωτερικά των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\overrightarrow{AB} = \kappa \cdot \overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \cdot \overrightarrow{AE}$, όπου κ και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε:

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{DE}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

β) i. Αν $\kappa = \lambda$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} \parallel \overrightarrow{DE}$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = \kappa |\overrightarrow{DE}|$.

(Μονάδες 10)

ii. Αν $\kappa = \lambda = 2$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{DE}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί.

(Μονάδες 7)

Συντεταγμένες διανύσματος

Θέμα 2ο

14666. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν τα $\vec{\beta}, \vec{w}, \vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων K, Λ , και M αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 7)

15002. Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $\Delta(4,5)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (3, -3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3, 6)$.

(Μονάδες 11)

β)

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 8)

15043. Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0,5)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(6,-1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.

α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

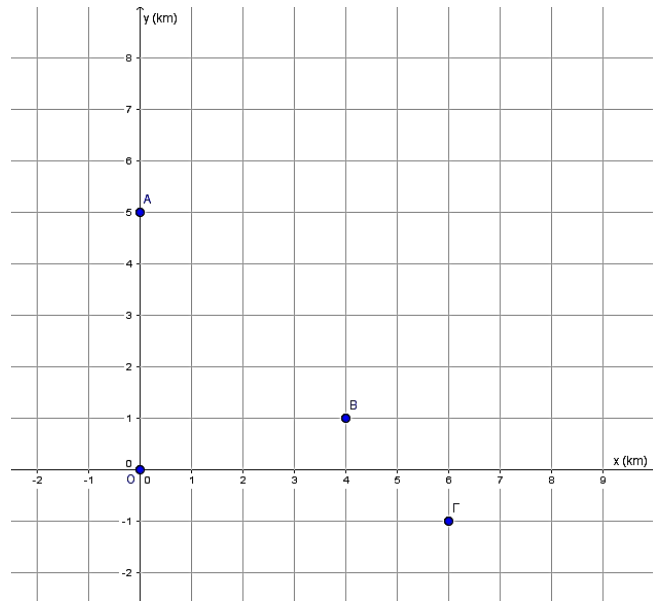
(Μονάδες 06)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό Γ .

(Μονάδες 12)



15854. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2,1)$ και $\vec{b} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{a} \perp \vec{b}$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ ισχύει $\vec{b} = -4\vec{a}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{b}$ είναι τετραπλάσιο του διανύσματος $\vec{a}$.

(Μονάδες 8)

16147. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{b} = \sqrt{2}\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1,1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ και $\vec{\delta}$.

(Μονάδες 9)

β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με τον θετικό ημιάξονα Ox .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 6)

16151. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3,3)$ και $\vec{b} = (-\sqrt{3},1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{a}, \vec{b})$.

(Μονάδες 9)

16579. Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$ και $B(6,7)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 07)

β) Αν $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$.

(Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα.

(Μονάδες 10)

16580. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(11, 5)$, $\Gamma(3, 7)$ και ένα σημείο Δ ώστε

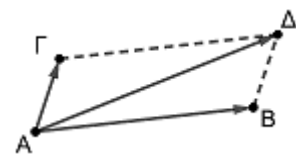
το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 12)

β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$.

(Μονάδες 08)



γ) του σημείου Δ.

(Μονάδες 05)

16581. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(-1, 6)$, $B(1, 2)$ και $\Gamma(3, -2)$.

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το B είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(Μονάδες 07)

17070. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$, $B(2, 1)$, $\Gamma(3, -1)$ και $\Delta(4, 2)$.

α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία και A, B, Γ και Δ.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

19038. Δίνεται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-5, -5)$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{b}$ με τον άξονα x' .

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{b}|$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή

$$\vec{\gamma} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}.$$

(Μονάδες 8)

22557. Το ισοσκελές τρίγωνο ABΓ έχει βάση ΒΓ και ύψος ΑΟ.

Η κορυφή Α είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές B και Γ είναι σημεία του άξονα x' , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Έστω $(B\Gamma) = 12$, $(AO) = 8$ και M το μέσο της πλευράς ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $A(0, 8)$, $B(-6, 0)$ και $\Gamma(6, 0)$.

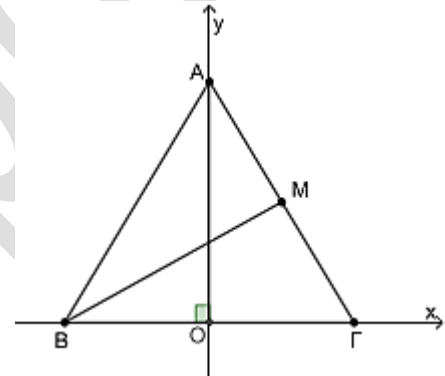
(Μονάδες 9)

ii. $M(3, 4)$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου BM.

(Μονάδες 7)



Θέμα 4ο

17076. Δίνονται τα σημεία $A(-3, -1)$, $B(0, 3)$ και $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \geq 5$.

(Μονάδες 6)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4.$$

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

17077. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} \text{ και } \overrightarrow{OB} = (\lambda+1)\vec{i} + (\lambda+3)\vec{j}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (\lambda-1)\vec{i} + 3\vec{j}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποιες τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5;

(Μονάδες 7)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Θέμα 2ο

14586. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(5,-2)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία A είναι ορθή. (Μονάδες 9)
- β) Αν M είναι το μέσο του $B\Gamma$, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 8)
- γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AM}$. (Μονάδες 8)

14953. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-2,5)$, $B(7,8)$, $\Gamma(1,-4)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $BA\Gamma$. (Μονάδες 5)

15038. Θεωρούμε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ τέτοια, ώστε $|\vec{a}|=3$, $|\vec{\beta}|=4$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

- α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$. (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε τα $\vec{a}^2$ και $\vec{\beta}^2$. (Μονάδες 6)
- γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{a} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{\beta}) = 15$. (Μονάδες 10)

15073. Δίνονται τα $\vec{a} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,3)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$. (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\gamma}$. (Μονάδες 9)

15186. Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,3)$, $\Delta(1,-2)$ και $\Gamma(9,2)$. Να αποδείξετε ότι:

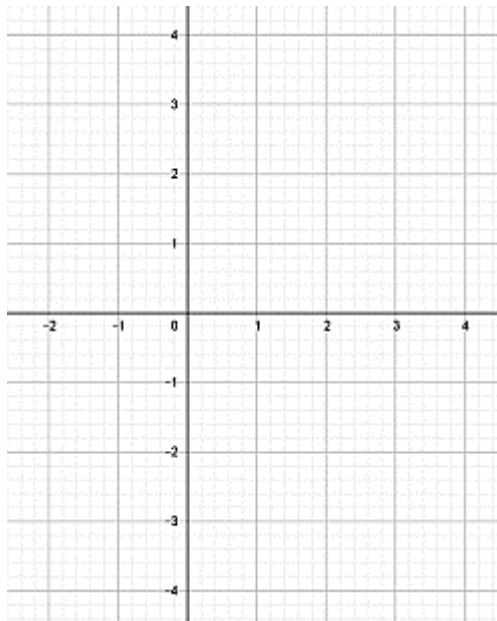
- α) Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4,2)$ και το μέσο N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5,0)$. (Μονάδες 8)
- β) $\overrightarrow{MN} = (1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8,4)$. (Μονάδες 8)
- γ) $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 9)

15252. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3,-1)$.

- α) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = (1,-2)$. (Μονάδες 8)
- β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την $A\Gamma$. (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

15317. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (3,0)$ και $\vec{w} = (-3,4)$.

- α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα. (Μονάδες 12)
- β) i. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$



ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

(Μονάδες 10)

(Μονάδες 3)

15379. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (3, -1)$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$.

(Μονάδες 13)

β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

(Μονάδες 12)

15463. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$ και $\overrightarrow{AG} = (3, -1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{BG} = (1, -2)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BG}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BG}|$.

(Μονάδες 8)

15658. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -2)$ και $\vec{b} = (1, 1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο $K(2, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 4)

β) Αν το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{a}$, B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{b}$ και

$\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας AB,

i. να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι $A(4, -1)$ και $B(3, 2)$.

(Μονάδες 5)

ii. να δείξετε ότι $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$.

(Μονάδες 6)

iii. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του

ευθύγραμμου τμήματος AB και $|\overrightarrow{KG}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

(Μονάδες 10)

15825. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ με $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma} = \vec{a} - \vec{b}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\gamma} = 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη $(\vec{a}, \vec{\gamma})$.

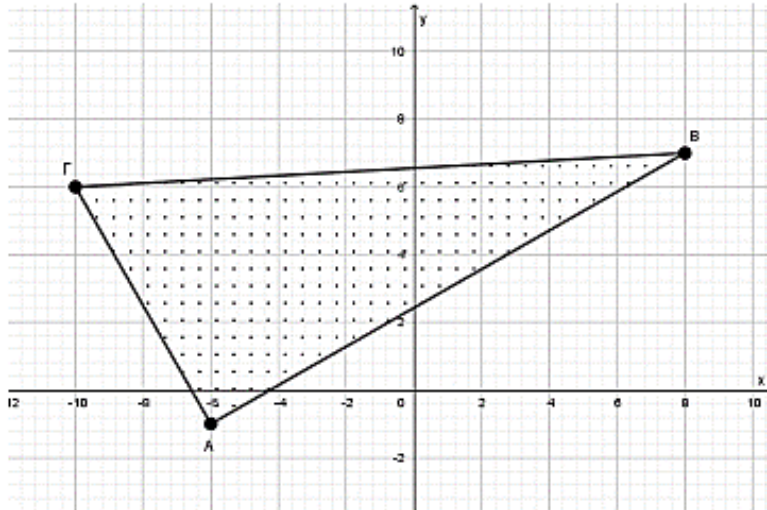
(Μονάδες 7)

15852. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3, 2)$, $\vec{b} = (-2, 1)$.

Να υπολογίσετε:

- α) το διάνυσμα $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. (Μονάδες 7)
 β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$. (Μονάδες 6)
 γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{v}$. (Μονάδες 12)

15996. Δίνονται τα σημεία $A(-6, -1)$, $B(8, 7)$, $\Gamma(-10, 6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.



- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\vec{AB} + \vec{B\Gamma}$. (Μονάδες 10)
 β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού. (Μονάδες 15)

16141. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς 10 και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

- α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

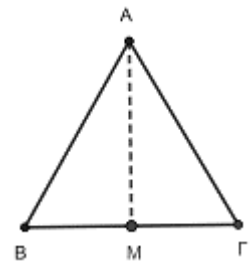
- i. $(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})$ ii. $(\vec{AM}, \vec{B\Gamma})$ iii. $(\vec{AM}, \vec{\Gamma A})$
 iv. $(\vec{BM}, \vec{\Gamma M})$ v. $(\vec{\Gamma M}, \vec{\Gamma B})$

(Μονάδες 10)

- β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

- i. $\vec{AM} \cdot \vec{B\Gamma}$ ii. $\vec{AM} \cdot \vec{\Gamma A}$ iii. $\vec{\Gamma M} \cdot \vec{\Gamma B}$

(Μονάδες 15)

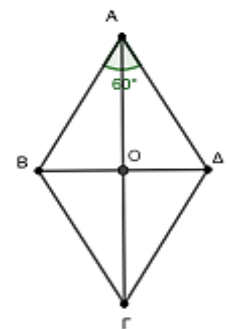


16144. Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O , πλευρά 4 και $\angle A = 60^\circ$.

Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

- α) $\vec{AB} \cdot \vec{A\Delta}$
 β) $\vec{A\Delta} \cdot \vec{B\Gamma}$
 γ) $\vec{O\Delta} \cdot \vec{A\Gamma}$
 δ) $\vec{O\Delta} \cdot \vec{O\Gamma}$
 ε) $\vec{A\Delta} \cdot \vec{\Gamma\Delta}$

(Μονάδες 25)



16426. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.

- α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$. (Μονάδες 10)

- β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x, y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$. (Μονάδες 15)

16427. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(0, 8)$, $\Gamma(5, 3)$ και $\Delta(10, 5)$. Να υπολογίσετε:

- α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 12)

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 13)

16428. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{a} + 2\vec{\beta}| = |\vec{a} - 2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$. (Μονάδες 15)

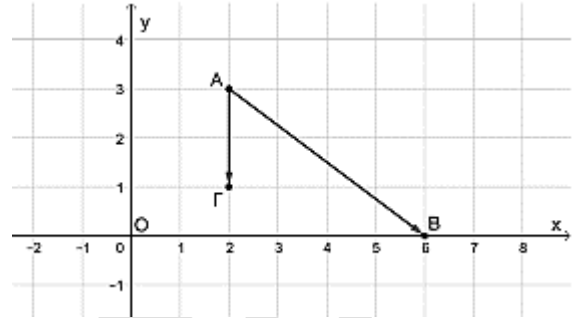
β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

17075. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ του καρτεσιανού επιπέδου.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} = (4, -3)$ και $\vec{A\Gamma} = (0, -2)$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$.

(Μονάδες 13)



20685. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{w} = (-10, 2)$ και τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(0, \gamma)$.

Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{A\Gamma}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma}$. (Μονάδες 7)

20888. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν:

$|\vec{a}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 15)

22170. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{\beta} = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u} = (3, 4)$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά; (Μονάδες 09)

22554. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy , με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$, $y'y$ τα $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως $\vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ και $\vec{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$.

Έστω M ένα σημείο τέτοιο ώστε $\vec{OM} = \frac{1}{5}(2\vec{OA} - \vec{OB})$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$. (Μονάδες 8)

ii. $\vec{OM} = \vec{j}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{OM}$. (Μονάδες 9)

4ο Θέμα

15042. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο του επιπέδου M , τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Γ, M είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το M είναι το μέσο του $B\Gamma$. (Μονάδες 2)

γ) Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \kappa$ και $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \lambda$.

Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AB}$ ισχύει ότι $\kappa \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB}$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$. (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες. (Μονάδες 8)

15320. Δίνεται παραλληλόγραμμο $OAGB$ με $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, όπου $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i. $|\overrightarrow{OG}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$. (Μονάδες 9)

ii. $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$. (Μονάδες 9)

β) Αν $|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{AB}|$, να δείξετε ότι το $OAGB$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

18520. α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ ισχύει:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 \quad (1)$$

(Μονάδες 06)

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο $OAGB$ με $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{a} + \vec{b}$ και $\vec{a} - \vec{b}$.

(Μονάδες 05)

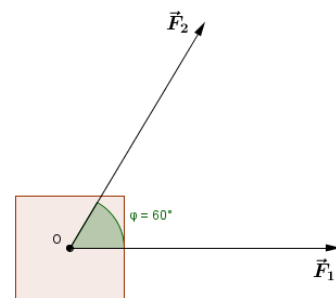
ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1).

(Μονάδες 04)

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα 10 N (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι 60° .

Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και να βρείτε το μέτρο της.

(Μονάδες 10)



18547. Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda - 2, \lambda - 3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :

i. Τα σημεία A, B και Γ να είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο με $\angle A = 90^\circ$. (Μονάδες 7)

β) Για $\lambda = -2$, να βρείτε:

i. Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 4)

ii. Το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 6)

3ο Θέμα

18243. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 4, (\hat{\vec{\alpha}}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και

$$\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}.$$

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη γωνία $(\hat{\vec{\gamma}}, \vec{\delta})$. (Μονάδες 5)

Ευθεία

Εξίσωση ευθείας

2ο Θέμα

15027. Δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(3, 5)$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .

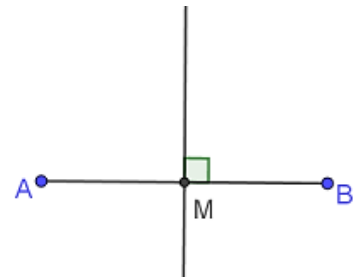
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετου του τμήματος AB .

(Μονάδες 10)



15044. Δίνονται τα σημεία $A(0, 5)$ και $B(6, -1)$.

α) i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB , είναι το σημείο $M(3, 2)$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ϵ) του ευθύγραμμου τμήματος AB .

(Μονάδες 15)

15271. Δίνονται τα σημεία $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$ και $\Gamma(-13, -7)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα A , B .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα A , B έχει εξίσωση $y = x + 5$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην AB .

(Μονάδες 10)

15986. Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2, 3)$.

α) i) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα A , B .

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι η (ϵ): $y = 2x - 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $\Gamma(2^{100}, 5)$ ανήκει στην ευθεία (ϵ).

(Μονάδες 13)

16002. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(3, -2)$ και $\Gamma(5, 2)$. Αν το σημείο $M\left(3, \frac{1}{2}\right)$ είναι το μέσο της $B\Gamma$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $B(1, -1)$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $A\Gamma$.

(Μονάδες 10)

18236. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(-1, 5)$ και $B(2, 1)$. Αν οι πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\epsilon_1: y = -x + 4$ και $\epsilon_2: y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma(4, 0)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε:

i. το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $A\Gamma$

(Μονάδες 6)

ii. την εξίσωση του ύψους BD .

(Μονάδες 7)

18351. Δίνονται τα σημεία $A(-1, 5)$, $B(3, 3)$. Να υπολογίσετε:

α) Τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .

(Μονάδες 8)

β) Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .

(Μονάδες 8)

γ) Την εξίσωση της μεσοκάθετου (η) του τμήματος AB .

(Μονάδες 9)

21662. Δίνεται η ευθεία $\epsilon: -x + y - 2 = 0$ και τα σημεία $A(-5, 1)$ και $B(-3, 5)$.

α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς το σημείο B .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε:

i. την εξίσωση της ευθείας ϵ' που διέρχεται από το B και είναι κάθετη στην ϵ .

(Μονάδες 5)

ii. το σημείο τομής των ευθειών ϵ και ϵ' .

(Μονάδες 5)

iii. το συμμετρικό του σημείου B ως προς την ευθεία ε.

(Μονάδες 5)

21162. Δίνονται τα σημεία A(3,2) και B(-1,-6). Να βρεθούν:

α) Οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB.

(Μονάδες 8)

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B.

(Μονάδες 8)

γ) Η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος AB.

(Μονάδες 9)

21964. Δίνονται το σημείο A(4,-2) και η ευθεία (ϵ_1) με εξίσωση: $x - y + 2 = 0$. Να βρείτε:

α) την ευθεία (ϵ_2) που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ_1).

(Μονάδες 6)

β) το σημείο τομής B, των ευθειών (ϵ_1) και (ϵ_2): $y = -x + 2$.

(Μονάδες 8)

γ) το συμμετρικό Γ του σημείου A, ως προς την ευθεία (ϵ_1).

(Μονάδες 11)

22071. Οι πλευρές AB και AD ενός παραλληλογράμμου ABΓΔ έχουν εξισώσεις $x + 2y + 1 = 0$ και $2x + y + 5 = 0$ αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο K(1,2).

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η κορυφή A του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες A(-3, 1).

(Μονάδες 08)

ii. Η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Γ(5, 3).

(Μονάδες 07)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του ΒΓ και ΓΔ.

(Μονάδες 10)

22092. Δίνεται τετράπλευρο ABΓΔ με κορυφή A(1,4). Η πλευρά AD έχει εξίσωση $3x - 2y + 5 = 0$ και η διαγώνιος BD έχει εξίσωση $y = x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες Δ(-1,1).

(Μονάδες 12)

β) Αν οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ.

(Μονάδες 13)

22173. Δίνεται το τετράγωνο ABΓO με κορυφές τα σημεία A(0,4), B(4,4), Γ(4,0), O(0,0). Στην διαγώνιο ΑΓ παίρνουμε σημείο Z, τέτοιο ώστε

$$\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AG}.$$

Επίσης, θεωρούμε το μέσο Δ της ΒΓ.

α) Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

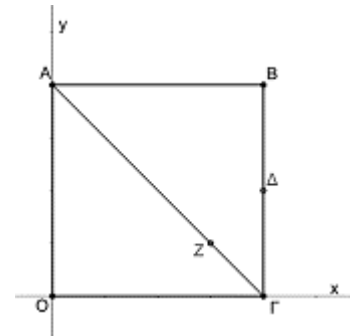
(Μονάδες 07)

ii. Τις συντεταγμένες του σημείου Z.

(Μονάδες 09)

β) Αν το σημείο Δ είναι το (4,2) και το σημείο Z το (3,1), να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΔ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΓ.

(Μονάδες 09)



4ο Θέμα

14970.15275. (διπλή) Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο M(2, 1).

α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το M. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της.

ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

(Μονάδες 6) (2+4)

β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A, B αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων OA, OB.

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

(Μονάδες 19) (6+7+6)

14978. Δίνονται τα σημεία A(1,1), B(3,3).

α) Αν M(x, y) σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1, d_2 του M από τα A και B αντίστοιχα.

(Μονάδες 6)

β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1, d_2 , ώστε το σημείο M να ανήκει στη μεσοκάθετο του AB.

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του AB.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣAB να είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 7)

15029. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB καθώς και τη γωνία φ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

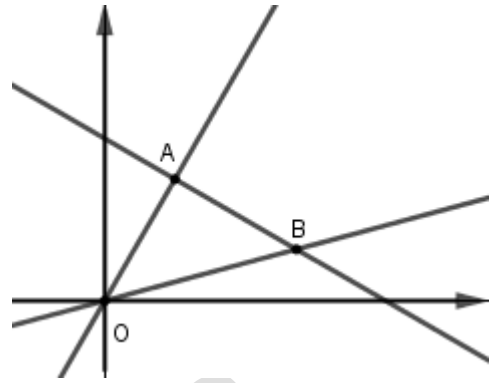
(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$.

(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι $\varepsilon\phi 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

(Μονάδες 6)



16003. Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών $\varepsilon_\alpha: (\alpha-4)x - 2\alpha y + \alpha + 4 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\alpha = 0$ και όταν $\alpha = 1$ και κατόπιν να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο M .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το M .

(Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox , Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha < 4$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $(OA) = 2(OB)$

(Μονάδες 5)

17078. Δίνονται τα σημεία $A(3, 2\alpha)$, $B(4, \alpha)$, $\Gamma(\alpha+1, 1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha, 1)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση $y = -\alpha x + 5\alpha$.

(Μονάδες 6)

ii. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

(Μονάδες 7)

iii. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

(Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό:

«Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

18568. Δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(3, -2)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 04)

β) Αν η ευθεία AB τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα σημείο Δ και η ευθεία $A\Gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο E , τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E .

(Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{E\Gamma}$.

(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔE είναι παράλληλη της $B\Gamma$.

(Μονάδες 05)

3ο Θέμα

15178. Δίνεται η εξίσωση $(\mu+1)x + (\mu+2)y = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ (1).

α) i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 08)

ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 02)

β) i. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης 0; Ποια είναι η εξίσωσή της;

(Μονάδες 03)

ii. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης; Ποια είναι η εξίσωσή της;

(Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού μ , προκύπτει ευθεία η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$. Ποια είναι η εξίσωσή της; (Μονάδες 09)

Γενική μορφή ευθείας

2ο Θέμα

15657. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$

α) Να βρείτε το κοινό τους σημείο M. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 : 3x - y = 4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 13)

16766. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις $x - 3y = 4$ και $9x + 3y = 6$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A(1, -1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)

22072. Δίνονται οι εξισώσεις (1): $\lambda x + (\lambda - 1)y - 4 = 0$ και (2): $(3\lambda + 1)x - 2\lambda y - 7 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 10)

22171. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x - y = 5$ και $\varepsilon_2 : x - y + 1 = 0$.

α) Να βρεθεί το σημείο τομής τους M. (Μονάδες 10)

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(3,4)$ και είναι κάθετη στην (ε_2). (Μονάδες 10)

β) Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε_1). (Μονάδες 05)

4ο Θέμα

15004.α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(4,2)$ και $B(8,5)$.

(Μονάδες 5)

β) Αν $\varepsilon_1 : 3x - 4y - 4 = 0$, να δείξετε ότι η οξεία γωνία που σχηματίζει με την ευθεία

$\varepsilon_2 : 7x - y - 1 = 0$ είναι $\hat{\varphi} = 45^\circ$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 . (Μονάδες 4)

δ) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε_3 τέτοιας ώστε η ε_2 να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_3 . (Μονάδες 8)

15253. Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0$ (1), όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η (1) παριστάνει ευθεία ε . (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ευθείες ε :

i. είναι παράλληλες στον $x'x$. (Μονάδες 4)

ii. είναι παράλληλες στον $y'y$. (Μονάδες 4)

iii. διέρχονται από το $(0,0)$. (Μονάδες 4)

γ) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες ε που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο. (Μονάδες 8)

15475. Δύο εργοστάσια A και B τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες $A(2,1)$, $B(4,3)$, βρίσκονται κοντά σε μια ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια. (Μονάδες 8)



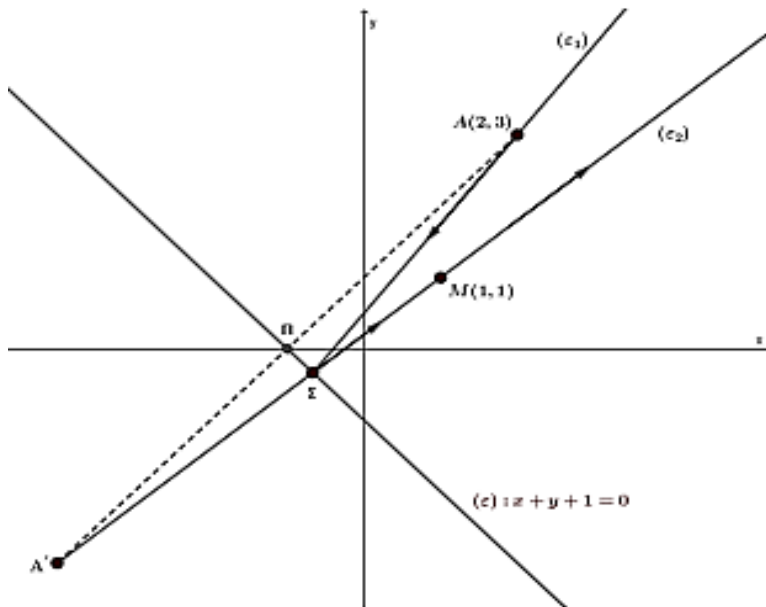
β) Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση $\varepsilon: y = 2x - 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια.

(Μονάδες 10)

γ) Αν το ζητούμενο σημείο του ερωτήματος β) είναι $N(4,1)$, να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό.

(Μονάδες 7)

15439. Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $A(2,3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία (ε) με εξίσωση $x + y + 1 = 0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$.



α) i. Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε) είναι το σημείο $\Pi(-1,0)$.

(Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία (ε) είναι το σημείο $A'(-4,-3)$.

(Μονάδες 5)

β) i. Αν γνωρίζετε ότι η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία (ε_2) η οποία διέρχεται από τα σημεία A' , Σ , M , τότε να βρείτε την εξίσωσή της.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου πρόσπτωσης Σ της φωτεινής ακτίνας (ε_1) πάνω στην ευθεία (ε) .

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\Sigma\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, τότε να βρείτε την εξίσωση της προσπίπτουσας ακτίνας (ε_1) .

(Μονάδες 4)

16477. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , η εξίσωση ευθείας $\varepsilon_\lambda: \lambda x + (1 - \lambda)y + 2 = 0$

όπου λ αριθμός που μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, παριστάνει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ . Ακόμη δίνεται ότι ένα φορτηγό πλοίο είναι αγκυροβολημένο στο σημείο $O(0,0)$.

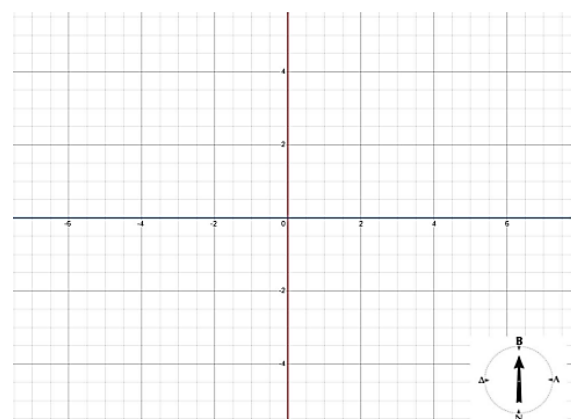
α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ .

(Μονάδες 10)

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.

(Μονάδες 5)

β) Ένα ρυμουλκό πλοίο P βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ . Η φωτεινή ακτίνα που φωτίζει το P έχει εξίσωση $x + y + 4 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου P όταν είναι γνωστό ότι η



συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει
το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το
αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι ίση
με 4 μονάδες μήκους. (Μονάδες 10)

18244. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \sqrt{3}x$ και $\varepsilon_2 : y = x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι 15° . (Μονάδες 3)

δ) Να αποδείξετε ότι $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$. (Μονάδες 10)

21160. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οxy θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία $O(0, 0)$, $B(\kappa, 0)$ και $\Gamma(0, 2\kappa)$ όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου ΟΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΟΒΔΕ και ΟΓΖΗ, τότε:

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΒΖ. (Μονάδες 10)

β) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους του τριγώνου ΟΒΓ που διέρχεται από το Ο. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΓΔ, ΒΖ και το ύψος του β) ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 8)

21652. Δίνονται οι εξισώσεις $\lambda x + y = 2\lambda$ (1) και $x + \lambda y = \lambda + 1$ (2), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες ε_λ και η_λ αντίστοιχα. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες ε_λ και η_λ τέμνονται. (Μονάδες 6)

γ) Για $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

i. να βρείτε συναρτήσει του λ τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των ε_λ και η_λ . (Μονάδες 7)

ii. αν $M\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$ να αποδείξετε ότι το Μ κινείται στην ευθεία $\zeta : x - y = 1$. (Μονάδες 6)

Εμβαδόν τριγώνου

2ο Θέμα

15440. Δίνονται τα σημεία $A(0, 2)$, $B(3, 0)$ και $\Gamma(1, 1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 9)

β) i. Να εξετάσετε αν τα σημεία Α, Β και Γ ορίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 8)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

16194. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1) : 8x + y - 28 = 0$, $(\varepsilon_2) : x - y + 1 = 0$, $(\varepsilon_3) : 3x + 4y + 5 = 0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των (ε_1) και (ε_2) . (Μονάδες 09)

β) Αν το σημείο τομής είναι το $M(3, 4)$ να υπολογίσετε:

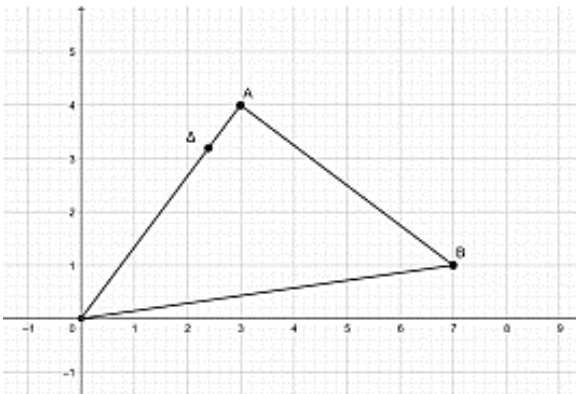
i. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 08)

ii. Την απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία (ε_3) . (Μονάδες 08)

16425. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \frac{2}{3}x + 1$ και $\varepsilon_2 : x = \frac{3}{2}y + 9$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 . (Μονάδες 13)

- 16759.** Δίνονται οι ευθείες (ε_1) , (ε_2) και (ε_3) με εξισώσεις $x - 2y = -1$, $2x + y = 4$ και $y = -1$ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$. (Μονάδες 9)
γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε_3) . (Μονάδες 8)
- 16769.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(1,7), B(-1,5) και Γ(3,3).
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 9)
β) Αν M είναι το μέσο της πλευράς BΓ, τότε να υπολογίσετε:
i. Τις συντεταγμένες του M.
ii. Την εξίσωση της διαμέσου AM. (Μονάδες 16)
- 16771.** Δίνονται τα σημεία A(2,1), Γ(4,-1) και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$.
α) Να βρεθεί το σημείο B. (Μονάδες 9)
β) Αν B(5,0):
i. Να δείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 8)
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 8)
- 16774.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A(2,5), B(3,6) και Γ(-1,-2).
α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας BΓ. (Μονάδες 7)
β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το A. (Μονάδες 9)
γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)
- 16810.** Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία A(1,1), B(5,2), Γ(0,-2) και Δ(8,0).
α) Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο. (Μονάδες 10)
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου του ερωτήματος α). (Μονάδες 15)
- 18240.** Δίνεται το σημείο A(1, 2) και η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 3$.
α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) . (Μονάδες 7)
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην (ε) . (Μονάδες 8)
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες (η) , (ε) . (Μονάδες 10)
- 17805.** Δίνεται το τρίγωνο AOB με A(3, 4), B(7,1), O η αρχή των αξόνων και το σημείο $\Delta\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$ της πλευράς AO.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$. (Μονάδες 7)
β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$. (Μονάδες 9)
γ) Δίνεται ότι $(OAB) = \frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.
 Να δείξετε ότι $(A\Delta B) = \frac{1}{5}(OAB)$. (Μονάδες 10)
- 
- 18733.** Δίνονται τα σημεία A(4,3), B(1,1) και Γ(6,0).
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 8)
β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 8)

