Πειραματικο Λυκειο
της
Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ετος Ιδρυσης 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

ΤΑΞΗ Β΄

Μαθηματικά

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ασκήσεις

Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Σχολικό Έτος 2007-2008

Πειραματικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ταξη Β, Μαθηματικα Θετικης και Τεχνολογικης Κατευθυνσης, Ασκησεις

Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

2 Οκτωβρίου 2007
Στοιχειοθετήθηκαν με το LaTeX.

1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. Το σημείο M είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB. Να δώσετε μία διανυσματική ισότητα που να εκφράζει αυτό το γεγονός.
   ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$

2. Για τα σημεία A, B, Γ και M είναι γνωστό ότι
   $$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)$$
   Να αποδείξετε ότι το M είναι μέσο του $B\Gamma$.

3. Για τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι γνωστό ότι
   $$\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{BE}$$
   Να αποδείξετε ότι τα Γ, Δ συμπίπτουν.

4. Για τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta, M, \Sigma$ είναι γνωστό ότι $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{M\Sigma}=\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{\Delta\Sigma}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BA\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

5. Να αποδείξετε ότι αν $\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}=2\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)-\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)$ τότε $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.

6. Αν ισχύει $3\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}=\overrightarrow{\alpha}$, $4\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v}=\overrightarrow{\beta}$ να εκφράσετε τα $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$
   ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\vec{u}=\frac{3}{25}\vec{\alpha}+\frac{4}{25}\vec{\beta}$, $\vec{v}=\frac{4}{25}\vec{\alpha}-\frac{3}{25}\vec{\beta}$.

7. Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το κέντρο του.
   (α′) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{0}$.
   (β′) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου M ισχύει $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{M\Delta}=4\overrightarrow{MO}$.

8. Έστω ότι $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο O ισχύει
   $$\overrightarrow{OM}=(1-\lambda)\,\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$$
   Πως γίνεται η τελευταία σχέση όταν $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
   ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το M θα είναι μέσο του AB και προκύπτει η γνωστή σχέση $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

9. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία X, Y, Z ώστε[1]: $\overrightarrow{BX}=5\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma Y}=5\overrightarrow{\Gamma A}$, $\overrightarrow{AZ}=5\overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{BY}+\overrightarrow{\Gamma Z}=\overrightarrow{0}$.

10. Έστω το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο M ισχύει $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{0}$

[1]Στη θέση του 5 μπορείτε να βάλετε οποιδήποτε αριθμό λ

11. Έστω τα σημεία A, B, Γ, O τέτοια ώστε $\overrightarrow{O\Gamma} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB}$ όπου p, q είναι πραγματικοί αριθμοί με $p + q = 1$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

12. Έστω τα διάφορα σημεία A, B και το σημείο O. Σε κάθε αριθμό x αντιστοιχούμε ένα σημείο M τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM} = (1 - \lambda)\,\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$. Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει στην ευθεία AB.

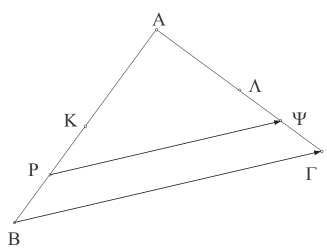
13. Έστω τα διάφορα σημεία A, B και το σημείο O. Σε κάθε αριθμό x αντιστοιχούμε ένα σημείο M τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM} = 3\,(1 - \lambda)\,\overrightarrow{OA} + 3\lambda\overrightarrow{OB}$. Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει σε σταθερή ευθεία.

14. Έστω ότι $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Να βρείτε για ποιές τιμές του λ ισχύει

$$\left|\left(\lambda^2 - 5\lambda + 10\right)\vec{\alpha}\right| = |-\vec{\alpha}| + |3\vec{\alpha}|$$

Απαντηση: $\lambda = 2$, $\lambda = 3$

15. Στο σχήμα τα K, Λ είναι μέσα των $AB, A\Gamma$ και τα P, Ψ μέσα των KB και $\Lambda\Gamma$.
Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{P\Psi} = \frac{3}{4}\overrightarrow{B\Gamma}$



16. Έστω τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ και τα σημεία O, A, B, Γ τέτοια ώστε:
$\overrightarrow{OA} = \vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$, $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{u} - 5\vec{v} - 2\vec{w}$
Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

17. Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\gamma}$.

    (α΄) Να αποδείξετε ότι αν $18\vec{\alpha} - 31\vec{\beta} + 13\vec{\gamma} = \vec{0}$ τότε τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

    (β΄) *Γενικότερα:* Να αποδείξετε ότι αν υπάρχουν αριθμοί κ, λ, μ τέτοιοι ώστε:

    i. Κάποιος από τους κ, λ, μ είναι διάφορος του μηδενός.
    ii. $\kappa + \lambda + \mu = 0$
    iii. $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma} = \vec{0}$

    τότε τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

18. *Λύνοντας αυτή την άσκηση θα έχετε απαντήσει σε ένα μεγάλο μέρος του τρίτου θέματος των εξετάσεων στα Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ′ Λυκείου του 2006.*
    Τρία διανύσματα έχουν άθροισμα 0, μέτρο 1 και κοινή αρχή. Να αποδείξετε ότι τα πέρατα τους είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου του οποίου να υπολογίσετε την πλευρά.
    Απαντηση: $\sqrt{3}$

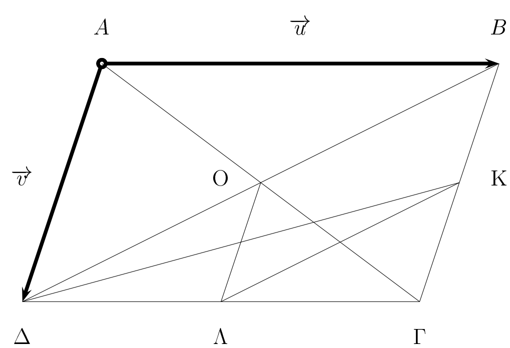
19. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ, E τέτοια ώστε $\overrightarrow{A\Delta} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{AE} = y\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta E} // \overrightarrow{B\Gamma}$.

20. Έστω τα σημεία A, B, Γ και οι αριθμοί p, q, r. Να αποδείξετε ότι για κάθε θέση του σημείου M το διάνυσμα $(p-q)\,\overrightarrow{AM} + (q-r)\,\overrightarrow{BM} + (r-p)\,\overrightarrow{\Gamma M}$ είναι σταθερό.

21. Να αποδείξετε ότι αν $|\vec{\alpha}| \leq 2$, $\left|\vec{\beta}\right| \leq 5$ τότε $\left|4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right| \leq 23$.

22. Να αποδείξετε ότι αν $\left|4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right| \leq 1$ και $\left|3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}\right| \leq 1$ τότε $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| \leq \frac{2}{7}$.

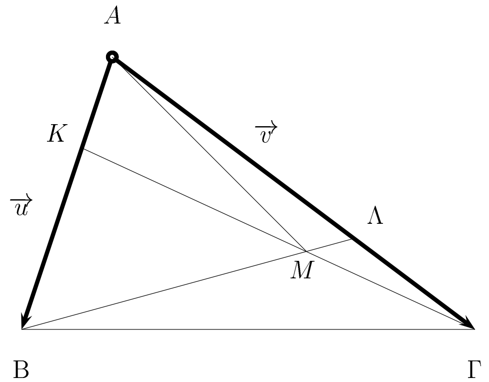
23. Στο σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και τα K, Λ είναι μέσα των $B\Gamma, \Gamma\Delta$. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Lambda}$ $\overrightarrow{K\Delta}$, $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{K\Lambda}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{u}, \vec{v}$.
    Απαντηση: $\overrightarrow{O\Lambda} = 0\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$, $\overrightarrow{K\Delta} = (-1)\,\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$, $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\vec{u} + 0\vec{v}$, $\overrightarrow{K\Lambda} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$



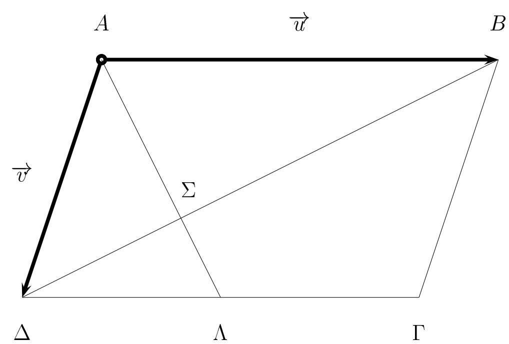
24. Να αποδείξετε ότι αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα τότε και τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\vec{v} = 4\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

25. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι γνωστό ότι δεν είναι παράλληλα. Να λύσετε την εξίσωση (άγνωστος ο x) $\left(x^2 - 1\right)\vec{\alpha} + \left(x^2 - 3x + 2\right)\vec{\beta} = \vec{0}$
    Απαντηση:$x = 1$.

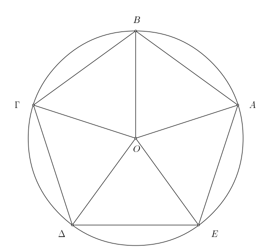
26. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία K, Λ έτσι ώστε $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Lambda} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$ Έστω M το σημείο τομής των ΓK, $B\Lambda$. Υπάρχουν αριθμοί κ, λ ώστε $\overrightarrow{\Gamma M} = \kappa\overrightarrow{\Gamma K}$, $\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{B\Lambda}$. Ονομάζουμε $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:
    (α′) $\overrightarrow{AM} = \frac{\kappa}{3}\vec{u} + (1-\kappa)\,\vec{v}$
    (β′) $\overrightarrow{AM} = (1-\lambda)\,\vec{u} + \frac{2\lambda}{3}\vec{v}$
    (γ′) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{7}\vec{u} + \frac{4}{7}\vec{v}$



27. Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και Λ το μέσο της $\Gamma\Delta$. Έστω Σ το σημείο τομής της $A\Lambda$ και $B\Delta$. Αφού εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta\Sigma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}, \vec{v}$ (δείτε και την άσκηση 17) να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta\Sigma} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Delta B}$.



28. Έστω ένα κανονικό πεντάγωνο [2] $AB\Gamma\Delta E$ (όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες του είναι ίσες) και O το κέντρο του.



Να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{0}$$

29. Έστω σημεία A, B, Γ. Για ένα σημείο P ισχύει $\alpha\overrightarrow{AP} + \beta\overrightarrow{BP} + \gamma\overrightarrow{\Gamma P} = \overrightarrow{0}$ όπου $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Q ισχύει

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AQ} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BQ} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{\Gamma Q}$$

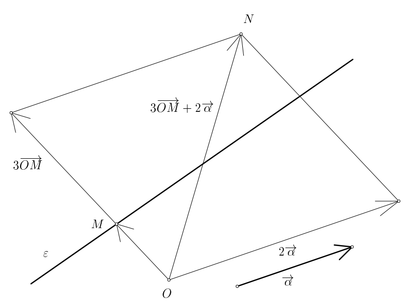
[2] Ο αριθμός των κορυφών δεν έχει ιδιαίτερη σημασία. Το αποτέλεσμα ισχύει για οποιοδήποτε κανονικό πολύγωνο

30. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τα οποία ανά δύο δεν είναι παράλληλα. Να αποδείξετε ότι αν $\vec{\alpha} // \left(p\vec{\beta} + q\vec{\gamma}\right)$ και $\vec{\beta} // \left(r\vec{\gamma} + s\vec{\alpha}\right)$ τότε:

    (α′) Κανένας από τους πραγματικούς αριθμούς p, q, r, s δεν είναι μηδέν.

    (β′) Ισχύει $\vec{\gamma} = -\frac{s}{r}\vec{\alpha} - \frac{p}{q}\vec{\beta}$.

31. Έστω μία σταθερή ευθεία ε, ένα σταθερό διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha} \neq \overrightarrow{0}$ και ένα σταθερό σημείο O που δεν ανήκει στην ε. Σε κάθε σημείο M της ε αντιστοιχούμε ένα σημείο N τέτοιο ώστε να ισχύει $\overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{OM} + 2\vec{\alpha}$. Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία N που ορίζονται με αυτό τον τρόπο είναι συνευθειακά.