γ) Δίνεται το σημείο $M\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Να δείξετε ότι $(MA) = (MB)$. (Μονάδες 9)

18979. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + 3y = 5$ και $\varepsilon_2: 4x + 6y = 8$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1,1)$ είναι σημείο της ευθείας ε_1 . (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε_2 . (Μονάδες 10)

20885. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-3, -1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε . (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, είναι: $E = 8$. (Μονάδες 13)

20864. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x + y - 6 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x + y + 2 = 0$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. (Μονάδες 12)

β) i. Να δείξετε ότι το σημείο $A(0,6)$ ανήκει στην ευθεία ε_1 . (Μονάδες 5)

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 . (Μονάδες 8)

20926. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x - 2y = 1$ και τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία ε ενώ το σημείο A δεν είναι σημείο της ε . (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε . (Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του A από το B και να αποδείξετε ότι η προβολή του A στην ευθεία ε είναι το B . (Μονάδες 09)

4ο Θέμα

14984. Θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -3)$ και $B(7, 9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων M που είναι κορυφές των τριγώνων AMB ώστε $(AMB) = 12$ τ.μ.

α) Να αποδείξετε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών $(\varepsilon_1): 4x - 3y - 9 = 0$ και $(\varepsilon_2): 4x - 3y + 7 = 0$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2) . (Μονάδες 9)

γ) Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2 . Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα $AXBY$ υπάρχουν, αν το X πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Y σημείο της (ε_2) , που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2 ; Εξηγήστε. (Μονάδες 7)

15194. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1)$, $B(4,4)$ και $\Gamma(3,1)$.

α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε σημείο K της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε $(KA) = (KB)$. Τι ιδιότητα έχει το σημείο K ; (Μονάδες 9)

15273. Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(3,4)$, $B(2,5)$ και $\Gamma(-2,2)$ και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha - 1, 3\alpha + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην $B\Gamma$. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου M ισχύει $(MB\Gamma) = (AB\Gamma)$. Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά; (Μονάδες 8)

15380. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α)** Να βρείτε για ποια τιμή του α , η απόσταση του σημείου A από το σημείο B είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε . (Μονάδες 8)
- β)** Για $\alpha = 4$
- i.** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 8)
- ii.** Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 9)

15433. Δύο οικισμοί A και B βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $A(-1,-2)$ και $B(3,1)$.

Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση $\delta: x + y - 1 = 0$.

- α)** Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ :
- i.** Ο οικισμός A έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο. (Μονάδες 8)
- ii.** Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς. (Μονάδες 7)
- β)** Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία A , B και Γ είναι ίσο με 8. (Μονάδες 10)

15681. Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $B\left(\frac{\alpha}{2},\beta\right)$ και $M\left(\frac{\alpha}{2},0\right)$ που α, β , σταθεροί θετικοί

πραγματικοί αριθμοί.

- α)** Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και το σημείο M είναι το μέσο της βάσης του OA . (Μονάδες 6)
- β)** Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών OB και AB είναι $OB: 2\beta x - \alpha y = 0$ και $AB: 2\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)
- γ)** Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία OB και d_2 η απόσταση του σημείου M από την ευθεία AB , να αποδείξετε ότι $d_1 = d_2$. (Μονάδες 8)
- δ)** Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί; (Μονάδες 3)

15987. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,3)$

- α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι η $(\varepsilon): y = 2x - 1$. (Μονάδες 8)
- β)** Να αιτιολογήσετε αν το σημείο $\Gamma(2^{100}, 5)$ ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ε) και την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. (Μονάδες 8)
- γ)** Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου AOB . (Μονάδες 9)

16057. Δίνονται τα σημεία $A(2,0)$, $B(3,4)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) i.** Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και έχουν κλίση λ . (Μονάδες 5)
- ii.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο A , έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B , έχει εξίσωση $(\varepsilon): 15x - 8y - 30 = 0$. (Μονάδες 8)
- β)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ) , εκτός από την (ε) , η οποία διέρχεται από το σημείο A και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B . (Μονάδες 5)
- γ)** Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ) . (Μονάδες 7)

17694. Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις A και B έχουν συντεταγμένες $A(3,6)$ και $B(7,-2)$.

- α)** Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή. (Μονάδες 12)
- β)** Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ , ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία A , B και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη. (Μονάδες 13)

17695. Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία A και B. Κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$ η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1, 2t-1)$ και του δευτέρου $B(3t-1, -4t-1)$.

- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία. (Μονάδες 8)
 β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται; (Μονάδες 7)
 γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή $t=2$. (Μονάδες 5)
 δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου A από την ευθεία $\varepsilon: 4x + 3y + 7 = 0$ ισούται με 6. (Μονάδες 5)

22073. Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο $\Lambda(2,6)$ και η θέση ενός πλοίου με το σημείο $\Pi(\lambda-1, 2+\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) i. Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του. (Μονάδες 07)
 ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι. (Μονάδες 05)
 β) Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:
 i. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι; (Μονάδες 06)
 ii. Το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι. (Μονάδες 07)

22262. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία $A(-2, 1)$, $B(1, 5)$ και $\Gamma(5, -1)$.

- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 5)
 β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας BΓ. (Μονάδες 5)
 γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή A. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας BΓ, από το οποίο, το A απέχει την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 8)
 δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $(\mathbf{MAB}) = \frac{1}{2}(\mathbf{AB\Gamma})$. (Μονάδες 7)

22265. Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$, $B(2, 2)$ και $\Gamma(\mu-1, 3\mu-2)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, το σημείο Γ κινείται στην ευθεία $\varepsilon: y = 3x + 1$. (Μονάδες 6)
 β) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 6)
 γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι σταθερό. (Μονάδες 5)
 δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο B και από τις οποίες το σημείο A, απέχει απόσταση ίση με 1. (Μονάδες 8)

22266. Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda + 1)x - (\lambda - 2)y + \lambda - 7 = 0$ (E) με $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση:

$$6x - 8y + 3 = 0.$$

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (E) παριστάνει ευθεία. (Μονάδες 6)
 β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (E), για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 7)
 γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (E) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε); (Μονάδες 7)
 δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου $M(1,3)$ από την ευθεία (ζ). (Μονάδες 5)

3ο Θέμα

15152. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου A από το σημείο B. (Μονάδες 5)
 β) Για ποιες τιμές του α , η απόσταση AB είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε . (Μονάδες 8)
 γ) Για $\alpha = 4$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 12)

Κωνικές τομές

Κύκλος

2ο Θέμα

15028. Έστω κύκλος C με κέντρο K(1,2) και ακτίνα $\rho=2$ και ευθεία (ε) με εξίσωση $3x + 4y - 1 = 0$.

- α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C. (Μονάδες 8)
 β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K(1,2) από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2. (Μονάδες 9)
 γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C. (Μονάδες 8)

15680. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ με κέντρο K(1, 2) και η ευθεία ε: $3x + 4y + 1 = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho = 2$. (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$. (Μονάδες 10)
 γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 5)

15994. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ (1).

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 13)
 β) Να σχεδιάσετε τον κύκλο και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες. (Μονάδες 12)

16773.α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το O(0,0) και διέρχεται από το σημείο A(1,2). (Μονάδες 08)

β) Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$.

- i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο A. (Μονάδες 09)
 ii. Να βρεθεί το σημείο B, το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του A σε αυτόν τον κύκλο. (Μονάδες 08)

16808. Τα σημεία A(-8, 1), B(4, 5) και Γ(-4, 9) είναι σημεία ενός κύκλου C.

- α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 15)
 β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C. (Μονάδες 10)

17317. Δίνεται ο κύκλος C: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ και η ευθεία ε: $3x - 4y = 8$.

- α) Να βρείτε το κέντρο K του κύκλου C και την ακτίνα του. (Μονάδες 5)
 β) Αν K(1,2), να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ε είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{13}{5}$. (Μονάδες 13)
 γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. (Μονάδες 7)

18238. Δίνονται τα σημεία A(1,3) και B(-3,5).

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του τμήματος AB. (Μονάδες 7)
 β) Να αποδείξετε ότι $(KA) = \sqrt{5}$. (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB. (Μονάδες 10)

18239. Δίνεται το σημείο K(-3,1) και η ευθεία (ε): $4x - 3y + 5 = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου K από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2. (Μονάδες 6)
 β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται στην ευθεία (ε). (Μονάδες 9)
 γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία (ε). (Μονάδες 10)

18241. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

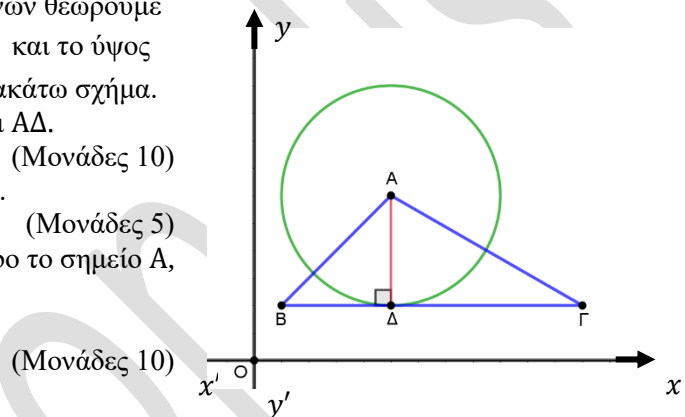
- α) τον κύκλο C . (Μονάδες 9)
 β) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον $y'y$ και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 8)
 γ) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx' και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 8)

18700. Δίνεται κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.

- α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 5)
 β) Δίνεται το σημείο $A(3, -4)$.
 i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον κύκλο C . (Μονάδες 05)
 ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο A . (Μονάδες 10)

18749. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ ώστε $A(5, 6)$, $B(1, 2)$, $\Gamma(12, 2)$ και το ύψος του AD , όπου Δ σημείο της $B\Gamma$, όπως στο παρακάτω σχήμα.

- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $B\Gamma$ και AD . (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ . (Μονάδες 5)
 γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο A , ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $B\Gamma$ στο σημείο Δ . (Μονάδες 10)



19039. Δίνεται η εξίσωση $(x-1)(x+3) + (y+1)(y-3) = -4$ (1).