32. Να βρείτε για ποιά τιμή του λ τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}, -3\right)$, $\vec{\beta} = \left(\frac{2}{3}, \lambda^2 - 4\lambda + 1\right)$ είναι ίσα.
    Απαντηση: $\lambda = 2$

33. Για ποιές τιμές των x, y το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $A(x, 4)$ και $B(5, y)$ έχει ως μέσο το σημείο $M(2, 3)$;
    Απαντηση: $x = -1$, $y = 2$

34. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = (x - 1, x + 1)$ είναι 3. Ποιο είναι το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = (x - 3, x + 3)$;
    Απαντηση: $\sqrt{23}$

35. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές τα σημεία $A(-3, -4)$, $B(2, 3)$, $\Gamma(4, 5)$, $\Delta(-1, -2)$ είναι παραλληλόγραμμο. Ποιο είναι το κέντρο του;
    Απαντηση: $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

36. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (2, -1)$, $\vec{\gamma} = (3, 4)$. Να εκφράσετε το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δηλαδή να βρείτε αριθμούς κ, λ έτσι ώστε να ισχύει $\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$.
    Απαντηση: $\vec{\gamma} = \frac{11}{5}\vec{\alpha} + \frac{2}{5}\vec{\beta}$

37. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M αν είναι γνωστό ότι η απόσταση του από το σημείο $A\,(2,3)$ είναι 4 και η απόσταση του από το σημείο $B\,(-1,2)$ είναι 6.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $M\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{10}\sqrt{15},\frac{7}{2}-\frac{9}{10}\sqrt{15}\right)$ ή $M\left(\frac{7}{2}-\frac{3}{10}\sqrt{15},\frac{7}{2}+\frac{9}{10}\sqrt{15}\right)$

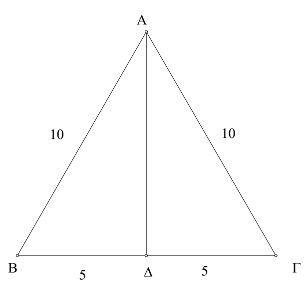
38. Να αποδείξετε αν $\frac{z-x}{y-t}=\frac{y+t}{z+x}$ τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x,y)$, $\vec{\beta}=(z,t)$ έχουν το ίσα μέτρα.

39. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $M\,(\alpha,\beta)$ ως προς το σημείο $K\,(x_0,y_0)$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $M'\,(2x_0-\alpha,2y_0-\beta)$

40. Έστω, τα διάφορα, σημεία $A\,(x_1,y_1)$, $B\,(x_2,y_2)$ και ένα σημείο $M\,(x,y)$ για το οποίο ισχύει:
$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$$
Να αποδείξετε ότι:
   (α′) $\lambda\neq-1$
   (β′) $x=\frac{1}{\lambda+1}x_1+\frac{\lambda}{\lambda+1}x_2$ και $y=\frac{1}{\lambda+1}y_1+\frac{\lambda}{\lambda+1}y_2$

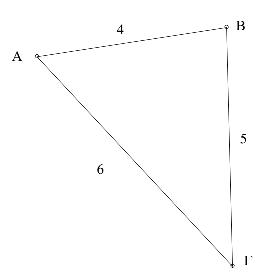
41. Να αποδείξετε ότι κάθε διάνυσμα $\vec{u}$ με μέτρο 1 μπορεί να πάρει την μορφή $\vec{u}=(\sigma\upsilon\nu\theta,\eta\mu\theta)$ όπου θ κατάλληλος αριθμός με $\theta\in[0,2\pi)$.

42. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:
   (α′) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ (β′) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ (γ′) $\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$



ΑΠΑΝΤΗΣΗ (α′) 50 (β′) -25 (γ) -75

43. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το εσωτερικο γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.



Απάντηση: $\frac{27}{2}$

44. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

$\lvert\vec{\alpha}\rvert$	$\lvert\vec{\beta}\rvert$	$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$	$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$
2	3	$\frac{1}{3}$	
5		$\frac{1}{7}$	12
3	7		-11

Απάντηση: 2, $\frac{84}{5}$, $-\frac{11}{21}$

45. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν μέτρα t και $4t$ $(t>0)$. Να βρείτε την γωνία τους στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α′) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2t^2$
(β′) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2t^2\sqrt{3}$
(γ′) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-4t^2$
(δ′) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$
(ε′) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-2t^2\sqrt{2}$
(ϛ′) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4t^2$

Απάντηση:

(α′) $\frac{\pi}{3}$
(β′) $\frac{\pi}{6}$
(γ′) π
(δ′) $\frac{\pi}{2}$
(ε′) $\frac{3\pi}{4}$
(ϛ′) 0

46. Να υπολογίσετε τα εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\vec{\beta}$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

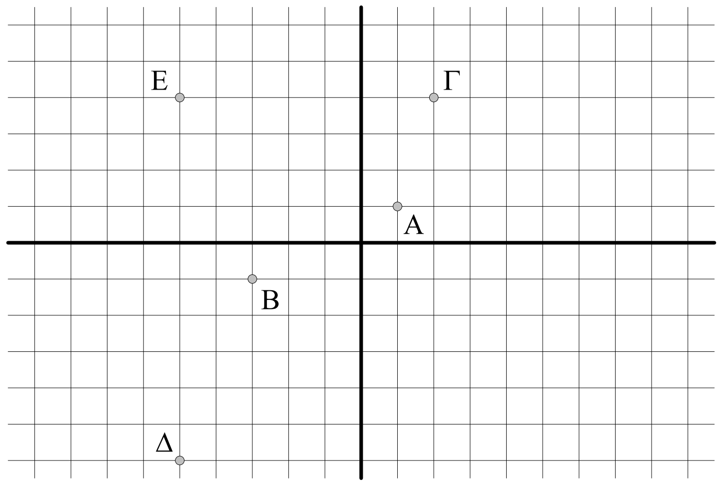
(α′) $\vec{\alpha}=(2,4)$, $\vec{\beta}=(-1,3)$
(β′) $\vec{\alpha}=\left(1,\frac{1}{2}\right)$, $\vec{\beta}=(-3,4)$
(γ′) $\vec{\alpha}=\left(\sqrt{3},3\right)$, $\vec{\beta}=\left(1,2\sqrt{3}\right)$

Απάντηση:

(α′) $\vec{\alpha}\vec{\beta}=10$
(β′) $\vec{\alpha}\vec{\beta}=-1$
(γ′) $\vec{\alpha}\vec{\beta}=7\sqrt{3}$

47. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα στο παρακάτω σχήμα

(α′) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$
(β′) $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{EA}$
(γ′) $\overrightarrow{\Delta E}\cdot\overrightarrow{\Gamma E}$
(δ′) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{E\Gamma}$



Απαντηση:

(α′) 48 (β′) −15 (γ′) 0 (δ′) 28

48. Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α′) $\vec{\alpha} = (2,3)$, $\vec{\beta} = (-1,5)$

(β′) $\vec{\alpha} = (-1,4)$, $\vec{\beta} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 6, -\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}\right)$

Απαντηση:

(α′) $\frac{\pi}{4}$ (β′) $\frac{2\pi}{3}$

49. Να βρείτε για ποια τιμή του λ τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα όταν:

(α′) $\vec{\alpha} = (\lambda, 2)$, $\vec{\beta} = (\lambda - 3, 1)$

(β′) $\vec{\alpha} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}, \lambda\right)$, $\vec{\beta} = (3\lambda + 1, 1 - 3\lambda)$

Απαντηση:

(α′) $\lambda = 1$ ή $\lambda = 2$ (β′) $\lambda = 0$ ή $\lambda = -\frac{2}{3}$ ή $\lambda = 1$

50. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,4)$, $\vec{\beta} = (-3,1)$. Για το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}\vec{\gamma} = 18$ και $\vec{\beta}\vec{\gamma} = 8$. Να βρείτε το $\vec{\gamma}$.
Απαντηση: $\vec{\gamma} = (-1,5)$

51. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,3)$, $\vec{\beta} = (-1,2)$, $\vec{\gamma} = (2,2)$. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α′) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$

(β′) $\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right)\vec{\gamma} + \left(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}\right)\vec{\alpha} + (\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha})\vec{\beta}$

(γ′) $\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}+\frac{1}{|\vec{\beta}|}\vec{\beta}+\frac{1}{|\vec{\gamma}|}\vec{\gamma}$

Απαντηση:

(α′) 16

(β′) $(2,34)$

(γ′) $\left(\frac{2}{13}\sqrt{13}-\frac{1}{5}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{3}{13}\sqrt{13}+\frac{2}{5}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

52. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(1,-1)$. Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο συνιστώσες $\vec{u}$, $\vec{v}$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α′) Η $\vec{u}$ είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}=(2,3)$ και η $\vec{v}$ είναι παράλληλη στο $\vec{\gamma}=(-1,2)$.

(β′) Οι $\vec{u}$, $\vec{v}$ είναι κάθετες και η $\vec{u}$ είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}=(2,3)$.

(γ′) $|\vec{u}|=2$ και $|\vec{v}|=1$.

Απαντηση:

(α′) $\vec{u}=\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)$, $\vec{v}=\left(\frac{5}{7},-\frac{10}{7}\right)$

(β′) Υπάρχουν δύο λύσεις: $\vec{u}=(0,0)$, $\vec{v}=(1,-1)$ και $\vec{u}=\left(-\frac{2}{13},-\frac{3}{13}\right)$, $\vec{v}=\left(\frac{15}{13},-\frac{10}{13}\right)$.

(γ′) Υπάρχουν δύο λύσεις: $\vec{u}=\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{7},-\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{7}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{7},\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{7}\right)$
και $\vec{u}=\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{7},-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{7}\right)$, $\vec{v}=\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{7},\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{7}\right)$.

53. Έστω ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha}|=2,\left|\vec{\beta}\right|=3$ και $\vec{\alpha}\vec{\beta}=5$.

(α′) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

(β′) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

(γ′) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{v}$ του ερωτήματος (β′).

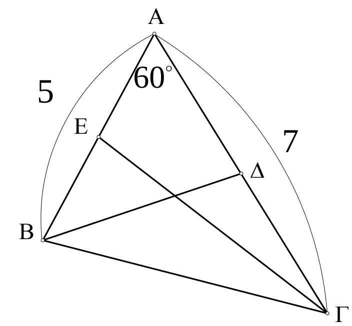
(δ′) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{v}$ του ερωτήματος (β′).

Απαντηση:

(α′) $\frac{5}{6}$ (β′) -51 (γ′) $\sqrt{157}$, $2\sqrt{5}$ (δ′) $\frac{-51}{2\sqrt{5}\sqrt{157}}$

54. Έστω ότι $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=1$, $\left|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|=3$ και $(\widehat{\vec{\alpha}+\vec{\beta},2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$. Βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.
Απαντηση: $|\vec{\alpha}|=\frac{3}{5}\sqrt{3}$, $\left|\vec{\beta}\right|=\frac{1}{5}\sqrt{7}$

55. Στο τρίγωνο του σχήματος οι $B\Delta$, ΓE είναι διάμεσοι. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{\Gamma E}$.

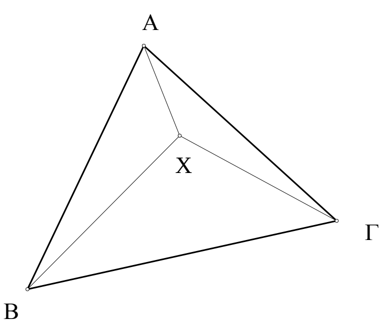


ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\frac{471}{8}$

56. Αν $|\vec{\alpha}| = \left|\vec{\beta}\right| = |\vec{\gamma}| = 2$ και $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 1$, $\vec{\beta}\vec{\gamma} = 3$ να βρείτε ποιές τιμές μπορεί να πάρει το $\vec{\gamma}\vec{\alpha}$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\frac{1}{4}\left(3 \pm \sqrt{15}\sqrt{7}\right)$.

57. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και X ένα οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου του.

(α′) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{\Gamma X} \cdot \overrightarrow{AB}$



(β′) Να αποδείξετε ότι αν το X συμπίπτει με το κοινό σημείο των υψών που άγονται από τις κορυφές B, Γ τότε $\overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{\Gamma X} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

(γ′) Με την βοήθεια των ερωτημάτων (α′), (β′) να συνάγετε ότι τα ύψη κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

58. Έστω A, B δύο σταθερά σημεία και c ένας σταθερός αριθμός. Να αποδείξετε ότι αν $c > -\frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{4}$ τότε τα σημεία M για τα οποία ισχύει

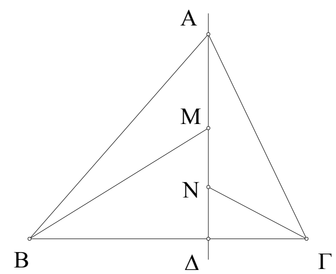
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = c$$

ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το μέσο του AB και ακτίνα $R = \sqrt{c + \frac{|AB|^2}{4}}$.

59. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Έστω μεταβλητά σημεία M, N της ευθείας $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Gamma N} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$$

είναι ίση με κάποιο σταθερό αριθμό, ανεξάρτητο από την επιλογή των M, N.



2 Ευθεια

60. Να βρείτε το κοινό σημείο των ευθειών

$$2x + 3y - 2 = 0 \qquad x + y - 1 = 0$$

Απαντηση: $A(1, 0)$

61. Για ποια τιμή του λ το σημείο $K(2\lambda - 1, \lambda)$ ανήκει στην ευθεία $2x - 3y + 1 = 0$;
Απάντηση: $\lambda = 1$

62. Για ποια τιμή του λ η ευθεία $3x + (\lambda - 1)y = 8$ διέρχεται από το σημείο $H(2, -3)$;
Απαντηση: $\lambda = \frac{1}{3}$

63. Να βρείτε τα α, β αν είναι γνωστό ότι η ευθεία $\alpha x + \beta y = 1$ διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(3, 3)$.
Απαντηση: $\alpha = -\frac{1}{9}$, $\beta = \frac{4}{9}$

64. Η ευθεία $y - 3 = \lambda(x - 2)$ διέρχεται από το σημείο $A(2, 3)$. Για ποια τιμή του λ διέρχεται και από το σημείο $B(5, -1)$.
Απαντηση: $\lambda = -\frac{4}{3}$

65. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(2, -3)$ και έχει συντελεστή διευθύνσεως 3.
Απαντηση: $y + 3 = 3(x - 2)$ ή αλλιώς $3x - y - 9 = 0$

66. Να βρείτε τον συντελεστή διευθύνσεως της ευθείας $y - x = 3(x + y)$
Απαντηση: -2

67. Ποιός είναι ο συντελεστής διευθύνσεως της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(2, 11), B(-3, 4)$;
Απαντηση: $\frac{7}{5}$

68. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $\Delta\,(2,3)$, $K\,(-3,4)$.
Απαντηση: $x+5y-17=0$

69. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(2,34)$, $B(2,-34)$.
Απαντηση: $x=2$.

70. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $K\,(2,3)$ και είναι παράλληλη στην $y=5x+3$.
Απαντηση: $5x-y-7=0$

71. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $K\,(2,3)$ και είναι παράλληλη στην $3x-4y+2=0$.
Απαντηση: $3x-4y+6=0$

72. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A\,(-2,0)$ και είναι κάθετη στην $x+y+2=0$.
Απαντηση: $y=-x+2$

73. Για ποια τιμή του λ η ευθεία $(\lambda+1)\,x-3y+2=0$ είναι κάθετη στην ευθεία $4x-5y+3=0$.
Απαντηση: $\lambda=-\frac{19}{4}$

74. Να βρείτε σημείο της ευθείας $2x+4y-2=0$ που να έχει τεταγμένη ίση με 3.
Απαντηση: $M\,(-5,3)$

75. Να βρείτε σημείο της ευθείας $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ που έχει τετμημένη διπλάσια της τεταγμένης του.
Απαντηση: $M(\frac{3}{2},\frac{3}{4})$

76. Ενα τμήμα έχει άκρα του τα $A\,(2,3)$ και $B\,(3,t)$. Πως πρέπει να επιλέξουμε το t ώστε το μέσο του AB να ανήκει στην ευθεία $2x-3y+1=0$;
Απαντηση: $t=1$

77. Για ποια τιμή του λ η ευθεία $2\lambda x+(4+\lambda)\,y-1=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}=(2,3)$;
Απαντηση: $\lambda=-\frac{12}{7}$

78. Η εξίσωση

$$\left(\lambda^2+\lambda-2\right)x+(\lambda-1)\,y+3=0$$

για κάθε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ εκτός από μία ορίζει ευθεία. Ποια είναι η τιμή του λ που εξαιρείται;
Απαντηση: $\lambda=1$

79. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(p,q)$.
Απαντηση: $qx - py = 0$

80. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\kappa,\lambda)$, $B(2,3)$.
Απαντηση: $(\lambda-3)\,x + (2-\kappa)\,y + 3\kappa - 2\lambda = 0$

81. Να βρείτε σημείο της ευθείας $2x - 4y + 3 = 0$ που απέχει από το σημείο $A\,(-1,3)$ απόσταση 4.
Απαντηση: $M\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\sqrt{199}, \frac{4}{5}+\frac{1}{10}\sqrt{199}\right)$, $M'\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{5}\sqrt{199}, \frac{4}{5}-\frac{1}{10}\sqrt{199}\right)$

82. Τα σημεία $M\,(2t-1, 5-6t)$, $t \in \mathbb{R}$ ανήκουν όλα σε μία ευθεία. Να βρείτε την εξίσωση της.
Απαντηση: $3x + y - 2 = 0$

83. Το σημείο $Q\,(4,4)$ ανήκει, προφανώς, στην ευθεία $4x - 3y - 4 = 0$. Να βρείτε ποια σημεία της ευθείας αυτής απέχουν από το Q απόσταση ίση με 3.
Απαντηση: $M\left(\frac{29}{5},\frac{32}{5}\right)$,$M'\left(\frac{11}{5},\frac{8}{5}\right)$

84. Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $A\,(1,2)\,,B\,(4,3)\,,\Gamma\,(-11,-2)$ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

85. Τα σημεια $A\,(2,3)\,,B\,(5,-1)\,,\Gamma\,(6,s)$ είναι συνευθειακά. Ποιός είναι ο s;
Απαντηση: $s = -\frac{7}{3}$

86. Να βρείτε σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα $A(-3,2), B(3,6)$ που έχει τετμημένη ίση με 4.
Απαντηση: $\Gamma\left(4,\frac{20}{3}\right)$

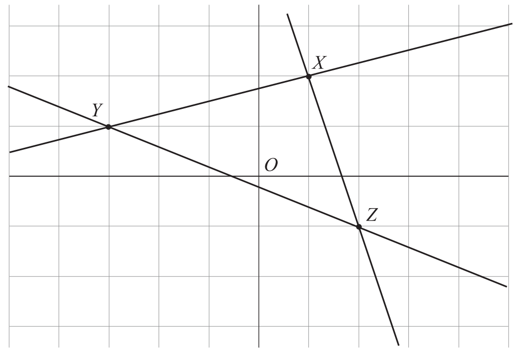
87. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $K\,(3,-4)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $T(4,4)$, $S(-4,5)$.
Απαντηση: $x + 8y + 29 = 0$

88. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A\,(2,3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $T\,(11,4)$, $S\,(3,2)$.
Απαντηση: $4x + y - 11 = 0$

89. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $K\,(2,4)$ και είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $tx + ry + s = 0$.
Απαντηση: $rx - ty + 4t - 2r = 0$

90. Με δεδομένο ότι οι ευθείες $ax + y + 2 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$ τέμνονται να βρείτε το σημείο τομής τους.
Απαντηση: $K\left(-\frac{7}{3a-1}, \frac{a+2}{3a-1}\right)$

91. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών XY, YZ, ZX στο επόμενο σχήμα:



Απαντηση: $XY: y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$, $YZ: y=-\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$, $ZX: y=-3x+5$

92. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $P\left(2,4\right)$ από την ευθεία $5x+12y-1=0$.
Απαντηση: $\frac{57}{13}$

93. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $P\left(-2,-4\right)$ από την ευθεία $x=7$.
Απαντηση: 9

94. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $K\left(3,4\right)$ από την ευθεία $y=3x+1$.
Απαντηση: $\frac{3}{5}\sqrt{10}$

95. Μία ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P\left(2,3\right)$ θα είναι:

ή η $x=2$ **είτε** της μορφής $y-3=\lambda\left(x-2\right)$

Να βρείτε ποια ευθεία διέρχεται από το P και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση 2.
Απαντηση: Υπάρχουν δύο ευθείες η $x=2$ και η $y=\frac{5}{12}x+\frac{13}{6}$

96. Να επαληθεύσετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ ή εξίσωση

$$\lambda\left(x+y-2\right)+\left(x-y\right)=0$$

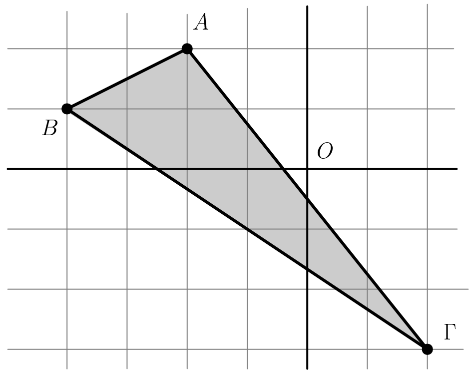
παριστάνει ευθεία. Κατόπιν να βρείτε ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η ευθεία αυτή γιά κάθε τιμή του λ.
Απαντηση: Πρόκειται για το σημείο $P(1,1)$.

97. Οι εξισώση

$$\left(2x+3y-3\right)+\left(t+1\right)\left(x-y-2\right)=0$$

παριστάνει ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο. Ποιο;
Απαντηση: Το $K\left(\frac{9}{5},-\frac{1}{5}\right)$

98. Για το τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος να υπολογίσετε την εξίσωση του ύψους του $B\Delta$.



Απαντηση: $4x - 5y + 21 = 0$

99. Ποια από τις ευθείες $2x + 3y + 4 = 0$, $x - y = 0$ σχηματίζει μεγαλύτερη γωνία με τον $x'x$ (Θυμηθείτε ότι η γωνία μίας ευθείας με τον $x'x$ μετράται κατά την θετική φορά).
Απαντηση: Η πρώτη.

100. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.
Απαντηση: $y = -x + 1$

101. Να βρείτε την απόσταση του σημείου $K(1, 2)$ από το σημείο τομής των ευθειών $x + 3y - 2 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$.
Απαντηση: $\sqrt{5}$

102. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία $A(1, 9)$, $B(2, 4)$, $\Gamma(5, -2)$.
Απαντηση: $\frac{9}{2}$

103. Έστω η ευθεία

$$(\varepsilon) \qquad Ax + By + \Gamma = 0$$

(α′) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{-A\Gamma}{A^2+B^2}, \frac{-B\Gamma}{A^2+B^2}\right)$ ανήκει πάντοτε στην ευθεία (ε).

(β′) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OM} \perp (\varepsilon)$

104. Για ποια τιμή του λ τα σημεία $A(2, 3), B(3, -4), \Gamma(1, \lambda)$ είναι κορυφές τριγώνου το οποίο έχει εμβαδόν ίσο με 4;
Απαντηση: $\lambda = 2$ ή $\lambda = 18$

105. Δίνονται τα σημεία $A\,(4,2)\,, B(7,-1)$ και η ευθεία $x+3y=2$. Να βρείτε σημείο M της ευθείας τέτοιο ώστε το τρίγωνο ABM να έχει εμβαδόν ίσο με 12.
Απαντηση: $M\,(20,-6)$, $M'\,(-4,2)$.

106. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες:
$x+y-1=0, \quad y=2x-1, \qquad y+7=3\,(x+2)$
Απαντηση: $\frac{1}{6}$

107. Να βρείτε την προβολή του σημείου $M\,(1,-1)$ στην ευθεία $2x+3y=2$.
Απαντηση: $M'\left(\frac{19}{13},-\frac{4}{13}\right)$

108. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $A\,(2,-1)$ και χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $T\,(2,3)\,, S\,(-1,2)$ σε δύο τμήματα TK, SK έτσι ώστε $\frac{(TK)}{(SK)}=3$.
Απαντηση: $13x+9y-17=0$

109. Για ποια τιμή του κ οι ευθείες

$$2x+y=1 \quad 3x-2y=2 \quad x+y=\kappa$$

διέρχονται από το ίδιο σημείο;
Απαντηση: $\kappa=\frac{3}{7}$

110. (α′) Να αποδείξετε ότι κάθε ευεθεία παράλληλη στην $Ax+By+\Gamma=0$έχει εξίσωση της μορφής $Ax+By+\Gamma'=0$

(β′) Να αποδείξετε ότι η μεσοπαράλληλη των ευθειών $Ax+By+\Gamma=0$, $Ax+By+\Gamma'=0$ έχει εξίσωση $Ax+By+\frac{\Gamma+\Gamma'}{2}=0$.

111. Να βρείτε την συμμετρική της ευθείας $4x-y=2$ ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο $A\,(2,4)$
Απαντηση: $4x-y=6$

112. Ποια είναι η εξίσωσή της μεσοπαραλλήλου των ευθειών $3x+5y=2$, $3x+5y=10$;
Απαντηση: $3x+5y=6$

113. Δίνονται τα σημεία $A\,(1,2)$,$B\,(8,1)$. Να βρεθεί σημείο M της ευθείας $2x+3y-1=0$ έτσι ώστε $\widehat{AMB}=90^\circ$.
Απαντηση: $M\,(2,-1)\,, M'\left(\frac{41}{13},-\frac{23}{13}\right)$

114. Έστω οι αριθμοί α,β,γ με $\alpha<\beta<\gamma$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $\mathrm{A}\left(\alpha,\alpha^2\right)$, $\mathrm{B}\left(\beta,\beta^2\right)$, $\Gamma\left(\gamma,\gamma^2\right)$ είναι ίσο με $\frac{1}{2}\,(\alpha-\beta)\,(\beta-\gamma)\,(\gamma-\alpha)$.

115. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $\left(1+\sqrt{3}\right)x+\left(1-\sqrt{3}\right)y+1=0$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 75°.

116. **Από τις εξετάσεις του 1980.** Δίνονται τα σημεία Α $(1,1)$, Β $(-1,3)$ και Γ $(2,-4)$.

 (α′) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας του ύψους του τριγώνου ΑΒΓ, που διέρχεται από το σημείο Α.

 (β′) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας της διαμέσου του τριγώνου ΑΒΓ που διέρχεται από το σημείο Β.

 (γ′) Να βρεθεί το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών.

 ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α′) $3x-7y+4=0$ (β′) $9x+5y-6=0$ (γ′) $M\left(\frac{11}{39},\frac{9}{13}\right)$

117. **Από τις εξετάσεις του 1987, Δέσμη Ι.** Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy δίνονται τα σημεία Α $(4,2)$ και Β $(3,-5)$. Θεωρούμε την ευθεία ε με εξίσωση $7x+y-23=0$. Να βρεθεί σημείο της ευθείας ε ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ορθόγώνιο στο Μ.
 ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Υπάρχουν δύο σημεία τα $M(4,-5)$ και $M(-5,4)$.

118. Με δεδομένο ότι η εξίσωση $Ax+By=A+B$ παριστάνει ευθεία να αποδείξεε ότι και η εξίσωση $A(x-y)+B(x+y)=2B$ παριστάνει επίσης ευθεία. Ποιό είναι το κοινό σημείο των δύο ευθειών;
 ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το $M(1,1)$.

119. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες

$$\sqrt{3}x+y=0,\quad \sqrt{3}y+x=0,\quad \sqrt{3}x+y=1,\quad \sqrt{3}y+x=1$$

 ορίζουν παραλληλόγραμμο του οποίου οι διαγώνιοι είναι κάθετες.

120. Έστω μία ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$ η οποία τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ σε ένα σημείο T τέτοιο ώστε $\overrightarrow{PT}=\lambda\overrightarrow{TQ}$. Να αποδείξετε ότι

$$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+\Gamma}{Ax_2+By_2+\Gamma}$$

121. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες: $x+\sqrt{3}y+2=0$, $\sqrt{3}x+y+2=0$.
 ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 30°

122. Να βρείτε σημείο της ευθείας $2x-3y+1=0$ που απέχει από την ευθεία $4x-3y+2=0$ απόσταση 3.
 ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $A(7,5)$, $B(-8,-5)$

123. Έστω οι ευθείες

$$2x-y+1-3k=0\,,\qquad 3x-y+1-4k=0$$

 (α′) Να βρείτε το κοινό σημείο τους M

(β′) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του M

Απαντηση: $M(k, 1-k)$,η ευθεία $x+y=1$.

124. Η εξίσωση $x^2+2xy-2x-3y^2-2y+1=0$ παριστάνει δύο τεμνόμενες ευθείες. Ποιό είναι το σημείο τομής τους;
Απαντηση: Πρόκειται για τις ευθείες $x+3y-1=0$, $x-y-1=0$ οι οποίες τέμνονται στο $M(1,0)$.

125. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(0,1)$ και τέμνει τις ευθείες $\varepsilon_1 : y=\frac{1}{2}x$ και $\varepsilon_2 : y=\frac{1}{2}x+1$ στα σημεία A και B αντίστοιχως, έτσι ώστε να ισχύει $AB=1$.
Απαντηση: Υπάρχουν δύο ευθείες. Οι $3x+4y=4$ και η $x=2$.

126. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2+2xy+y^2-1=0$ παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες.

127. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος αριθμών α, β με $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$ η εξίσωση

$$(\alpha+2\beta)\,x+(\alpha+3\beta)\,y=\alpha+\beta$$

παριστάνει ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο το οποίο και να προσδιορίσετε.
Απαντηση: Πρόκειται για το σημείο $M(2,-1)$.

128. Η ευθεία (l) είναι κάθετη στην ευθεία $5x-y=1$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (l).
Απαντηση: $x+5y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

129. Να αποδείξετε ότι αν οι ευθείες

$$p_1x+q_1y=1, \quad p_2x+q_2y=1, \quad p_3x+q_3y=1$$

διέρχονται από το ίδιο σημείο τότε τα σημεία

$$A(p_1,q_1), \quad B(p_2,q_2), \quad C(p_3,q_3)$$

είναι συνευθειακά.

130. Από το σημείο $A(3,-2)$ φέρνουμε μία ευθεία παράλληλη στην $2x+y+5=0$ η οποία τέμνει την $x-y+1=0$ στο B.
Απαντηση: $2\sqrt{5}$

131. Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου που ορίζουν οι ευθείες:

$$y+x-6=0, \quad 3y-x+2=0, \quad 3y=5x+2$$

Απαντηση: $H\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$

132. Δίνονται οι ευθείες $3x-4y+4a=0$, $2x-3y+4a=0$, $5x-y+a=0$. Να αποδείξετε ότι οι προβολές της αρχής των αξόνων στις τρεις αυτές ευθείες είναι σημεία συνευθειακά.

133. Να αποδείξετε ότι:

(α′) $\varepsilon\varphi 3\alpha = \frac{3\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi^3\alpha}{1-3\varepsilon\varphi^2\alpha}$

(β′) Η εξίσωση

$$x^3-3xy^2+\sqrt{3}\left(y^3-3x^2y\right)=0$$

παριστάνει τρεις ευθείες που διέρχονται από την αρψή των αξόνων οι οποίες ανά δύο σχηματίζουν γωνία $120°$.

134. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $px+qy=r$, $qx+py=r$ με $pq\neq 0$ τένονται σε σημείο της ευθείας $y=x$ και είναι συμμετρικές ως προς αυτήν.

135. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $px+qy=r$, $qx+py=r$ με $pq\neq 0$ τένονται σε σημείο της ευθείας $y=x$ και είναι συμμετρικές ως προς αυτήν.

136. Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι 17 και δύο από τις κορυφές του είναι τα σημεία $A\left(2,1\right)$, $B\left(5,-3\right)$. Να βρείτε τις άλλες δύο κορυφές του.
Απαντηση: Θα είναι $\Gamma\left(-2,12\right)$, $\Delta\left(-5,16\right)$ ή $\Gamma\left(-2,\frac{2}{3}\right)$, $\Delta\left(-5,\frac{14}{13}\right)$.

137. Να αποδείξετε ότι αν οι ευθείες $A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$, $A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$ σχηματίζουν γωνια φ τότε ισχύει

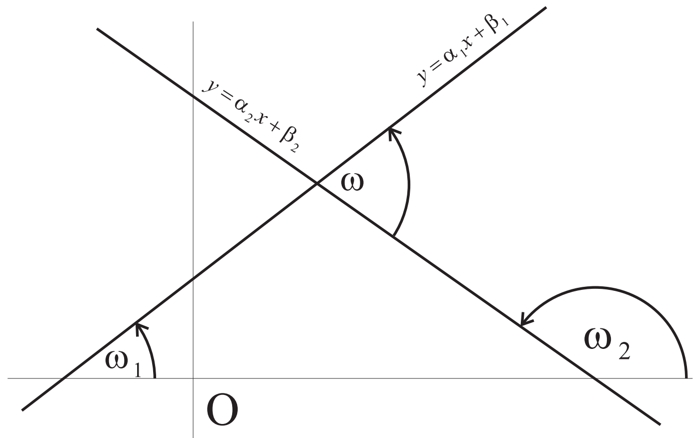
$$\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

138. Έστω η ευθεία

$$(\varepsilon) \qquad 2x+3y+4=0$$

Προσθέτουμε σε κάθε συντελεστή της ευθειας τον ίδιο αριθμό και σχηματίζουμε έτσι μία νέα εξίσωση. Για παράδειγμα αν προσθέσουμε το 3 θα πάρουμε την $5x+8y+9=0$. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο είναι εξισώσεις ευθειών που όλες διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο και να βρείτε.
Απαντηση: $P\left(1,-2\right)$

139. Στο επόμενο σχήμα να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\alpha_2-\alpha_1}{1+\alpha_1\alpha_2}$



3 Κωνικες Τομες

3.1 Κυκλος

140. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου $(x+5)^2+(y-5)^2=2$.
Απαντηση: $K(-5,5)$, $\rho=\sqrt{2}$

141. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου $x^2+y^2-8x+4y+11=0$.
Απαντηση: $K(4,-2)$, $\rho=3$

142. Ποια πρέπει να είναι η ακτίνα του κύκλου $(x-1)^2+(y+2)^2=R^2$ έτσι ώστε να διέρχεται από το σημείο $M(3,4)$.
Απαντηση: $R=2\sqrt{10}$

143. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(-3,4)$ και διέρχεται από το σημείο $M(3,4)$.
Απαντηση: $(x+3)^2+(y+4)^2=100$

144. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $A(1,3)$, $B(4,7)$.
Απαντηση: $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-5)^2=\frac{25}{4}$.

145. Το σημείο A ανήκει στον κύκλο $(x-2)^2+y^2=13$ και έχει τετμημένη 3. Ποια μπορεί να είναι η τεταγμένη του;
Απαντηση: $\pm 2\sqrt{3}$

146. Για ποια τιμή του t η εξίσωση $x^2+y^2-4x+2ty+13=0$ παριστά κύκλο με ακτίνα 4;
Απαντηση: ± 5

147. Να βρείτε το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(-3,2)$, $B(4,1)$ και έχει ακτίνα 4.
Απαντηση: $K\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{53}\sqrt{583}, 3-\frac{7}{106}\sqrt{583}\right)$ ή $K\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{53}\sqrt{583}, 3+\frac{7}{106}\sqrt{583}\right)$

148. Ποια πρέπει να είναι η ακτίνα R του κύκλου $(x-1)^2+(y+2)^2=R^2$ έτσι ώστε να εφάπτεται στην ευθεία $y=3x+1$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $R=\frac{3}{5}\sqrt{10}$

149. Για ποια τιμή του λ το σημείο $M\left(2\lambda+1,\lambda\right)$ ανήκει στον κύκλο με εξίσωση $(x-3)^2+(y+4)^2=100$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\lambda=\pm 4$

150. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x+y=2$ εφάπτεται στους κύκλους $x^2+y^2=2$ και $x^2+y^2+3x+3y-8=0$ στο ίδιο σημείο.

151. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $2x+y=0$ και εφάπτεται στις ευθείες $4x-3y+10=0$, $4x-3y-30=0$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $(x-1)^2+(y+2)^2=16$

152. Για ποια τιμή του λ η ευθεία $y=\lambda x+1$ τέμνει τον κύκλο $(x-3)^2+y^2=4$ σε δύο σημεία;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $-\frac{3}{5}-\frac{2}{3}\sqrt{6}<\lambda<-\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\sqrt{6}$

153. Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου με κορυφές $A\left(-2,4\right)$, $B\left(0,3\right)$, $\Gamma\left(4,-1\right)$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\left(x+\frac{13}{2}\right)^2+\left(y+\frac{15}{2}\right)^2=\frac{305}{2}$

154. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\alpha y+\alpha^2=0, \quad \alpha\neq 0$$

εφάπτεται στους άξονες.

155. Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=25$ στο σημείο του $M\left(-3,4\right)$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $-4x+4y=25$

156. Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=1$ που διέρχεται από το σημείο $M\left(-4,4\right)$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\left(-1\pm\sqrt{31}\right)x+\left(1\pm\sqrt{31}\right)y=8$

157. Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=1$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+1$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $-\frac{2}{5}\sqrt{5}x+\frac{1}{5}\sqrt{5}y=1$, $\frac{2}{5}\sqrt{5}x-\frac{1}{5}\sqrt{5}y=1$

158. Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $(x-2)^2+(y-1)^2=8$ στο σημείο του $M\left(4,3\right)$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $x+y=7$

159. Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $(x-2)^2+(y-1)^2=8$ που διέρχεται από το σημείο $M\left(3,4\right)$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $x+y=7$, $-x+7y=25$

160. Για ποιά τιμή του t το σημείο $A(t,2)$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 3.
Απαντηση: $t = \pm\sqrt{5}$

161. Να βρείτε τον συμμετρικό του κύκλου $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ ως προς το σημείο $K(2,3)$.
Απαντηση: $(x-3)^2 + (y-8)^2 = 1$

162. Να βρείτε τον συμμετρικό του κύκλου $x^2 + y^2 = 3$ ως προς την ευθεία $x + y = 1$.
Απαντηση: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$

163. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει ακτίνα 10 και εφάπτεται στην ευθεία $3x - 4y - 13 = 0$ στο σημείο $A(7,2)$.
Απαντηση: $x^2 + y^2 - 26x + 12y + 105 = 0$ ή $x^2 + y^2 - 2x - 20y + 1 = 0$

164. Να βρείτε τα κοινά σημεία του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ και της ευθείας $x + y = 2$.
Απαντηση: $A\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{14}, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{14}\right)$, $B\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{14}, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{14}\right)$

165. Για ποιές τιμές του λ η εξίσωση $x^2 + y^2 = 1 - 2\lambda$ παριστάνει κύκλο;
Απαντηση: $\lambda < \frac{1}{2}$

166. Να βρείτε τα σημεία τομής του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ με την ευθεία $y = 3x$.
Απαντηση: $A\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

167. Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής των κύκλων

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4, \qquad (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Απαντηση: $x - y = 0$

168. Για ποιά τιμή του p ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 + px + y - 1 = 0$ διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$;
Απαντηση: $p = -6$

169. Δίνεται το σημείο $P(10,7)$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$. Ποια είναι η μεγαλύτερη και ποια η μικρότερη απόσταση που μπορεί να έχει ένα σημείο του κύκλου από το P;
Απαντηση: 15 και 5

170. Να βρείτε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο $A(7,8)$ στον κύκλο $x^2 + y^2 = 9$.
Απαντηση: $2\sqrt{26}$

171. Για ποιές τιμές των p, q ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 + px + qy - 1 = 0$ διέρχεται από τα σημεία $A(2,2)$, $B(3,1)$;
Απαντηση: $p = -\frac{11}{4}$, $q = -\frac{3}{4}$

172. Να επαληθεύσετε ότι η ευθεία $x+y-7=0$ εφάπτεται στον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2-4x-6y+11=0$.

173. Έστω οι κύκλοι

$$\mathcal{C}_1 : x^2+y^2-2y=0$$

$$\mathcal{C}_2 : x^2+y^2-4x-2y+1=0$$

Να βρείτε το μήκος της διακέντρου τους και το μήκος της κοινής χορδής τους.