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, 1)$ και ακτίνα $R = 2$. (Μονάδες 9)
 β) i. Να βρείτε τα σημεία A και B του κύκλου (K, R) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με -1 . (Μονάδες 8)
 ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά. (Μονάδες 8)

20890. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(3, -3)$, $B(2, -8)$ και $\Gamma(7, -3)$. Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 10)
 β) την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στην πλευρά $B\Gamma$. (Μονάδες 15)

21962. Δίνονται τα σημεία $A(0, 3)$, $B(3, 4)$ και $\Gamma(1, 0)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $BA\Gamma$ είναι ορθή. (Μονάδες 13)
 β) Να βρείτε το μέσο K της υποτεινουσας $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)
 γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A , B και Γ . (Μονάδες 7)

21965. Δίνονται τα σημεία $A(2, -4)$ και $B(0, -2)$

- α) Να βρείτε το μέσο M του τμήματος AB . (Μονάδες 4)
 β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος AB . (Μονάδες 5)
 γ) Αν (ζ): $y = x - 4$ και (ϵ): $y = 2x - 6$, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ζ), (ϵ). (Μονάδες 9)

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A , B και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία (ϵ) είναι η $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$. (Μονάδες 7)

22147. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0$ (1).

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $R = 2$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο του κύκλου (K,R). (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K,R) στο A. (Μονάδες 8)

22172. Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y = 0$ και το σημείο $A(-2,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου A από την ευθεία είναι 2. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (η) κάθετης στην (ε) που διέρχεται από το σημείο A. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο A και εφάπτεται στην ευθεία (ε). (Μονάδες 07)

22279. Δίνεται η εξίσωση $(y-1)^2 = (3+x)(1-x)$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R = 2$. (Μονάδες 9)

β) Η αρχή $O(0,0)$ των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K,R). (Μονάδες 7)

γ) Η ευθεία (ε): $x + y = 2$ είναι τέμνουσα του κύκλου (K,R). (Μονάδες 9)

4ο Θέμα

14954. Θεωρούμε τις εξισώσεις $(\varepsilon_1): \mu x - y - \mu = 0$ και $(\varepsilon_2): (\mu+1)x + (\mu-1)y - \mu + 1 = 0, \mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι 45° για κάθε τιμή της παραμέτρου μ . (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. (Μονάδες 9)

15030. Δίνεται ο κύκλος $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x + y + 5 = 0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C. (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες $(\eta_1), (\eta_2)$ που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\eta_1), (\eta_2)$. (Μονάδες 6)

15080. Δίνονται οι εξισώσεις $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ (1) και $C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ (2).

α) Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα $K(1,0)$, $\Lambda(3,0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 1$ αντίστοιχα. (Μονάδες 6)

β) i. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ). (Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 . (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2 . (Μονάδες 9)

15081. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$.

α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν κέντρα $K(-\sqrt{2}, 0)$, $\Lambda(3\sqrt{2}, 0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) i. Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 . (Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες. (Μονάδες 7)

15082. Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις: $C_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8$ και $C_2: (x-7)^2 + (y+2)^2 = 18$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ), όπου Κ, Λ, τα κέντρα των κύκλων C_1, C_2 , αντίστοιχα. Ακολούθως να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. (Μονάδες 5)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΚΛ. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων. (Μονάδες 8)

15189. Δίνονται τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(2, -2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB . (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει εξίσωση $C: x^2 + (y+1)^2 = 5$. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία $(AMB) = 5$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1: x + 2y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2y + 7 = 0$. (Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται του κύκλου C . (Μονάδες 6)

15272. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3, 2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το M . (Μονάδες 12)

15432. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4kx - 2ky + 4 = 0$ (1) με $k \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου. (Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων. (Μονάδες 7)

δ) Για $k = 1$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο $\Gamma(2,2)$. (Μονάδες 8)

15628. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (4 - 2k)x - 2(1 + k)y + 5 - 2k = 0$ (I), όπου $k \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η (I) παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k - 2, k + 1)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ για κάθε $k > 0$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε $k > 0$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = -x - 1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε $k > 0$. (Μονάδες 8)

15646. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$ και $C_2: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$.

α) Να δείξετε ότι τα κέντρα K_1 , των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας xOy του συστήματος συντεταγμένων. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής B, Γ , των κύκλων C_1 και C_2 . (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y = x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα $B\Gamma$, να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2}$ τ.μ.. (Μονάδες 10)

15791. Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει κύκλο C_1 κέντρου A και την ευθεία $(\varepsilon): x = 5$.

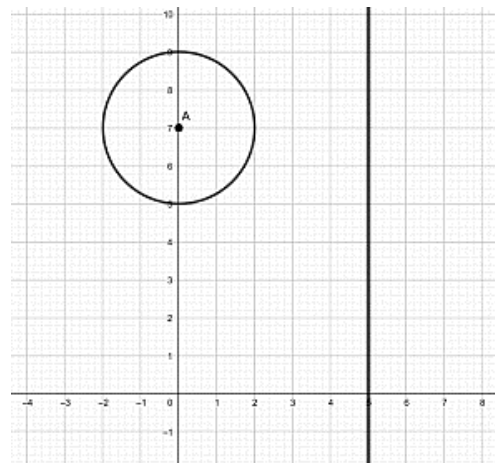
α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1 . (Μονάδες 3)

β) Έστω ένα σημείο του επιπέδου $B(x_1, y_1)$.

i. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $B(x_1, y_1)$ και ακτίνα 2. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου AB σε συνάρτηση με τις συντεταγμένες του σημείου B . (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε όλους τους κύκλους του ερωτήματος β) i. με ακτίνα 2, που εφάπτονται εξωτερικά στον C_1 και στην ευθεία (ε) . (Μονάδες 10)



15826. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2(\lambda + 1)x - 2\lambda y + 2\lambda + 1 = 0$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να γράψετε ως συνάρτηση του λ τις συντεταγμένες του κέντρου K και την ακτίνα ρ .

(Μονάδες 7)

β) Τι παριστάνει η εξίσωση (1) για $\lambda = 0$;

(Μονάδες 3)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους K_1, K_2, K_3, K_4 που προκύπτουν από την (1) για 4 αντίστοιχες τιμές του λ . Αξιοποιώντας το σχήμα,

i. να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

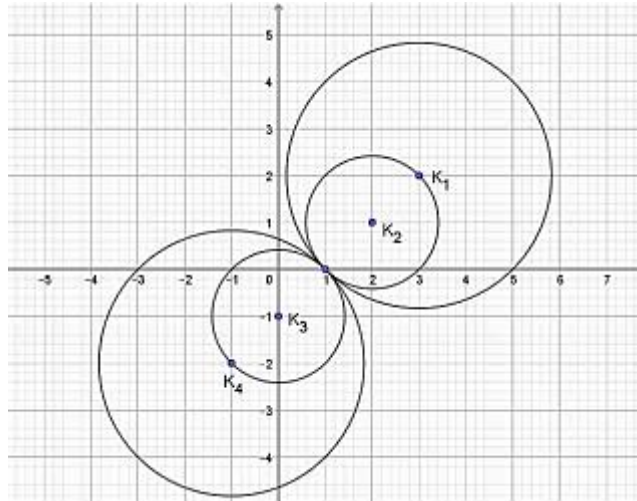
(Μονάδες 5)

ii. να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(Μονάδες 5)

iii. να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + y - 1 = 0$ είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1).

(Μονάδες 5)



15993. Δίνεται η εξίσωση $(x - 2)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $A(1, 0)$ και $B(3, 0)$ είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων.

(Μονάδες 07)

δ) Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 0$.

(Μονάδες 05)

16191. Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(5, 5)$.

α) Αν για το σημείο $M(x, y)$ ισχύει $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 32$, να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο M βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $x^2 + y^2 - 6y - 6x + 10 = 0$ (1).

(Μονάδες 08)

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

(Μονάδες 03)

β) Αν το κέντρο του κύκλου είναι το $K(3, 3)$ και η ακτίνα του $\rho = 2\sqrt{2}$.

i. Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του λ η ευθεία (ε): $\lambda x + y = 2$ εφάπτεται του κύκλου (1).

(Μονάδες 07)

ii. Υπάρχει τιμή του λ για την οποία η ευθεία (ε) σχηματίζει με την AB γωνία 45° ;

(Μονάδες 07)

18237. Θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(3, 2)$, $\Gamma(1, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς $B\Gamma$.

(Μονάδες 7)

Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$.

γ) Να βρείτε σημείο K στην μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ που ισαπέχει από τα A, B .

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 5)

18247. Δίνονται τα σημεία $O(0, 0)$, $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$ όπου $\alpha, \beta > 0$.

α) Να βρείτε συναρτήσες των α, β

i. τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .

(Μονάδες 5)

ii. την απόσταση (OM) .

(Μονάδες 5)

β) Αν $(OM) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $(OM) = \frac{(AB)}{2}$. (Μονάδες 5)

ii. να γράψετε την πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί. (Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου OAB. (Μονάδες 7)

18415. Δίνεται η εξίσωση $(x - 3\lambda)^2 + (y + 2\lambda)^2 = 1$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x + 3y = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία ε . (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε . (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα. (Μονάδες 6)

18416. Δίνεται η εξίσωση $x(x - 4) + y(y - 2) = 2(x + y - 4)$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο K (3,2) και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$. (Μονάδες 6)

β) Δίνονται τα σημεία A (4,4) και B (2,0).

i. Να δείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο AB. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y = \lambda x + 4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta) = \sqrt{20}$. (Μονάδες 6)

18521. Δίνονται τα σημεία A(1,2), B(2,4) και Γ(3,1).

α) Να αποδείξετε ότι η $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου c , ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ. (Μονάδες 09)

γ) Αν ο κύκλος c έχει εξίσωση $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$, τότε να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 10)

18567. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο A $(2\sqrt{2}, 0)$.

α) i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου C. (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο A και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 12)

β) Αν B, Γ τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο A, να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ABOΓ. (Μονάδες 08)

18569. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 1$.

α) Αν A και A' είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες O $\hat{x}$ και O $\hat{x}'$ αντίστοιχα, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και A' είναι A(1,0) και A'(-1,0). (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το A και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 150° . (Μονάδες 06)

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C και στο σημείο B, να αποδείξετε ότι η χορδή AB έχει μήκος $\sqrt{3}$. (Μονάδες 08)

γ) Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από τα σημεία A' και B. (Μονάδες 06)

18570. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ και η ευθεία (ε): $3x - 4y = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του. (Μονάδες 05)
 β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία Α, Β
 i. Να αποδείξετε ότι $-35 < \mu < 15$. (Μονάδες 07)
 ii. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του. (Μονάδες 04)
 iii. Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ. (Μονάδες 09)

20091. Τα σημεία Α(-7, -1) και Β(3, -5) είναι σημεία ενός κύκλου C κέντρου Κ. Το σημείο Μ είναι το μέσο της χορδής ΑΒ και μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ.