Απαντηση: Η διάκεντρος έχει μήκος 2 και η κοινή χορδή τους έχει μήκος $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

174. Δίνονται τα σημεία $A(-2,-5)$ και $B(3,4)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει $MA^2+MB^2=70$.

Απαντηση: Είναι ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-x-y-8=0$

175. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία $3x-4y+20=0$.

Απαντηση: $x^2+y^2=16$

176. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο στην ευθεία $x+y=5$ και διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$, $B(4,1)$.

Απαντηση: $(x-3)^2+(y-2)^2=2$

177. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(1,1)$, $B(1,-1)$, $\Gamma(2,0)$.

Απαντηση: $(x-1)^2+y^2=1$

178. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στους άξονες και διέρχεται από το σημείο $A(-2,-3)$.

Απαντηση: $x^2+y^2-2\alpha x-2\alpha y+\alpha^2=0$ όπου $\alpha=-5\pm 2\sqrt{3}$.

179. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(3,-1)$ και αποκόπτει από την ευθεία $2x-5y+18=0$ χορδή μήκους 6.

Απαντηση: $x^2+y^2-6x+2y-28=0$

180. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(3,-1)$ και αποκόπτει από την ευθεία $2x-5y+18=0$ χορδή μήκους 6.

Απαντηση: $x^2+y^2-6x+2y-28=0$

181. Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $y=x$ στην αρχή των αξόνων.

Απαντηση: $x^2+y^2-5x+5y=0$

182. Από το σημείο $\Sigma(4,-2)$ φέρνουμε εφαπτομένες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ προς τον κύκλο $x^2+y^2=10$.

   (α′) Να βρείτε τις εξισώσεις των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$.

   (β′) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: α) $x-3y-10=0$, $3x+y-10=0$ β) $\lambda_1\lambda_2=\left(\frac{1}{3}\right)(-3)=-1$

183. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A\left(1,2\right)$, $B\left(3,4\right)$ και εφάπτεται στην ευθεία $3x+y-3=0$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $x^2+y^2-8x-2y+7=0$, $x^2+y^2-3x-7y+12=0$

184. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A\left(9,1\right)$, $B\left(7,9\right)$, $\Gamma\left(-2,12\right)$ και $\Delta\left(6,10\right)$ είναι ομοκυκλικά.

185. Έστω οι κύκλοι:

$$\mathcal{C}_1: x^2+y^2+4x-12y+14=0$$

$$\mathcal{C}_2: x^2+y^2-14x+6y-22=0$$

(α΄) Να βρείτε τα σημεία τομής A, B των $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$.

(β΄) Να βρείτε το μήκος της κοινής χορδής AB των $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: α) $A\left(3,5\right)$, $B\left(-1,1\right)$ β) $AB=4\sqrt{2}$

186. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι:

$$\mathcal{C}_1: x^2+y^2-8x-2y+8=0$$

$$\mathcal{C}_2: x^2+y^2-2x+6y+6=0$$

εφάπτονται και να βρείτε το σημείο επαφής.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $E\left(\frac{11}{5},-\frac{7}{5}\right)$

187. Να αποδείξετε ότι αν ο λόγος των αποστάσεων $\frac{MA}{MB}$ του σημείου $M\left(x,y\right)$ από τα σημεία $A\left(-1,3\right)$, $B\left(2,4\right)$ είναι σταθερός και ίσος με 2 τότε το M ανήκει σε κύκλο του οποίου να βρείτε την εξίσωση.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $x^2+y^2-6x-\frac{26}{3}y+\frac{70}{3}=0$

188. Να βρείτε για ποια τιμή του λ τα σημεία $A\left(2,0\right)$, $B\left(0,1\right)$, $\Gamma\left(4,5\right)$ και $\Delta\left(0,\lambda\right)$ είναι ομοκυκλικά.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\lambda=1$, $\lambda=\frac{14}{3}$

189. Να βρείτε εφαπτομένη του κύκλου $\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2=13$ η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $4x+6y+5=0$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $2x+3y+12=0$, $2x+3y-14=0$

190. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2+2x-10y+17=0$ η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $2x+y-5=0$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $x-2y+11-3\sqrt{5}=0$, $x-2y+11+3\sqrt{5}=0$

191. Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου $x^2+y^2=25$ που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία $30°$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $x-\sqrt{3}y+10=0$, $x-\sqrt{3}y-10=0$

192. Να βρείτε το μήκος της χορδής που αποκόπτει η ευθεία $4x-2y-7=0$ από τον κύκλο $4x^2+4y^2-24x+5y+25=0$.
Απαντηση: $\frac{1}{2}\sqrt{19}$

193. Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων που διέρχονται από το σημείο $A(-4,3)$ και και εφάπτονται στις ευθείες $x+y=2$ και $x-y=2$
Απαντηση: Υπάρχουν δύο κύκλοι. Οι $(x-t)^2+y^2=\frac{(t-2)^2}{2}$ με $t=-10\pm 3\sqrt{6}$.

194. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι
$$x^2+y^2-2x=0$$
$$x^2+y^2+6x-6y+2=0$$
εφάπτονται εξωτερικά.

195. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τις κάθετες ευθείες $ax+by+c=0$, $bx-ay+d=0$ είναι σταθερό, είναι κύκλος.

196. Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα α,β ώστε η ευθεία $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ να εφάπτεται στον κύκλο $x^2+y^2=\rho^2$;
Απαντηση: $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{1}{\rho^2}$

197. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο των αξόνων εφάπτεται σάυτούς και στην ευθεία $5x+12y=60$.
Απαντηση: Υπάρχουν δύο κύκλοι: $(x-15)^2+(y-15)^2=15^2$, $(x-2)^2+(y-2)^2=2^2$

198. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου $x^2+y^2=25$ που διέρχονται από το σημείο $T(13,0)$ σχηματίζουν γωνία με τον άξονα $x'x$ της οποίας το ημίτονο είναι $\frac{5}{13}$.

199. Από το σημείο $L(4,3)$ φέρνουμε εφαπτόμενες LA,LB στον κύκλο $x^2+y^2=9$. Να βρείτε το εμβαδόν του LAB.
Απαντηση: $\frac{192}{25}$

200. Να βρείτε τον κύκλο που διέρχεται από το σημείο $A(-1,5)$ και εφάπτεται στις ευθείες $3x+4y-35=0$, $4x+3y+14=0$.
Απαντηση: $(x-2)^2+(y-1)^2=5^2$, $\left(x+\frac{202}{49}\right)^2+\left(y-\frac{349}{49}\right)^2=\left(\frac{185}{49}\right)^2$

201. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$(1-t)x^2+(1-t)y^2-2(1+t)x-2(2-t)y+3=0$$
παριστάνει κύκλο για κάθε $t\neq 1$.

202. Έστω ο κύκλος $x^2+y^2-6x-4y-12=0$ και το σημείο $A(-1,5)$. Αφού επαληθεύσετε ότι το σημείο ανήκει στον κύκλο να βρείτε το αντιδιαμετρικό του.
Απαντηση: $A'(7,-1)$

203. Να βρείτε για ποια τιμή του p η ευθεία $(\sigma\upsilon\nu\theta)\,x + (\eta\mu\theta)\,y - p = 0$ εφάπτεται στον κύκλο $x^2 + y^2 - 2\alpha\,(\sigma\upsilon\nu\theta)\,x - 2\beta\,(\eta\mu\theta)\,y - \alpha^2\eta\mu^2\theta = 0$
Απαντηση: $p = \alpha\sigma\upsilon\nu^2\theta + \beta\eta\mu^2\theta \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2\eta\mu^2\theta}$

204. Έστω η εξίσωση

$$\left(p^2 - 2q\right)x^2 - \left(q^2 + 1\right)y^2 + px + 4qy = 0$$

Για ποιές τιμές των p, q η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο;
Απαντηση: $p = 0,\ q = 1$

205. Υποθέτουμε ότι η ευθεία $y = mx$ είναι η εξίσωση μίας χορδής του κύκλου $x^2 + y^2 - 2\alpha x = 0$. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο την χορδή έχει εξίσωση:

$$\left(1 + m^2\right)\left(x^2 + y^2\right) - 2\alpha\,(x + my) = 0$$

206. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ οι ευθείες $x + \lambda y = 2\lambda + 3$, $\lambda x - y = \lambda - 1$ τέμνονται και ότι το κοινό σημείο τους είναι σημείο του κύκλου $(x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

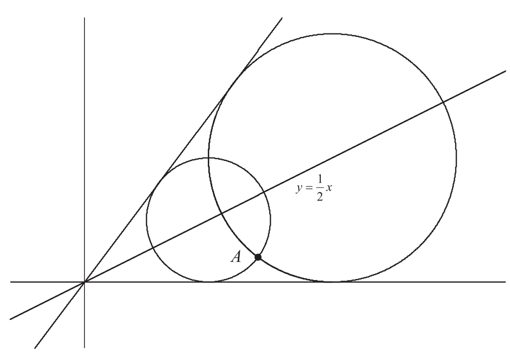
207. Δίνεται η ευθεία $5x + 3y + 2 = 0$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 - x - 2 = 0$.

(α′) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $A\left(-\frac{14}{17}, \frac{12}{17}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ είναι κοινά σημεία της ευθείας και του κύκλου.

(β′) Να αποδείχθεί ότι η εξίσωση $\left(x^2 + y^2 - x - 2\right) + \lambda\,(5x + 3y + 2) = 0$ είναι για κάθε τιμή του λ εξίσωση κύκλου που διέρχεται από τα A, B.

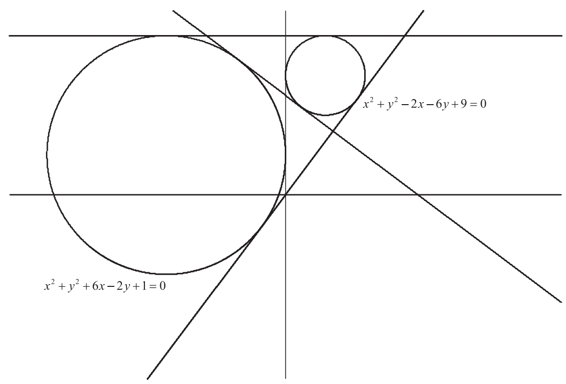
(γ′) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων του προηγουμένου ερωτήματος ανήκουν στην ευθεία $6x - 10y - 3 = 0$.

208. Δύο κύκλοι διέρχονται από το $A\,(14, 2)$, έχουν τα κέντρα τους στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$ και εφάπτονται στον άξονα $x'x$. Να βρείτε τις εξισώσεις τους καθώς και την εξίσωση της άλλης εφαπτομένης τους.



Απαντηση: $(x-20)^2+(y-10)^2=100$, $(x-10)^2+(y-5)^2=25$ και η άλλη εφαπτομένη είναι η $y=\frac{4}{3}x$

209. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των κύκλων $x^2+y^2-2x-6y+9=0$ και $x^2+y^2+6x-2y+1=0$.



Απαντηση: Υπάρχουν τέσσερις κοινές εφαπτομένες: $x=0$, $y=4$, $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$ και $y=\frac{4}{3}x$

210. Έστω τα σημεία $P\,(1,-2)$, $Q\,(-3,4)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PM}^2$
Απαντηση: $(x+1)^2+(y-1)^2=13$

211. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K\,(1,-2)$ που εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου $x^2+y^2-2x-15=0$.
Απαντηση: $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

212. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $5x+3y=9$, $x=3y$, $2x=y$ και $x+4y+2=0$ με την σειρά που δίνονται είναι εξισώσεις πλευρών εγγράψιμου τετραπλεύρου του οποίου και να ποσδιορίσετε τη εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου.
Απαντηση: Οι δύο πρώτε ευθείες τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ η δεύτερη με την τρίτη στο $B\,(0,0)$ και συνεχίζοντας έτσι βρίσκουμε τα σημεία $\Gamma\left(-\frac{2}{9},-\frac{4}{9}\right)$, $\Delta\left(\frac{42}{17},-\frac{19}{17}\right)$ Η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα A,B,Γ είναι $x^2+y^2-\frac{20}{9}x+\frac{5}{3}y=0$ και εύκολα διαπιστώνεται ότι διέρχεται από το Δ.

213. Έστω ο κύκλος $x^2+y^2=\rho^2$ και το σημείο $P\,(\alpha,\beta)$ εκτός του κύκλου. Από το σημείο P φέρνουμε τέμνουσες προς τον κύκλο. Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των χορδών που ορίζουν οι τέμνουσες ανήκουν στον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2=\alpha x+\beta y$.

214. Έστω το σημείο $M\,(x,y)$ του κύκλου $x^2+y^2=1$.

(α′) Έστω ότι $3x+4y=c$. Να αποδείξετε ότι το σύστημα

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=1 \\ 3x+4y=c \end{array}\right\}$$

έχει λύση αν και μόνο άν $25 - c^2 \geq 0$

(β΄) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση $3x + 4y$.

Απαντηση: 5 και -5

215. Έστω οι κύκλοι

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny - m^2 + n^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2nx + 2my + m^2 - n^2 = 0$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι τέμνονται στα σημεία $A\left(0, n - m\right)$, $B\left(\frac{2mn(n+m)}{n^2+m^2}, \frac{(n-m)(n+m)^2}{n^2+m^2}\right)$.