- α) Να βρείτε:
 i. Τις συντεταγμένες του σημείου Μ. (Μονάδες 04)
 ii. Την εξίσωση της ευθείας ΚΜ. (Μονάδες 08)
 β) Αν από το κέντρο Κ του κύκλου διέρχεται η ευθεία (δ): $x + y = -12$, τότε:
 i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Κ. (Μονάδες 07)
 ii. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C. (Μονάδες 06)

20229. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα. (Μονάδες 6)
 β) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών. (Μονάδες 7)
 γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, όλοι οι παραπάνω κύκλοι, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν. (Μονάδες 7)
 δ) Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) για $\lambda = 0$. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου αυτού, που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

20700. Δίνεται το τετράγωνο MM_1OM_2 με $M(4,4)$, $M_1(4,0)$, $M_2(0,4)$. Αν Ο η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, τότε:

- α) Να δείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου MM_1OM_2 έχει εξίσωση $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + y = 8$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου C. (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε το σημείο επαφής της ευθείας ε με τον κύκλο C. (Μονάδες 9)

20863. Δίνονται τα σημεία Α(1,0) και Β(3,0).

- α) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 07)

β) Αν Κείναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας (ζ), να βρείτε την εξίσωση (c) όλων των κύκλων, οι οποίοι έχουν κέντρο Κ και διέρχονται από τα σημεία Α και Β συναρτήσει μιας παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 08)

γ) Αν η εξίσωση $(x-2)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2 + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει όλους τους κύκλους (c) του ερωτήματος β), τότε:

- i. Να σχεδιάσετε τον κύκλο, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. (Μονάδες 05)
 ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $x + \lambda y - 1 = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους (c) στο σημείο Α(1,0). (Μονάδες 05)

21154. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4ax - 4ay = 0$ (1) όπου α είναι πραγματικός αριθμός.

- α) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 8)
 β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα R των κύκλων ως συνάρτηση του α. (Μονάδες 6)
 γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του α του ερωτήματος α). (Μονάδες 5)
 δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα x'x. (Μονάδες 6)

21159. Δίνονται τα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$ με $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση των κύκλων με διάμετρο την AB , για κάθε τιμή των α και β είναι $x^2 + y^2 - \alpha x - (10 - \alpha)y = 0$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι με διάμετρο την AB , για τις διάφορες τιμές των α και β διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, την αρχή O των αξόνων και ένα σημείο P του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων όλων των κύκλων με διάμετρο την AB για τις διάφορες τιμές των α και β . (Μονάδες 8)

21276. Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:

• τη γραμμή γ_1 , κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής: $A(\lambda - 1, 2\lambda + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

• τη γραμμή γ_2 , που περνάει από το σταθμό $\Sigma(-4, 2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-1, 3)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές γ_1 και γ_2 . (Μονάδες 10)

β) Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο $K(1, 1)$ του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ' ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές γ_1 και γ_2 . Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές. (Μονάδες 9)

γ) Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο K και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής γ_1 . (Μονάδες 6)

21349. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο O θεωρούμε κύκλο (C) και ευθεία (ε) με εξισώσεις $x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0$ (1) και $4x + 3y - 10 = 0$ (2) αντίστοιχα.

α) i. Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα R του κύκλου (C) . (Μονάδες 5)

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου K από την ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία. (Μονάδες 4)

iii. Να προσδιορίσετε τα σημεία A και B στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) . (Μονάδες 5)

β) Αν είναι $A(1, 2)$ και $B(4, -2)$, τότε:

iv. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$. (Μονάδες 5)

v. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο AB διέρχεται από το σημείο O . (Μονάδες 6)

22214. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$, $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ για τα οποία ισχύει $\vec{AM}^2 + \vec{BM}^2 = 9|\vec{AB}|$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 8$. (Μονάδες 10)

β) Έστω Γ και Δ δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε $\Gamma\Delta^2 = 32$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Γ και Δ και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία. (Μονάδες 08)

ii. Αν το σημείο M κινείται στον κύκλο, να υπολογίσετε το $\vec{MG} \cdot \vec{MD}$. (Μονάδες 07)

22223. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\vec{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$, $\vec{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda - 1)$ και το σημείο M είναι το μέσο της $B\Gamma$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{AM} = (2\lambda, \lambda)$. (Μονάδες 08)

β) Δίνεται επιπλέον ότι η γωνία $BA\Gamma = 90^\circ$.

i. Να υπολογίσετε το λ . (Μονάδες 08)

ii. Αν $\lambda = \frac{1}{2}$ και $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$ να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 09)

22239. Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy η εξίσωση $3x + 4y = 25$ περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Σε αυτό το σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 2.

- α) i.** Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει την θέση του σιντριβανιού; (Μονάδες 04)
ii. Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό. (Μονάδες 05)
iii. Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού ύδρευσης πρέπει να ενωθεί με το κέντρο του σιντριβανιού ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή; (Μονάδες 08)
β) Ο μηχανικός που θέλει να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο, κατέληξε στην εξίσωση $\lambda x + y + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \neq 0$. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του λ ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού; (Μονάδες 08)

22264. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y + \lambda - 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)
β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: x + y + 2 = 0$. (Μονάδες 9)
γ) Για $\lambda = 1$, στον κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1), να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του, που διέρχονται από το σημείο $M\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. (Μονάδες 9)

22280. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο $O(0,0)$ θεωρούμε τους κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με εξισώσεις $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ (1) και $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ (2) αντίστοιχα.

- α)** Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων. (Μονάδες 12)
β) Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου. (Μονάδες 08)
γ) Έστω M, N τυχαία σημεία των κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων M και N . (Μονάδες 05)

22508. Οι κορυφές A και Γ , ενός τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι τα σημεία $(1,4)$ και $(3,0)$ αντιστοίχως.

- α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$ γράφεται στη μορφή $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα γράφεται στη μορφή $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$. (Μονάδες 8)
γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών B, Δ του τετραγώνου. (Μονάδες 9)

Παραβολή

2ο Θέμα

18242. Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C. (Μονάδες 8)
 β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της M(4,4). (Μονάδες 8)
 γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C, τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε). (Μονάδες 9)

20235. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 8x$.

- α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $\left(\frac{1}{8}, 1\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 8x - 2y + 3 = 0$. (Μονάδες 15)

21306. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x' , κορυφή O(0,0) και εστία E(2,0), όπως στο διπλανό σχήμα. Το σημείο A της παραβολής έχει τεταγμένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A(3, 2\sqrt{6})$.

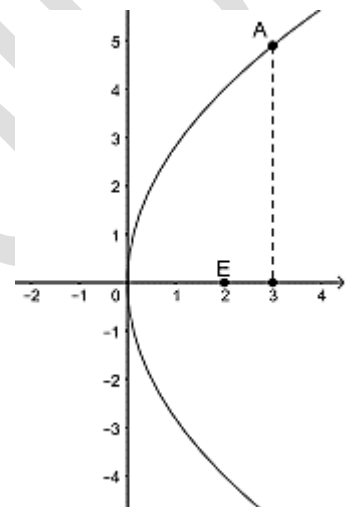
(Μονάδες 10)

- β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της.

(Μονάδες 06)

- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο A.

(Μονάδες 09)



21307. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο E(0,3) και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3. (Μονάδες 12)
 β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία A(6,3) και B(-6,3), αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$. (Μονάδες 08)
 γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2). (Μονάδες 05)

22190. Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση $y^2 = x$ (1).

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ). (Μονάδες 12)
 β) Να αποδείξετε ότι το σημείο A(1,-1) είναι σημείο της παραβολής. (Μονάδες 05)
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της A(1,-1). (Μονάδες 08)

22267. Δίνεται η εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

- α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :
 «Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Η εστία της E, έχει συντεταγμένες E(.....,) και η διευθετούσα έχει εξίσωση».
 (Μονάδες 09)
 β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο A(1, -2). (Μονάδες 08)
 γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x' είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής. (Μονάδες 08)

4ο Θέμα

15394. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 12x$ με εστία E και η εφαπτομένη ευθεία (ε) της (C) στο σημείο της $M(1, 2\sqrt{3})$, η οποία τέμνει

τον άξονα $x'x$

στο σημείο B . Από το σημείο M φέρνουμε ημιευθεία Mt παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, η οποία τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο H .

α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση

$$y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}.$$

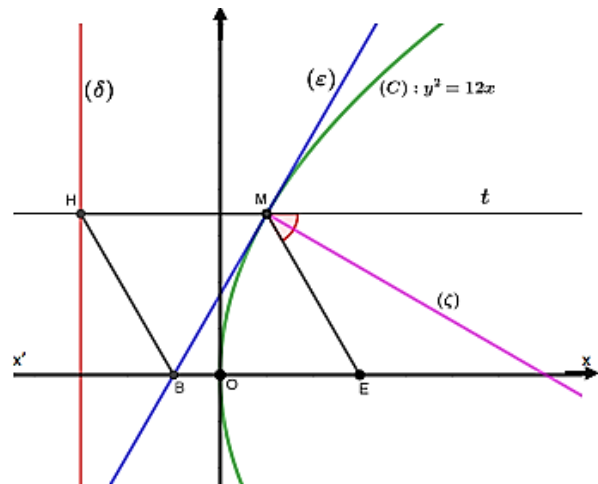
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B, H, E .

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $MEBH$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 7)



δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία EMt .

(Μονάδες 6)

18245. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής C .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία ε_λ που δεν διέρχεται από το $O(0, 0)$.

(Μονάδες 6)

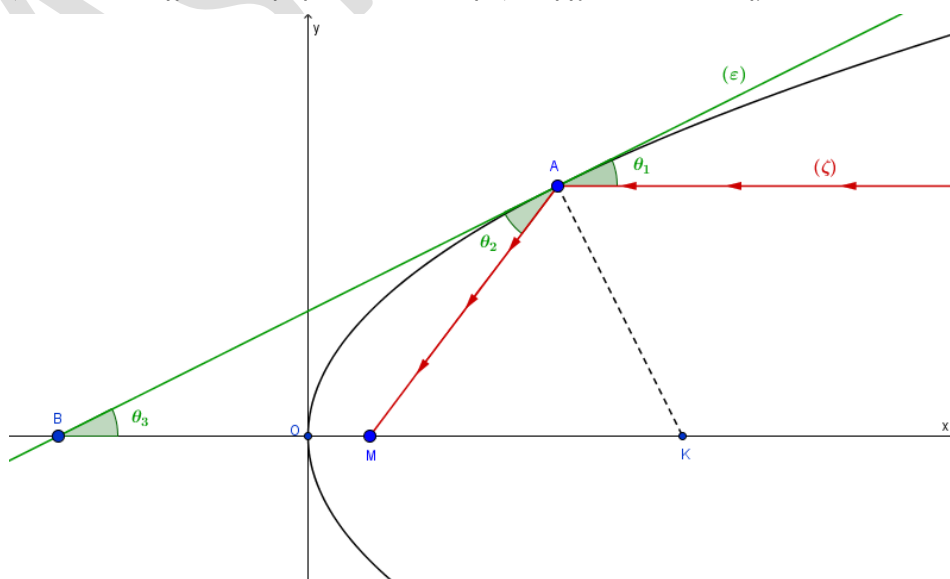
γ) Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ .

(Μονάδες 6)

δ) Έστω $M(\alpha, \beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα δ . Αν από το M διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ , να δείξετε ότι το M ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C και διέρχεται από την εστία της E .

(Μονάδες 7)

18870. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 4x$, η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο $A(4, 4)$ και η AK κάθετη στην (ε) . Μία φωτεινή ακτίνα (ζ) , ακολουθώντας πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, προσπίπτουσα στο σημείο A και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο M .



Αν γνωρίζετε ότι η γωνία θ_1 που σχηματίζει η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα (ζ) με την (ϵ) και η γωνία θ_2 που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα AM με την (ϵ) είναι ίσες, τότε:

- α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 06)
 β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) και το σημείο B στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 06)
 γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές. (Μονάδες 07)
 δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής. (Μονάδες 06)

18372. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία A(-2,- 2), B(0,- 4) και την παραβολή $y^2 = 4x$.

- α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 09)
 β) Να βρείτε το σημείο M της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην AB. (Μονάδες 08)
 γ) Αν M(1,-2) και K είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ABMK είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 08)

20092. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ και η ευθεία ϵ του επιπέδου με εξίσωση

$$\epsilon: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0.$$

- α) i. Να δείξετε ότι η ευθεία ϵ δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την ϵ . (Μονάδες 07)
 ii. Αν η ευθεία ϵ τέμνει του άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $(M\Gamma\Delta) = 5$ τ.μ. (Μονάδες 05)
 β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ζ της παραβολής με η παράλληλη στην ϵ . (Μονάδες 08)
 ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών η και ϵ ; (Μονάδες 05)

21883. Δίνεται η παραβολή $C: x^2 = 4y$ και η ευθεία $y = x - 2$.

- α) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής. (Μονάδες 5)
 β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία. Στη συνέχεια σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής C και της ευθείας ϵ . (Μονάδες 8)
 γ) Αν $M(x,y)$ είναι σημείο της παραβολής, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του M από την ευθεία ϵ είναι $d(M, \epsilon) = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}}.$

(Μονάδες 6)

- ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου M από την ευθεία ϵ καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου M της παραβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία. (Μονάδες 6)

22275. Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

- α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της E και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ . (Μονάδες 12)
 β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο A(0, 2) και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

22465. Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων O και άξονα συμμετρίας τον $x'x$. Η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

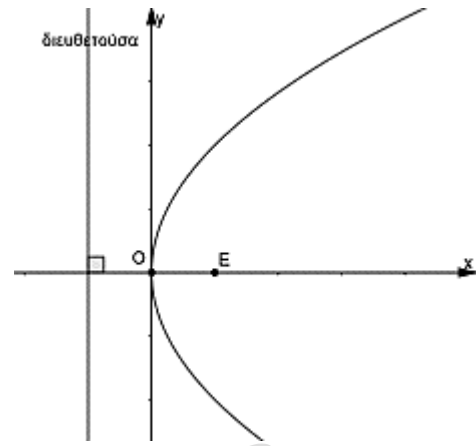
α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η $E(2,0)$, η διευθετούσα της είναι η $\delta : x = -2$ και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2 = 8x$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $A(2,4)$ είναι η $\epsilon : y = x + 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ϵ στο σημείο της $A(2,4)$.

(Μονάδες 7)



1ο Θέμα

21152.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

ii. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = x_0$.

iii. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\eta = (A, B)$.

iv. Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ έχει εστία το σημείο $E(1,0)$.

v. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

(Μονάδες 15)

3ο Θέμα

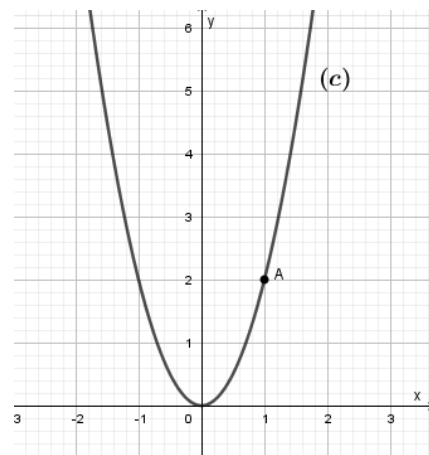
20866. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραβολής (ϵ), που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα της παραβολής. (Μονάδες 04)

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της παραβολής στο σημείο $A'(-1,2)$. (Μονάδες 08)

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της (ϵ) με τον άξονα $y'y$ και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε. (Μονάδες 07)



Έλλειψη

2ο Θέμα

20718. Δίνεται η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

- α) Να βρείτε τις εστίες της. (Μονάδες 8)
 β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη C σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. (Μονάδες 8)
 γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της C και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 9)

20883. Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης $C: 16x^2 + 25y^2 = 400$.

- α) Να βρείτε τα μήκη BB' , AA' του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της E και E' . (Μονάδες 12)
 β) Αν $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$, να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο E' και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το E και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$. (Μονάδες 13)

21308. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε:

- α) Τις συντεταγμένες των εστιών E και E' της έλλειψης και την απόστασή τους. (Μονάδες 09)
 β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης. (Μονάδες 08)
 γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της έλλειψης στο σημείο της $B(0,4)$. (Μονάδες 08)

21647. Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(4,0), E'(-4,0)$ και μεγάλο άξονα 10. Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της C . (Μονάδες 10)
 β) την εκκεντρότητά της C . (Μονάδες 7)
 γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$. (Μονάδες 8)

21648. Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(3,0), E'(-3,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M\left(4, \frac{12}{5}\right)$.

- α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 10. (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε την εξίσωση της C . (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M\left(4, \frac{12}{5}\right)$. (Μονάδες 7)

Δίνεται ότι $\sqrt{1369} = 37$

22168. Δίνονται η παραβολή $y^2 = 2px$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

- α) Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$, να βρείτε:
 i. Την εξίσωση της παραβολής. (Μονάδες 10)
 ii. Την εστία E της παραβολής. (Μονάδες 05)
 β) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το O , αν η μια εστία της είναι το σημείο $E(1,0)$ και ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4. (Μονάδες 10)

22192. Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1$ (1).

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E' . (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $B(0,9)$ είναι σημείο της έλλειψης. (Μονάδες 05)
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της $B(0,9)$. (Μονάδες 10)

22268. Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Οι εστίες της E και E', έχουν συντεταγμένες E(.....,) και E'(.....,) . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με και η εκκεντρότητα της είναι ίση με».

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της B(0,-2).

(Μονάδες 10)

22556. Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει κορυφές τα σημεία A'(-5,0), A(5,0), B'(0,-4) και B(0,4).

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα μήκη των αξόνων της έλλειψης είναι (A'A) = 10 και (B'B) = 8.

(Μονάδες 10)

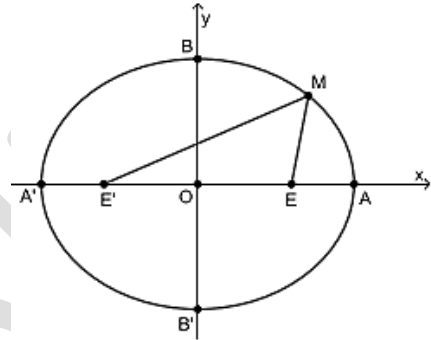
ii. Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία E'(-3,0) και E(3,0).

(Μονάδες 10)

β) Έστω M ένα σημείο της έλλειψης.

Να αποδείξετε ότι (ME') + (ME) = 10 .

(Μονάδες 5)



22558. Η έλλειψη του διπλανού σχήματος έχει εστίες τα σημεία E'(-2,0) και E(2,0) και μήκος μεγάλου άξονα (A'A) = 8.

α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

(Μονάδες 12)

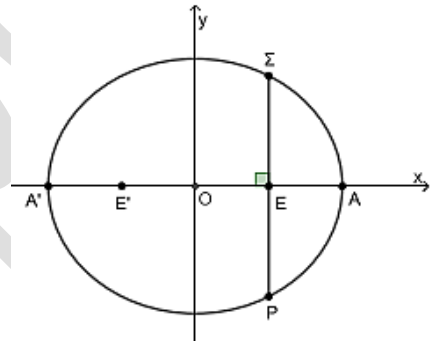
β) Έστω Σ και Ρ τα σημεία της έλλειψης που έχουν την ίδια τετμημένη με την εστία E(2,0). Επίσης το Σ έχει θετική τεταγμένη και το Ρ αρνητική τεταγμένη.

i. Να αποδείξετε ότι Σ(2,3) και Ρ(2,-3).

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΣΡ.

(Μονάδες 5)



22564. Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$ και $C_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1$.

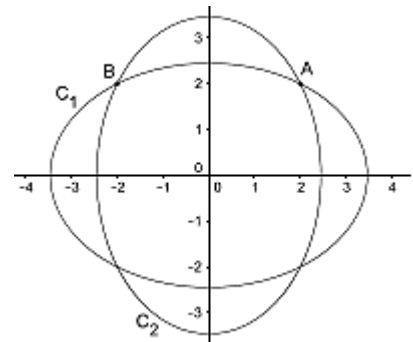
α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A(2,2) και B(-2,2) ανήκουν και στις δύο ελλείψεις.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ε₁ της έλλειψης C₁ στο σημείο A και η εξίσωση της εφαπτομένης ε₂ της έλλειψης C₂ στο σημείο B είναι αντίστοιχα $x + 2y - 6 = 0$ και $-2x + y - 6 = 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες ε₁, ε₂ είναι κάθετες. (Μονάδες 5)



4ο Θέμα

22273. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες :

i. Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες x'x και y'y.

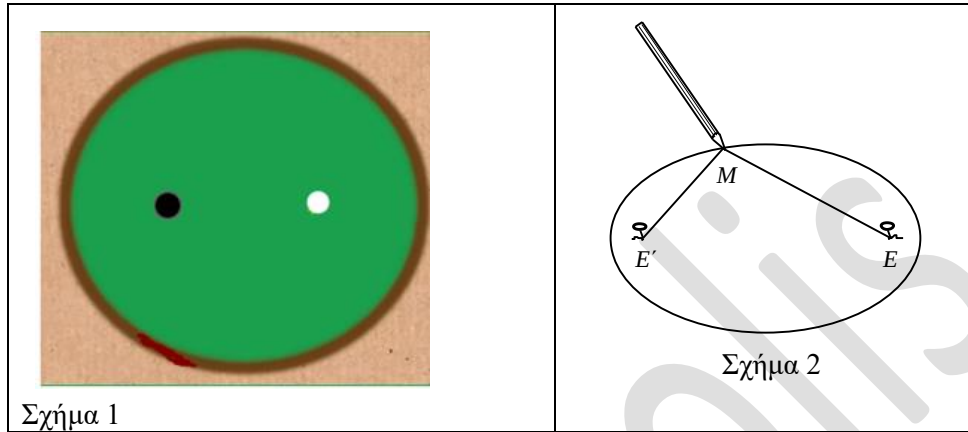
ii. Των εστιών E και E' της έλλειψης.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο A(0, 4) και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1).

(Μονάδες 13)

20726. Ένας κατασκευαστής μπιλιάρδων θέλει να κατασκευάσει ένα ελλειπτικό μπιλιάρδο όπως αυτό του παρακάτω σχήματος (σχήμα 1). Το περίγραμμα του μπιλιάρδου είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$. Η μοναδική τρύπα του μπιλιάρδου έχει σχήμα κύκλου (ο μαύρος κύκλος στο σχήμα 1) με κέντρο το σημείο E' . Για να σχεδιάσει ο κατασκευαστής το περίγραμμα του μπιλιάρδου πάνω σε μία ξύλινη επίπεδη επιφάνεια, τοποθέτησε στα σημεία E και E' δύο καρφιά στα οποία έδεσε τις άκρες ενός σχοινιού μήκους 10 μονάδων μήκους. Στη συνέχεια με ένα μολύβι διατηρούσε το σχοινί τεντωμένο, ώστε αυτό, κατά την κίνησή του, να διαγράψει έλλειψη C όπως φαίνεται στο παρακάτω (σχήμα 2).



- α)** Να βρείτε τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης C . (Μονάδες 10)
- β)** Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης C και να βρείτε την εκκεντρότητά της. (Μονάδες 5)
- γ)** Ένας παίκτης τοποθετεί μια άσπρη μπάλα (ο άσπρος κύκλος στο σχήμα 1) ακριβώς στο σημείο E . Σκοπεύει να χτυπήσει την άσπρη μπάλα ώστε αφού αυτή προσκρούσει πρώτα στο ελλειπτικό περίγραμμα του μπιλιάρδου, στη συνέχεια να πέσει στην τρύπα. Αν θεωρήσουμε ότι ο παίκτης θα χτυπήσει με όση δύναμη απαιτείται για να φτάσει η μπάλα στην τρύπα και το χτύπημα θα είναι στο κέντρο της μπάλας ώστε αυτή να κυλά χωρίς να περιστρέφεται, να βρείτε σε ποιο σημείο της έλλειψης C πρέπει να σημαδέψει, ώστε με ένα μόνο χτύπημα η μπάλα να μπει στην τρύπα:
- 1) μόνο στα άκρα του μεγάλου άξονα
 - 2) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα
 - 3) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα και στο ένα άκρο του μεγάλου άξονα
 - 4) σε οποιοδήποτε σημείο της C εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα
- Επιλέξτε τη μοναδική σωστή απαντήσας αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

Υπερβολή

2ο Θέμα

16128. Δίνεται η υπερβολή (C): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E' και E. (Μονάδες 10)
 β) Αν το N είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(NE') - (NE)|$. (Μονάδες 5)
 γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C). (Μονάδες 10)

17942. Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση (C) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

- α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της. (Μονάδες 12)
 β) Να εξετάσετε αν το σημείο M(1,222) μπορεί να ανήκει στην (C). (Μονάδες 13)

21649. Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία E(5,0), E'(-5,0) και εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της C. (Μονάδες 10)
 β) τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C. (Μονάδες 8)
 γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5, \frac{9}{4})$. (Μονάδες 7)

22169. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ με ασύμπτωτη την $y = \frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της A και A' είναι 8.

- α) i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής. (Μονάδες 10)
 ii. Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής; (Μονάδες 05)
 β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ στο σημείο της $(5, \frac{9}{4})$. (Μονάδες 10)

22196. Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση $x^2 - y^2 = 25$ (1).

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E'. (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ϵ_1), (ϵ_2) της υπερβολής. (Μονάδες 10)
 γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ϵ_1), (ϵ_2); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)

22269. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση: $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (1).

- α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας:
 i. Τις συντεταγμένες των εστιών της.
 ii. Την εκκεντρότητά της.
 iii. Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής. (Μονάδες 15)
 β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της, $A(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$. (Μονάδες 10)

22559. Η υπερβολή στο διπλανό σχήμα έχει εστίες τα σημεία $E'(-10,0)$ και $E(10,0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8,0)$ και $A(8,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση

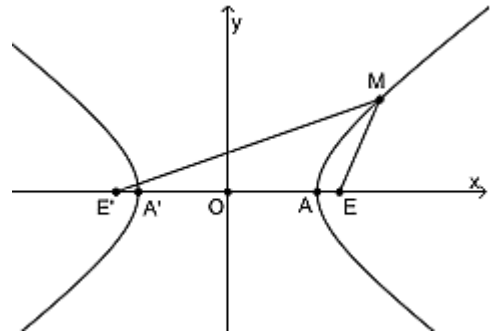
$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

(Μονάδες 12)

β) Έστω M ένα σημείο της υπερβολής.

i. Να αποδείξετε ότι $|(ME') - (ME)| = 16$. (Μονάδες 8)

ii. Αν $(ME) = 9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την εστία E' . (Μονάδες 5)



22561. Στο διπλανό σχήμα η υπερβολή C έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = 9$, οι ευθείες δ_1, δ_2 είναι οι ασύμπτωτες της C και η ε είναι η εφαπτομένη της C στο σημείο της $M(5,4)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι εξισώσεις των ασυμπτωτών είναι

$$\delta_1: y = x \text{ και } \delta_2: y = -x.$$

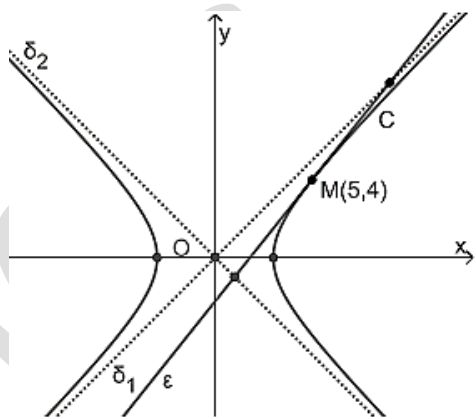
(Μονάδες 8)

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι $5x - 4y = 9$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_1 καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_2 .

(Μονάδες 9)



22566. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2 - y^2 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι $A(1,0)$ και $A'(-1,0)$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = 2x$ και $y = -2x$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -2x$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$

(Μονάδες 8)

22567. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η υπερβολή

$$C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ τέμνει τον άξονα } x'x \text{ στα σημεία}$$

$A'(-4,0)$ και $A(4,0)$ και έχει ασύμπτωτες τις

$$\text{ευθείες } y = \frac{3}{4}x \text{ και } y = -\frac{3}{4}x.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $a = 4$ και $b = 3$.

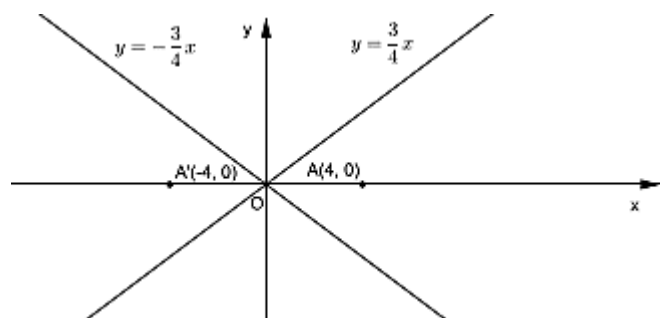
(Μονάδες 10)

ii. οι εστίες της C είναι τα σημεία

$E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

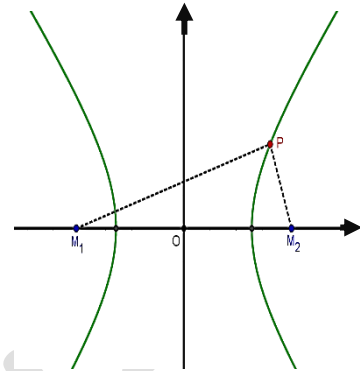
(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή C . (Μονάδες 5)



4ο Θέμα

20653. Κατά τη διάρκεια μιας επιχείρησης εντοπισμού ενός αγνοούμενου σε μια αχανή δασώδη επίπεδη περιοχή, δύο παρατηρητές M_1 και M_2 βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Ο αγνοούμενος εκτοξεύει φωτοβολίδες που διαθέτει και οι δύο παρατηρητές σημειώνουν τις χρονικές στιγμές που ακούνε τον ήχο της εκπυρσοκρότησης του όπλου. Είναι γνωστό ότι ο παρατηρητής M_1 ακούει σε όλες τις εκρήξεις τον ήχο με διαφορά 4 sec αργότερα από τον παρατηρητή M_2 .



α) Αν ονομάσουμε P την θέση του αγνοούμενου, να αποδείξετε ότι $(PM_1) - (PM_2) = 1360 \text{ m}$. Θεωρούμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι 340 m/sec . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η θέση P του αγνοούμενου ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα σημεία M_1 και M_2 . (Μονάδες 8)

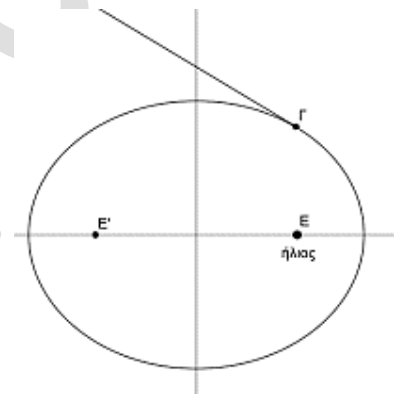
γ) Αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση (M_1M_2) είναι 1378 m , να αποδείξετε ότι αυτή η υπερβολή έχει

εξίσωση $\frac{x^2}{680^2} - \frac{y^2}{111^2} = 1$, θεωρώντας ως άξονα $x'x$ την ευθεία M_1M_2 και κέντρο της υπερβολής την αρχή των αξόνων. Δίνεται ότι $37^2 = 1369$. (Μονάδες 9)

22174. Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης $E(\gamma, 0)$, ενώ η άλλη εστία είναι στο $E'(-\gamma, 0)$. Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι $0,6$ ενώ ο μεγάλος άξονας 10 .

α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς. (Μονάδες 09)

β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.



i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο $\Gamma\left(3, \frac{16}{5}\right)$ εκπέμπεται

από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα Oy . Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο $\Delta(0,5)$. (Μονάδες 09)

ii. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ με $x > 0$.

Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών; (Μονάδες 07)

3ο Θέμα

17944. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, εστιακή απόσταση $EE' = 2\sqrt{7}$ και

εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{3}$. (Μονάδες 8)

β) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A , A' της υπερβολής (C).

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C). (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της. (Μονάδες 9)

1ο Θέμα

21973.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\beta}|$ τότε υποχρεωτικά $\vec{\alpha} / \vec{\beta}$.

ii. Η εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του A (x_1, y_1), έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

iii. Η διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 2px$, έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$.

iv. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης είναι μικρότερη της μονάδας.

v. Η εξίσωση: $x^2 + y^2 = a^2$ είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A(x_0, y_0) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

(Μονάδες 15)