(β΄) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα σημεία τομής είναι κάθετες.

216. Αφού επαληθεύσετε η οικογένεια εξισώσεων

$$\alpha\left(3x + 4y - 10\right) + \beta\left(3x - y - 5\right) = 0, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0$$

παριστά μία οικογένεια ευθειών να βρείτε ποιές από αυτές εφάπτονται στον κύκλο $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$.
Απαντηση: $2x + y - 5 = 0$ και $x - 2y = 0$

217. Έστω τα σημεία $A\left(-t, 0\right)$, $B\left(t, 0\right)$. Θεωρούμε όλες τις ευθείες (ε) που έχουν την ακόλουθη ιδιότητα:

- Το άθροισμα των αποστάσεων των σημείων A, B από την (ε) είναι $2c > 2t > 0$ όπου c σταθερό.

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε) εφάπτονται στον κύκλο $x^2 + y^2 = c^2$.

218. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των χορδών του κύκλου $x^2+y^2+2gx+c = 0$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων ανήκουν στον κύκλο $x^2 + y^2 + gx = 0$.

219. Για την ευθεία $y = mx+c$ είναι γνωστό ότι αποκόπτει από τον κύκλο $x^2+y^2 = \alpha^2$ χορδή μήκους $2d$. Να αποδείξετε ότι $c^2 = \left(\alpha^2 - d^2\right)\left(1 + m^2\right)$
Απαντηση:

220. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τις κορυφές του τριγώνου είναι σταθερό, είναι κύκλος με κέντρο το βαρύκεντρο του $AB\Gamma$.

221. Έστω δύο θετικοί αριθμοί γ, λ και τα σημεία $A(-\gamma,0)$, $B(\gamma,0)$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία M με την ιδιότητα

$$\frac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{MB}|}=\lambda$$

ανήκουν

- Στη μεσοκάθετο $x=0$ του AB αν $\lambda=1$
- Σε κύκλο (Κύκλος του Απολλωνίου) του οποίου και να βρείτε την εξίσωση.

Απάντηση: $x^2+y^2+\frac{2(1+\lambda^2)\gamma}{1-\lambda^2}x+\frac{\gamma^2-\lambda^2\gamma^2}{1-\lambda^2}=0$

222. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες

$$\left.\begin{array}{l} x+\lambda y-2=0 \\ \lambda x-y+2\lambda=0 \end{array}\right\}$$

τέμνονται κάθετα και ότι το σημείο τομής τους ανήκει σε σταθερό κύκλο.
Απάντηση: Το κοινό σημείο των δύο ευθειών είναι το $M\left(-2\frac{\lambda^2-1}{1+\lambda^2},\frac{4\lambda}{1+\lambda^2}\right)$ και η σχέση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες του προκύπτει αν λύσουμε τις σχέσεις $x+\lambda y-2=0$, $\lambda x-y+2\lambda=0$ ως προς λ. Βρίσκουμε $\lambda=-\frac{x-2}{y}$, $\lambda=\frac{y}{x+2}$ και εξισώνοντας βρίσκουμε $-\frac{x-2}{y}-\frac{y}{x+2}=0$ από την οποία προκύπτει $x^2+y^2=4$.

3.2 Παραβολή

223. Ποιός είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M που ισαπέχουν από την ευθεία $x=-1$ και το σημείο $W(1,0)$;
Απάντηση: Η παραβολή με εξίσωση $y^2=4x$.

224. Να βρείτε την παράμετρο την εστία και την διευθετούσα της παραβολής $y^2=6x$. Απάντηση: $p=3$, $E\left(\frac{3}{2},0\right)$

225. Να βρείτε την παράμετρο την εστία και την διευθετούσα της παραβολής $x^2=5y$. Απάντηση: $p=\frac{5}{2}$, $E\left(0,\frac{5}{2}\right)$, $y=-\frac{5}{4}$

226. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή το O, άξονα συμμμετρίας τον $x'x$ και διέρχεται από το $A(2,7)$.
Απάντηση: $y^2=\frac{49}{2}x$

227. Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής $y^2=4x$ με την ευθεία $x+y=1$.
Απάντηση: $M_1\left(-2\sqrt{2}+3,-2+2\sqrt{2}\right)$, $M_2\left(2\sqrt{2}+3,-2-2\sqrt{2}\right)$

228. Να αποδείξετε ότι παραβολή $y^2=4\alpha x$ αποκόπτει από την ευθεία $y=\sqrt{2}x-4\alpha\sqrt{2}$ χορδή μήκους $6\alpha\sqrt{3}$.

229. Να αποδείξετε ότι η παραβολή $y^2 = 2px$ και η ευθεία $y = x$ έχουν δύο κοινά σημεία. Για ποιά τιμή του p η απόσταση των δύο αυτών σημείων είναι ίση με $8\sqrt{2}$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $p = \pm 4$

230. Για ποια τιμή του λ η ευθεία $\lambda x + 4y + 7 = 0$ είναι εφαπτόμενη $y^2 = 4x$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\lambda = \frac{16}{7}$

231. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(4y)^4 - x^2 = 0$ ορίζει δύο παραβολές.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Τις $y^2 = \frac{1}{16}x$, $y^2 = -\frac{1}{16}x$

232. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το $P\,(0, 2\alpha)$ και έχει συντελεστή διευθύνσεως $\frac{1}{2}$ εφάπτεται στην παραβολή $y^2 = 4\alpha x$.

233. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία $E\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ και διευθετούσα $y = \frac{4}{3}$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $x^2 = -\frac{16}{3}y$

234. Να βρείτε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων των παραβολών $y^2 = 4\alpha x$ και $x^2 = 4\beta y$.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\sqrt[3]{\alpha}x + \sqrt[3]{\beta}y + \sqrt[3]{\alpha^2}\,\sqrt[3]{\beta^2} = 0$

235. Έστω η παραβολή $y^2 = 12x$. Να βρείτε ευθεία που διέρχεται από την εστία της και αποκόπτει από την παραβολή χορδή μήκους 15.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $y = \pm\,(2x - 6)$

236. Να αποδείξετε ότι η παραβολή $x^2 = -2y$ και ο κύκλος $x^2 + (y+3)^2 = 5$ εφάπτονται (δηλαδή σε κάποιο κοινό σημείο τους οι εφαπτομένες τους συμπίπτουν).
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Υπάρχουν δύο κοινά σημεία τα οποία είναι και σημεία επαφής τα $A\,(2, -2)$, $B\,(-2, -2)$.

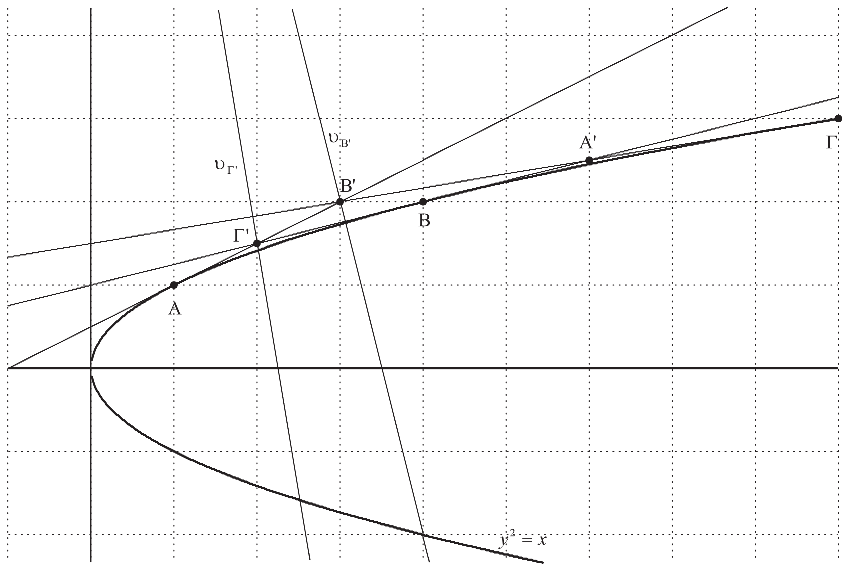
237. Έστω η παραβολή $y^2 = x$ και τα σημεία της $A\,(1, 1)$, $B\,(4, 2)$ και $\Gamma\,(9, 3)$.

(α΄) Να βρείτε τις εφαπτομένες (ε_1), (ε_2), (ε_3) της παραβολής στα σημεία A, B, Γ αντιστοίχως.

(β΄) Να βρείτε τα σημεία τομής A', B', Γ' της (ε_2) με την (ε_3) της (ε_3) με την (ε_1) και της (ε_1) με την (ε_2).

(γ΄) Να επαληθεύσετε ότι τι ορθόκεντρο του τριγώνου $A'B'\Gamma'$ ανήκει στην διευθετούσα της παραβολής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:



(α′) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}x + 1$, $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$

(β′) $A'\left(6, \frac{5}{2}\right)$, $B'(3,2)$, $\Gamma'\left(2, \frac{3}{2}\right)$

(γ′) Είναι $\upsilon_{B'} : y = 14 - 4x$ και $\upsilon_{\Gamma'} : y = -6x + \frac{27}{2}$ και το ορθόκεντρο είναι το $H\left(-\frac{1}{4}, 15\right)$.

238. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των χορδών της παραβολής $y^2 = 4x$ που έχουν συντελεστή διευθύνσεως $\lambda = 1$ ανήκουν σε ευθεία γραμμή της οποίας να βρεθεί και η εξίσωση.
Απαντηση: $y = 2$ με $x \geq 1$.

239. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής $y^2 = 4x$ στα σημεία της $A(4,4)$, $B\left(\frac{1}{4}, -1\right)$ τέμνονται κάθετα και ότι το σημείο τομής τους ανήκει στην διευθετούσα της παραβολής.

240. Δίνονται οι ευθείες

$$(\varepsilon_1) : \quad y = 2x, \qquad (\varepsilon_2) : \quad x = -2$$

και το σημείο $H(2,0)$. Να βρείτε σημείο της (ε_1) που να απέχει εξ′ ίσου από την ευθεία (ε_2) και το σημείο H.
Απαντηση: Πρόκειται για τα κοινά σημεία της (ε_1) με την παραβολή $y^2 = 8x$ που είναι τα $O(0,0), M(2,4)$.

241. Να βρείτε εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 4x$ που είναι παράλληλη στην $x - 4y + 3 = 0$.
Απαντηση: $x - 4y + 16 = 0$

242. Έστω η παραβολή $y^2 = 4x$. Σε κάθε σημείο M της παραβολής αντιστοιχούμε το σημείο N έτσι ώστε $\overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OM}$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου N.
Απαντηση: $y^2 = 8x$

243. Να βρείτε εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 8x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $2x - 6y + 5 = 0$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $x - 3y + 18 = 0$

244. Να εξετάσετε αν η ευθεία $x + y = -1$ είναι εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 4x$.

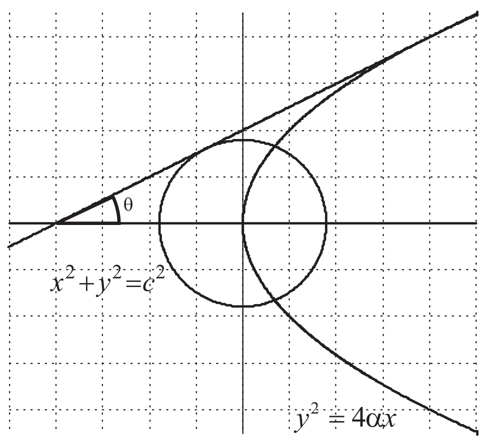
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ναι και το σημείο επαφής είναι το $P\,(1, -2)$.

245. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$. Θέτουμε $x' = \alpha x$ και $y' = \alpha y$, $\alpha \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι το σημείο (x', y') κινείται πάλι σε παραβολή.

246. (α′) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$ είναι εφαπτόμενη της παραβολής $y^2 = 2px$ αν και μόνο αν ισχύει $p = 2\alpha\beta$.

(β′) Χρησιμοποιείστε το αποτέλεσμα του προηγουμένου ερωτήματος για να επαληθεύσετε ότι η ευθεία $x - 3y + 18 = 0$ είναι εφαπτόμενη της παραβολής $y^2 = 8x$.

247. Έστω ότι η κοινή εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = c^2$ και της παραβολής $y^2 = 2\alpha x$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία θ.



Δείξτε ότι

$$\varepsilon\varphi^2\theta = \frac{\sqrt{c^2 + 4\alpha^2} - c}{2c}$$

248. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων οι οποίοι εφάπτονται στον άξονα $y'y$ και στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2\alpha x$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ο άξονας $x'x$ και η παραβολή $y^2 = 4\alpha x$.

249. Δίνεται σταθερό σημείο A και ευθεία (ε) που δεν διέρχεται από το A. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το A και εφάπτονται στην (ε), είναι παραβολή.

250. Έστω η παραβολή $y^2 = 4px,\ p > 0$. Μία χορδή της AB είναι κάθετη στον άξονα και έχει μήκος $8p$. Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB} = 0$.

251. Ισόπλευρο τρίγωνο OAB είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $y^2 = 4px$ με κορυφή το O. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.
Απαντηση: $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ και $x = 12p$

252. Έστω η παραβολή $\mathcal{C}: \ y^2 = 2px$ και μία χορδή της AB παράλληλη με τον άξονα $y'y$ η οποία περνάει από την εστία. Να αποδειχθεί ότι:

    (α′) $(AB) = 2(EK)$ όπου K το σημείο που τέμνει ο άξονας $x'x$ την διευθετούσα.

    (β′) Οι εφαπτομένες στα A και B διέρχονται από το K.

253. Δίνεται η παραβολή $\mathcal{C}: \ y^2 = 2px$ και δύο χορδές της OB, $O\Gamma$, ώστε η γωνία $\widehat{BO\Gamma} = 90°$. Να αποδειχθεί ότι η $B\Gamma$ διέρχεται από σταθερό σημείο.

254. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $(x, y) = \left(2p\kappa^2, 2p\kappa\right)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.

    (α′) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε παραβολή.

    (β′) Αν $A\left(2p\kappa_1^2, 2p\kappa_1\right)$, $B\left(2p\kappa_2^2, 2p\kappa_2\right)$ είναι δύο σημεία της παραβολής αυτής, να αποδειχθεί ότι αν η AB διέρχεται από την εστία, είναι $4\kappa_1\kappa_2 = -1$.

255. Έστω η παραβολή $y^2 = 2px$ και μεταβλητή εφαπτομένη της (ε). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της προβολής της εστίας της παραβολής στην (ε).
Απαντηση: Ο άξονας $y'y$.

256. Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες μίας παραβολής που άγονται από τυχόν σημείο της διευθετούσας της είναι κάθετες.

257. Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη (ε) της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της M διχοτομεί την γωνία που σχηματίζει η ME (E η εστία της παραβολής) με την παράλληλη που άγεται από το M προς τον $x'x$.

258. Έστω η παραβολή $\mathcal{C}: y^2 = 2px$ και η εφαπτομένη της (ε) σε ένα σημείο της $M\left(x_1, y_1\right)$. Να αποδείξετε ότι αν η ευθεία OM τέμνει την διευθετούσα της παραβολής στο σημείο N τότε $NE // (\varepsilon)$.

3.3 Ελλειψη

259. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες $E_1\left(-5, 0\right)$, $E_2\left(5, 0\right)$ και μεγάλο άξονα 24.
Απαντηση: $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{119} = 1$

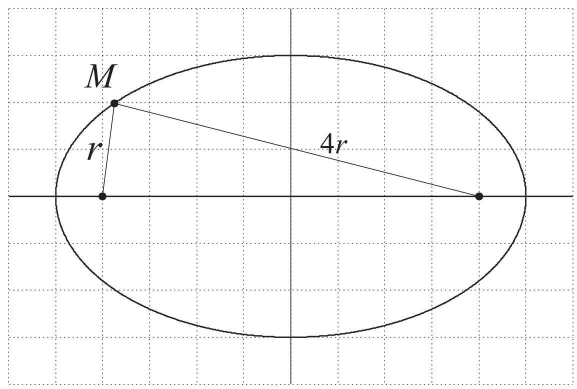
260. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει μεγάλο άξονα 20 και εκκεντρότητα $\frac{3}{5}$.
Απαντηση: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

261. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει εστιακή απόσταση $2\gamma = 6$ και εκκεντρότητα $\frac{3}{5}$.
Απαντηση: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

262. Να βρεθούν τα μήκη των αξόνων, οι εστίες και η εκκεντρότητα της έλλειψης με εξίσωση $4x^2 + 25y^2 = 100$.
Απαντηση: $2\alpha = 10$, $2\beta = 4$, $E_1\left(-\sqrt{21}, 0\right)$, $E_2\left(\sqrt{21}, 0\right)$ και $\varepsilon = \frac{\sqrt{21}}{5}$

263. Να βρείτε την εξίσωση έλλειψης που έχει άξονες συμμετρίας τους άξονες και διέρχεται από τα σημεία $M\left(2, \sqrt{3}\right)$ και $N\left(0, 2\right)$.
Απαντηση: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

264. Να βρείτε το σημείο M της έλλειψης στο παρακάτω σχήμα:



Απαντηση: $M\left(-\frac{15}{4}, \frac{\sqrt{63}}{4}\right)$

265. Να βρείτε σημείο της ευθείας $y = 2x$ του οποίου το άθροισμα των αποστάσεων από τα σημεία $A\left(-3, 0\right)$ και $B\left(3, 0\right)$ είναι ίσο με 10.
Απαντηση: $M\left(\frac{10\sqrt{29}}{29}, \frac{20\sqrt{29}}{29}\right)$, $M'\left(-\frac{10\sqrt{29}}{29}, -\frac{20\sqrt{29}}{29}\right)$

266. Να βρείτε την εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ στο σημείο που έχει τετμημένη 1 και θετική τεταγμένη.
Απαντηση: $\frac{x}{9} + \frac{2\sqrt{6}y}{9} = 1$

267. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $4x^2 + 25y^2 = 100$ η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $2x - 3y = 1$.
Απαντηση: $2x - 3y = \pm 2\sqrt{34}$

268. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $2x^2 + 3y^2 = 24$ η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $-x - 2y + 5 = 0$.
Απαντηση: $2x - y = \pm 2\sqrt{14}$

269. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A\left(3, 5\right)$
Απαντηση: $x = 3$, $2x - 3y + 9 = 0$

270. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $4x^2+y^2=20$ η οποία:

(α′) Είναι παράλληλη στην ευθεία $4x+y+4=0$.

(β′) Είναι κάθετη στην ευθεία $x+4y+12=0$.

(γ′) Διέρχεται από το σημείο $A(0,10)$.

Απαντηση:

(α′) $4x+y=\pm 10$

(β′) $\pm 4x \mp y = 10$

(γ′) $4x \pm y = \pm 10$

271. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με εστίες $E_1(-3,0)$ και $E_2(3,0)$ η οποία εφάπτεται στην ευθεία $x+y-5=0$.
Απαντηση: $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$

272. Να βρείτε σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$ που απέχει από τον μικρό άξονα της απόσταση ίση με 3.
Απαντηση: $X_1\left(3,\frac{\sqrt{33}}{2}\right)$, $X_2\left(3,-\frac{\sqrt{33}}{2}\right)$, $X_3\left(-3,\frac{\sqrt{33}}{2}\right)$ και $X_4\left(-3,-\frac{\sqrt{33}}{2}\right)$.

273. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(4,-1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $x+4y-10=0$.
Απαντηση: Υπάρχουν δύο ελλείψεις $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ και $\frac{x^2}{80}+\frac{4y^2}{5}=1$

274. Να βρείτε σημείο M της έλλειψης $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ τέτοιο ώστε $\widehat{E_1ME_2}=90°$.
Απαντηση: $M_1\left(\frac{5\sqrt{7}}{4},\frac{9}{4}\right)$, $M_2\left(\frac{5\sqrt{7}}{4},-\frac{9}{4}\right)$, $M_3\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4},\frac{9}{4}\right)$ και $M_4\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4},-\frac{9}{4}\right)$.

275. Έστω η έλλειψη $\mathcal{C}:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

(α′) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(\alpha\eta\mu t,\beta\sigma\upsilon\nu t)$ ανήκει στην $\mathcal{C}$ και αντιστρόφως κάθε σημείο της $\mathcal{C}$ είναι της παραπάνω μορφής.

(β′) Να κάνετε το ίδιο για το σημείο $N\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\alpha,\frac{2t}{1+t^2}\beta\right)$.

276. Ένα τετράγωνο έχει τις κορυφές του στην έλλειψη $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Να βρείτε το εμβαδόν του.
Απαντηση: Η πλευρά είναι ίση με $\frac{24}{5}$ και το εμβαδόν $\left(\frac{24}{5}\right)^2=\frac{576}{25}$.

277. Δίνονται οι κύκλοι $(x+2)^2+y^2=49$ και $(x-2)^2+y^2=4$.

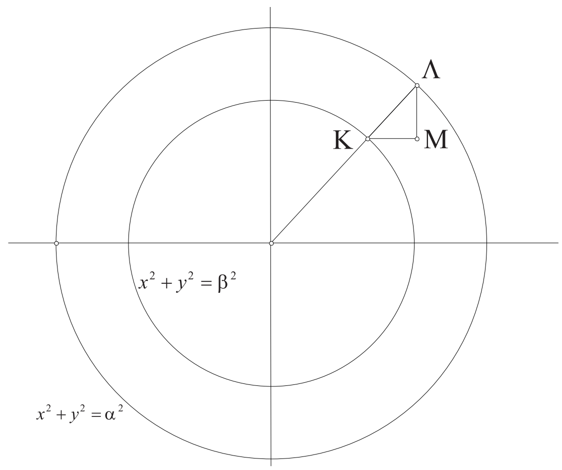
(α′) Να βρείτε την σχετική θέση τους.

(β′) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται στους δύο κύκλους.

Απαντηση: (α′) Ο δεύτερος κύκλος είναι εσωτερικός του πρώτου. (β′) Η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{(9/2)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{65}/2\right)^2}=1$.

278. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = px + q$, $p \neq 0$ είναι εφαπτόμενη της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ αν και μόνο αν $\beta^2 + \alpha^2 p^2 = q^2$.

279. Θεωρούμε του κύκλους $x^2 + y^2 = \alpha^2$ και $x^2 + y^2 = \beta^2$ με $\alpha > \beta$. Από το Ο φέρνουμε μεταβλητή ημιευθεία που τέμνει τους κύκλους στα Λ, K αντιστοίχως. Από το K φέρνουμε παράλληλη στον $x'x$ και από το Λ παράλληλη στον $y'y$ οι οποίες τέμνονται στο M.



Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

280. Αν (ε) είναι η εφαπτομένη της έλλειψης $\mathcal{C}: \ \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο $M_1\left(x_1, y_1\right)$ να αποδείξετε ότι η κάθετη στην (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{\alpha^2 y_1}{\beta^2 x_1}$.

281. Να εξετάσετε αν υπάρχει έλλειψη στην οποία ένα σημείο της M να σχηματίζει με τις εστίες της E και E' ισόπλευρο τρίγωνο.
Απαντηση: Ναι π.χ. με $\alpha = 2\gamma$, $\beta = \gamma\sqrt{3}$

282. Ο κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.
Απαντηση: $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$

283. Δίνεται η έλλειψη $\mathcal{C}: \ \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Να αποδείξετε ότι και η έλλειψη $\frac{\kappa^2 x^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2 y^2}{\beta^2} = 1$ έχει την ίδια εκκεντρότητα με τη $\mathcal{C}$.

284. Να συγκριθούν οι εκκεντρότητες των ελλείψεων $\mathcal{C}_1: \ \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\mathcal{C}_2: \ \frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} = 1$, με $\alpha > \beta$.
Απαντηση: Μεγαλύτερη εκκεντρότητα έχει η δεύτερη.

285. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$.

(α′) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $E'BEB'$ είναι ρόμβος (E',E οι εστίες, B', B τα άκρα του μικρού άξονα)

(β′) Να βρεθεί το εμβαδόν του ρόμβου.

Απαντηση: (β′) $2\beta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$

286. Έστω η έλλειψη $\mathcal{C}: \ \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και η εφαπτομένη της σε ένα σημείο $P_1\left(x_1,y_1\right)$ η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία M και N αντιστοίχως. Έστω K, Λ οι προβολές του P_1 στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι:

(α′) $(OK)\,(OM)=\alpha^2$

(β′) $(O\Lambda)\,(ON)=\beta^2$

287. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων

$$\mathcal{C}_1: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \text{ και } \mathcal{C}_2: \frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$$

είναι κορυφές τετραγώνου.

288. Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και η εστία της $E\left(\gamma,0\right)$. Μεταβλητή ευθεία (ε) διέρχεται από την E και τέμνει την έλλειψη στα σημεία P_1,P_2. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα $\frac{1}{EP_1}+\frac{1}{EP_2}$ είναι σταθερό.

289. Έστω η έλλειψη $\mathcal{C}: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

(α′) Να αποδείξετε ότι αν από το σημείο $P\left(x_0,y_0\right)$ φέρουμε εφαπτόμενες στην έλλειψη $\mathcal{C}$ τότε η χορδή των επαφών έχει εξίσωση $\frac{x_0x}{\alpha^2}+\frac{y_0y}{\beta^2}=1$.

(β′) Να αποδείξετε ότι αν μεταβλητή ευθεία διέρχεται από σταθερό σημείο $S\left(x_1,y_1\right)$ και τέμνει την $\mathcal{C}$ στα A,B τότε το κοινό σημείο των εφαπτόμένων της $\mathcal{C}$ στα A,B ανήκει σε σταθερή ευθεία.

290. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών μίας έλλειψης από μία τυχούσα εφαπτομένη της είναι σταθερό.

291. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες της έλλειψης $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ και της παραβολής $y^2=12x$.

Υποδειξη: Χρησιμοποιείστε τις ασκήσεις 246, (α′) και 278.

Απαντηση: $y=\pm\left(Ax+B\right)$ όπου $A=\frac{1}{96}\sqrt{6+6\sqrt{17}}^3-\frac{1}{8}\sqrt{6+6\sqrt{17}}$ και $B=\frac{1}{2}\sqrt{6+6\sqrt{17}}$.

3.4 Υπερβολη

292. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $9x^2 - 16y^2 = 144$. Να βρεθούν τα μήκη των αξόνων, οι εστίες και η εκκεντρότητα.
Απαντηση: Άξονες: $2\alpha = 8$, $2\beta = 6$. Εστίες: $E_1(-5,0)$, $E_2(5,0)$. Εκκεντρότητα: $\frac{5}{4}$

293. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει ασυμπτώτους τις $y = \pm\frac{4}{3}x$ και εστιακή απόσταση $2\gamma = 20$.
Απαντηση: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ και $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$.

294. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει ασυμπτώτους τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων και διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$.
Απαντηση: $x^2 - y^2 = 3$

295. Να βρείτε υπερβολή που έχει ίδιες εστίες με τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ και αντίστροφή εκκεντρότητα.
Απαντηση: $\frac{4x^2}{27} - \frac{4y^2}{9} = 1$

296. Να βρείτε εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ σε σημείο της που ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο και έχει τετμημένη διπλάσια της τεταγμένης του.
Απαντηση: $\frac{3\sqrt{2}x}{8} - \frac{\sqrt{2}y}{12} = 1$

297. Να βρείτε ποιές εφαπτομένες της υπερβολής $x^2 - y^2 = 16$ σχηματίζουν με τον $x'x$ γωνία $120°$.
Απαντηση: $y = -\sqrt{3}x \pm 4\sqrt{2}$

298. Να βρείτε εφαπτομένες της υπερβολής $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία $5x - 4y - 3 = 0$.
Απαντηση: $\pm(5x - 4y) = 16$

299. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της υπερβολής $9x^2 - y^2 = 32$ η οποία:

(α′) Είναι παράλληλη στην ευθεία $9x + y + 9 = 0$.

(β′) Είναι κάθετη στην ευθεία $x - 9y + 18 = 0$.

(γ′) Διέρχεται από το σημείο $A(0,16)$.

Απαντηση:

(α′) $9x + y = \pm 16$

(β′) $\pm 9x \mp y = 16$

(γ′) $9x \pm y = \pm 16$

300. Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η εξίσωση $\frac{x^2}{\lambda^2+1} + \frac{y^2}{\lambda+7} = 1$ παριστάνει υπερβολή; Ποιές θα είναι οι εστίες της;
Απαντηση: Για $\lambda \in (-7,-2)$. Εστίες είναι οι $E_1\left(0,-\sqrt{5}\right)$, $E_2\left(0,\sqrt{5}\right)$

301. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = px + q$, $p \neq 0$ είναι εφαπτόμενη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ αν και μόνο αν $\beta^2 + q^2 = \alpha^2 p^2$.

302. Έστω η υπερβολή $\mathcal{C} : \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Να δειχθεί ότι κάθε παράλληλη προς μία ασύμπτωτη τέμνει την παραβολή σ'ενα μόνο σημείο.

303. Δίνεται η υπερβολή $\mathcal{C} : \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ένα σημείο της $M(x_1, y_1)$ διαφορετικό από τις κορυφές της. Θεωρούμε την εφαπτομένη (ε) της υπερβολής στο M και την κάθετη (ε') της (ε) στο M η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα Γ και Δ αντίστοιχα

(α') Να βρεθεί συναρτήσει των x_1, y_1 η εξίσωση της (ε').

(β') Να βρεθούν οι συντεταγμένες των Γ και Δ.

(γ') Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου N του $\Gamma\Delta$.

(δ') Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος του N είναι μία υπερβολή $\mathcal{C}_1$.

(ε') Να αποδειχθεί ότι οι υπερβολές $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}_1$ έχουν τις ίδιες εκκεντρότητες αλλά τις εστίες σε διαφορετικούς άξονες.

Απαντηση: (α') $\frac{y_1 x}{\beta^2} + \frac{x_1 y}{\alpha^2} = y_1 x_1 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)$ (β') $\Gamma\left(x_1 \frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2}, 0\right)$, $\Delta\left(0, y_1 \frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}\right)$
(γ') $N\left(x_1 \frac{\beta^2+\alpha^2}{2\alpha^2}, y_1 \frac{\beta^2+\alpha^2}{2\beta^2}\right)$

304. Να αποδείξετε ότι κάθε εφαπτομένη μίας υπερβολής τέμνει τις ασυμπτώτους και το σημείο επαφής είναι μέσο του τμήματος με άκρα τα σημεία τομής.

305. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες της υπερβολής $4x^2 - 9y^2 = 36$ και του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$.

Υποδειξη: Χρησιμοποιείστε την άσκηση 301.
Απαντηση: $y = \pm\frac{2}{5}\left(\sqrt{10}x + \sqrt{65}\right)$ και $y = \pm\frac{2}{5}\left(\sqrt{10}x - \sqrt{65}\right)$

306. Έστω η υπερβολή $x^2 - y^2 = \alpha^2$ και $A(x_1, y_1)$,$B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$ τρία σημεία της. Να αποδειχθεί ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ ανήκει στην υπερβολή.

307. Να αποδειχθεί ότι για τις εκκεντρότητες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ των υπερβολών $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$ ισχύει $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2$.

308. Να αποδείξετε ότι η απόσταση κάθε εστίας της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ από τις ασύμπτωτες της είναι ίση με β.

309. Έστω η ισοσκελης υπερβολή $x^2 - y^2 = \alpha^2$ με κορυφές A και A' και η ευθεία (ε) : $y = k$ που τέμνει την υπερβολή στα σημεία B και B'. Να αποδείξετε ότι $\widehat{BAB'} = \widehat{BA'B'} = 90^\circ$.

310. Έστω η ισοσκελής υπερβολή $\mathcal{C}: x^2 - y^2 = \alpha^2$ και A', A οι κορυφές της. Έστω M σημείο της C και M' το συμμετρικό του M ως προς τον άξονα $x'x$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, M' και M είναι ορθόκεντρα των τριγώνων $MA'M$, AMA' και $AM'A'$.

4 ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

311. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{\nu}{\nu+1}$.

312. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + ... + \frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)} = \frac{\nu(\nu+3)}{4(\nu+2)(\nu+1)}$.

313. Να αποδείξετε ότι αν $0 \le \alpha \le 1$ τότε για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει:

$$(1-\alpha)^\nu \ge 1 - \nu\alpha$$

314. Να αποδείξετε ότι αν $0 < \alpha \le 1$ τότε για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει:

$$(1-\alpha)^\nu < \frac{1}{1+\nu\alpha}$$

315. Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ τότε ισχύει

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdot ... \cdot(1+\alpha_\nu) \ge 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu$$

316. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \ge 10$ ισχύει $2^\nu \ge \nu^3$.

317. Να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

(α′) $23 : 4$

(β′) $-23 : 4$

(γ′) $23 : -4$

(δ′) $-23 : -4$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(α′) $\upsilon = 3, \pi = 5$

(β′) $\upsilon = 1, \pi = -6$

(γ′) $\upsilon = 3, \pi = -5$

(δ′) $\upsilon = 1, \pi = 6$

318. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι ακέραιοι να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

(α′) $(4\alpha + 8\beta + 7) : 4$

(β′) $(5\alpha - 20\gamma + 2) : 6$

(γ′) $(6\alpha\beta\gamma + 7) : 6$

(δ′) $(3\alpha + 9\beta + 27\gamma + 81) : 3$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(α′) 3

(β′) 2

(γ′) 9

(δ′) 0

319. Αν ο ν είναι ακέραιος να επαληθεύσετε ότι:

   (α′) Ο $7\nu^2 - \nu - 6$ είναι πολλαπλάσιο του $\nu - 1$.

   (β′) Ο $(\nu - 1)(\nu - 4) + 4$ είναι πολλαπλάσιο του 2.

   (γ′) $\left(\nu^2 + 1\right)\left(\nu^2 + 2\right)(\nu + 1)(\nu + 2)$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

   (δ′) Ο $\nu^4 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 2.

320. Να αποδείξετε ότι αν ο α διαιρούμενος από το 7 αφήνει υπόλοιπο 1 το ίδιο υπόλοιπο αφήνει και ο α^2 διαιρούμενος δια του 7.

321. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι περιττοί τότε ο αριθμός

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$$

είναι πολλαπλάσιο του 8.

322. Να βρείτε για ποιές τιμές του θετικού ακεραίου x ισχύει $2x + 1|12$.
   Απαντηση: $x = 1$

323. Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί κ, λ είναι ακέραιοι τότε ο αριθμός $\frac{\kappa^3+\lambda^3}{\kappa+\lambda}$ είναι ακέραιος.

324. Να αποδείξετε ότι αν $x = 3k + 1$ και $y = 6m + 2$ τότε ακέραιος $x^2 + y^2 + x + y$ είναι της μορφής $3\nu + 2$.

325. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $7^{2001} + 6^{2001} + 9^{1081} + 4^{6981}$ είναι πολλαπλάσιο του 13.

326. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\frac{n(n+1)(n+8)}{3}$$

είναι ακέραιος.

327. Να αποδείξετε ότι αν ο x είναι περιττός ακέραιος τότε ο αριθμός $\frac{x^2-1}{8}$ είναι ακέραιος.

328. Να χρησιμοποιήσετε επαγωγή για να αποδείξετε ότι αν ν είναι θετικός ακέραιος τότε:

   (α′) $2^\nu > 2\nu + 1$ με $\nu \geq 3$

   (β′) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)} = \frac{\nu}{2\nu+1}$

329. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός α είναι πολλαπλάσιο των 5 και 7 τότε ο αριθμός $\frac{x+70}{35}$ είναι ακέραιος.

330. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός $x^{1989}+y^{1989}$ είναι περιττός τότε και ο αριθμός $x^{2001}+y^{2001}$ είναι επίσης περιττός.

331. Έστω α, β δύο ακέραιοι με $\alpha|\beta$ και $\beta|\alpha$. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2=\beta^2$.

332. Ποιό είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $7m-701$ δια 7;
Απαντηση: 6

333. Υπάρχει άραγε m ώστε ο αριθμός m^2+m να διαιρεί τον 12;
Απαντηση: $m=2,3$

334. Είναι γνωστό ότι ο x διαιρεί τον y και ο y διαιρεί τον z. Να αποδείξετε ότι ο x διαιρεί τον $y+z$.

335. Αν $\alpha|\beta$ και $\gamma|\delta$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $(\alpha+\gamma)|(\beta+\delta)$;
Απαντηση: Όχι.

336. Να αποδείξετε ότι αν ο t είναι πολλαπλάσιο του 8 τότε ο αριθμός t^2-64 είναι πολλαπλάσιο του 64.

337. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha|\beta$, $\beta|\gamma$, $\gamma|\alpha$ τότε $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=0$.

338. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ξ είναι πολλαπλάσιο του $\nu+1$ και του $\nu+2$ τότε είναι πολλαπλάσιο και του $\nu^2+3\nu+2$.

339. Να αποδείξετε ότι αν ο m είναι της μορφής $m=5k+3$ τότε ο $5m+3$ είναι της μορφής $5t+3$.

340. Ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $(7m++3)^3$ δια του 7;
Απαντηση: 6

341. Να αποδείξετε ότι ο a^m-b^m διαιρεί τον $a^{km}-b^{km}$.

342. Δύο θετικοί ακέραιοι α, β έχουν άθροισμα 266. Να βρεθούν οι α, β αν είναι γνωστό ότι ο α διαιρούμενος δια του β αφήνει πηλίκο 13 και υπόλοιπο 0.
Απαντηση: $\alpha=757$, $\beta=48$.

343. Έστω α, δ θετικοί ακέραιοι. Αν $\delta|7\alpha+2$ και $\delta|3\alpha-1$ ποιός μπορεί να είναι ο δ·
Απαντηση: $\delta=1$ ή $\delta=13$

344. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός α είναι περιττός τότε ο αριθμός $\beta=\frac{3\alpha^2+2\alpha+3}{4}$ είναι ακέραιος.

345. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ακέραιος ν ώστε οι αριθμοί $\frac{7\nu-1}{4}$ και $\frac{5\nu+3}{12}$.

346. Να αποδείξετε ότι αν $3|4x - y$ τότε $9|4x^2 + 7xy - 2y^2$.

347. Να αποδείξετε ότι

$$8|3^{2n} + 7$$

348. **Από τον διαγωνισμό "Θαλής", 1999.** Να βρείτε πόσοι από τους αριθμούς 1, 2, 3, ..., 1999 δεν διαιρούνται ούτε με το 5 ούτε με το 7.
Απαντηση: 1372

349. Ο διαιρετέος μίας Ευκλείδειας διαίρεσης είναι το 542 και το πηλίκο είναι το 12. Ποιοί αριθμοί μπορεί να είναι διαιρέτες και υπόλοιπα αυτής της διαίρεσης·
Απαντηση: (45, 2), (44, 14), (43, 26), (42, 38)

350. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x^3y - xy^3$ διαιρείται από το 3.

351. Έστω $A = 9\alpha + 5\beta$ και $B = 14\alpha + 4\beta$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $17|A$ αν και μόνο αν $17|B$.